ANNALEN
DER
PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE

BAND 72
DER GANZEN REIHE 377. BAND

KURATORIUM:
M. PLANCK, G. QUINCKE, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

MIT ZWEI TAFELN

1923

LEIPZIG · VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

BERLIN
COLLEGE
LIBRARY

Ann Fd gen
QES
+ 1.25

WITHDRAWN
from
OBERLIN COLLEGE
LIBRARY

Inhalt.

Vierte Folge. Band 72.

Siebzehntes Heft.

		Seite
1.	Friedrich Trautmann. Über den Hochfrequenzwiderstand von geraden Drähten, die mit leitenden Mänteln versehen sind	1
2.	K. Försterling. Über die Fortpflanzung elektrischer Wellen an einem geraden Metalldraht, der mit einem leitenden Mantel versehen ist	30
3.	Franz Selety. Erwiderung auf die Bemerkungen Einsteins über meine Arbeit „Beiträge zum kosmologischen Problem“	58
4.	Alfred Klose. Über ausgezeichnete Energiewerte in mechanischen Systemen	67

Ausgegeben am 10. Juli 1923.

Achtzehntes Heft.

1.	Emil Rupp. Über erregende Absorption und Tilgung der Phosphore	81
2.	Nina Wedeneewa. Über Absorption und anomale Rotationsdispersion des Kampferchinons	122
3.	W. Alexandrow. Über den kugelsymmetrischen Vakuumvorgang in der Einsteinschen Gravitationstheorie	141
4.	Georg Jacoby. Über die elektrische Polarisation des Dielektrikums	153

Ausgegeben am 20. Juli 1923.

Neunzehntes Heft.

1.	F. Waibel. Über die Druckabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von Schwefelkohlenstoff, Benzol, Hexan und Luft	161
2.	E. Grüneisen und E. Goens. Schallgeschwindigkeit in Stickstofftetroxyd. Eine untere Grenze seiner Dissoziationsgeschwindigkeit	193
3.	Gerold von Gleich. Die allgemeine Relativitätstheorie und das Merkurperihel	221
4.	Carl Benedicks. Magnetischer Schutzpanzer aus spiralgewickeltem Eisenblech	236

Ausgegeben am 7. August 1923.

Zwanzigstes Heft.

1.	C. Dieterici. Eine mechanische Theorie der Lösungen	241
2.	Carl Ramsauer. Die Massenbewegung des Wassers bei Unterwasserexplosionen	265
3.	A. Michels. Einfluß der Rotation auf die Empfindlichkeit einer absoluten Druckwage	285
4.	Friedrich Kottler. Berichtigung zu der Abhandlung „Elektromagnetische Theorie der Beugung“	320

Ausgegeben am 21. August 1923.

Einundzwanzigstes Heft.

Seite

1. D. Enskog. Zur Quantentheorie des Dampfdruckes und der Dissoziation 321
2. Carl Ramsauer. Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen. II. Fortsetzung und Schluß 345
3. Johannes Fischer. Über die Beugungserscheinungen bei sphärischer Aberration 358
4. Wilhelm Peter Radt. Über die Bremsung bewegter Ladungen beim Überfliegen leitender Körper 400

Ausgegeben am 25. September 1923.

Zweiundzwanzigstes Heft.

1. W. Gordon. Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie 421
2. Aloys Wensl. Gegen ein Mißverständnis der Äquivalenzhypothese 457
3. A. Joffé. Elektrizitätsdurchgang durch Kristalle 461

Ausgegeben am 28. September 1923.

Dreiundzwanzigstes Heft.

1. E. Bratke und E. Waetzmann. Über eine Abart der Jaminschen Interferenzanordnung 501
2. Otto Halpern. Über die Verwendung von selektiv durchlässigen Spiegeln in der Strahlungstheorie 516
3. Hans Kneser. Untersuchungen an einem Glimmlicht-Gleichrichter für Wechselstrom. (Hierzu Tafel I und II) 519
4. Walter Kopp. Untersuchung stehender elektromagnetischer Wellen mit ungedämpfter Erregung 525
5. Joh. Thiele. Über die zeitliche Änderung der Thermokräfte bei Eisen, Nickel und Kobalt nach dem Ziehen oder Magnetisieren 549
6. Hans Kuppenheim. Nachtrag zu der Arbeit: Über die Beständigkeit der Phosphoreszenzzentren. I. 564

Ausgegeben im Oktober 1923.

Vierundzwanzigstes Heft.

1. Gerhard C. Schmidt und Roland Walter. Über die Elektrizitätsleitung von Salzdämpfen. Abhandlung IV . . . 585
2. A. Karolus. Untersuchung über das kontinuierliche Röntgenspektrum bei verschiedenen Entladungsfrequenzen 595
3. Friedrich von Rautenfeld. Zur Elektrizitätsleitung in Kristallen 617

Ausgegeben im November 1923.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I u. II. H. Kneser.

1923. № 17.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 72

1. *Über den Hochfrequenzwiderstand von geraden Drähten, die mit leitenden Mänteln versehen sind;* von *Friedrich Trautmann.*

Inhalt: Einleitung. Geschichtliches. Ziel der Arbeit. — Die Methode der elektrischen Messungen. — Die elektrische Meßeinrichtung. a) Erregerkreis. b) Meßkreis. c) Indikatorkreis. d) Die Vergleichwiderstände. — Das Galvanisieren. a) Elektroden und Rührvorrichtungen. b) Bäder. — Die Bestimmung der Mantelstärke. — Theoretisches. — Ergebnisse. a) Fehlerquellen. b) Die Ergebnisse der Untersuchungen. — Zusammenfassung.

Einleitung.

In den letzten beiden Jahrzehnten des vorigen Jahrhunderts begannen Wissenschaft und Technik, den Wechselströmen und — im Anschluß an die Untersuchungen von Hertz — vor allem den schnellen Schwingungen ein großes Interesse zuzuwenden. Dabei richtete sich die Aufmerksamkeit auch auf die schon von Maxwell behandelte Hautwirkung, und diese wurde in der Folge vor allem für den einfacheren Fall des geraden einmetallischen Leiters durch eine größere Zahl von Untersuchungen geklärt. Als grundlegend mögen hier die Arbeiten von Stefan und Rayleigh[1]) hervorgehoben werden, denen bis in die neueste Zeit eine ganze Reihe von Untersuchungen folgte, die sich großenteils mit der besonderen Lösung des Problems für Eisenleiter befassen.

Rein experimentelle Untersuchungen über die Hautwirkung in gestreckten Leitern veröffentlichte im Jahre 1892 Bjerknes.[2]) Er schloß gleichgeformte Drähte verschiedenen Materials mit einem Elektrometer zu einem Schwingungskreis von 120 cm Wellenlänge und fand, im Gegensatz zu einer von

1) J. Stefan, Wiener Ber. 95. II. Abtlg. 1887; Lord Rayleigh, Phil. Mag. 21. S. 387. 1886.

2) V. Bjerknes, Ann. d. Phys. 47. S. 69. 1892.

Hertz in seiner ersten grundlegenden Abhandlung gemachten Annahme, daß die besonderen Eigenarten der Metalle in bezug auf spezifischen Widerstand und magnetisches Verhalten auch bei den schnellen Schwingungen noch wirksam werden. Weitere Untersuchungen machte Bjerknes[1]) im Jahre 1893 auf Grund der Hertzschen Spiegelversuche. Diese hatten gezeigt, daß sehr dünne Silberschichten die Wellen durchließen, hinlänglich dicke Platten dagegen nicht. Die Wellen sind also fähig in Metalle einzudringen, doch können nur die Oberflächenschichten die Erscheinung beeinflussen. Bjerknes entnahm daraus, daß es für die Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen an Drähten ohne Belang sein würde, wenn das Innere des Leiters entfernt und durch irgendeinen anderen Stoff ersetzt würde. Er verwandte dieselbe Anordnung wie bei der ersten Untersuchung. Als Leiter nahm er verschiedene Metalle und überzog sie galvanisch mit stufenweise verstärkten metallischen Mänteln. Dabei zeigte sich, daß bei der schon früher verwendeten Wellenlänge von 420 cm sehr dünne Mäntel genügten, um das Seelenmetall praktisch auszuschalten. Seinen Kurven ist zu entnehmen, daß die Wirkung des Seelenmetalls aufhörte bei etwa 0,0026 cm Zn auf Cu, bei etwa 0,00076 cm Cu auf Fe, bei etwa 0,00103 cm Ni auf Cu, bei etwa 0,00124cm Fe auf Cu. Der Seelendraht hatte einen Durchmesser von 0,05 cm.

Wertvolle mechanische Eigenschaften, die man solchen bimetallischen Drähten bei guter Leitfähigkeit verleihen kann, haben ihnen dann auch Eingang in die Technik verschafft. Z. B. erwähnt Zenneck in seinem Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie die verkupferten Stahldrähte der Eiffelturmantenne; und auch die Fernsprechtechnik hat Gebrauch von stark verkupferten Eisendrähten gemacht.

In erster Linie mit letzteren beschäftigt sich eine Untersuchung von J. M. Miller[2]), und zwar für Frequenzen bis 5000. Die Arbeit gibt u. a. auch eine allerdings in ihrem Gültigkeitsbereich stark beschränkte Formel für die Berechnung des Widerstandes solcher bimetallischer Leiter an. Das Ganze ist aber in erster Linie darauf angelegt, der Fern-

1) V. Bjerknes, Ann. d. Phys. 48. S. 596. 1893.

2) J. M. Miller, Eff. Resist. a. Induct. of Iron a. bimetall. Wires, Bull. Bur. Stand. 12. Nr. 2. S. 207. 1915.

sprechtechnik zu dienen und gibt keine systematische Untersuchung für verschiedene Mantelstärken.

Weitere Arbeiten auf diesem Gebiete sind mir nicht bekannt geworden. Es war daher der Zweck der vorliegenden Arbeit, durch systematische Untersuchung des Widerstandes von mit leitenden Mänteln versehenen geraden Leitern in bezug auf Abhängigkeit von Mantelstärke und Frequenz weitere Aufklärung anzustreben.

Plan der Untersuchungen.

Es sollten untersucht werden:

I. Metallische Drähte mit Mänteln geringer Leitfähigkeit (Elektrolyten).

II. Metallische Drähte mit metallischen Mänteln.

a) Drähte aus nicht ferromagnetischen Metallen mit nicht ferromagnetischen Mänteln.

1. Drähte geringerer Leitfähigkeit mit gutleitenden Mänteln.

2. Drähte guter Leitfähigkeit mit weniger gut leitenden Mänteln.

b) Drähte aus ferromagnetischen Metallen mit nicht ferromagnetischen Mänteln.

c) Drähte aus nicht ferromagnetischen Metallen mit ferromagnetischen Mänteln.

Diese allgemeinen Gesichtspunkte schließen natürlich eine große Zahl von Variationsmöglichkeiten ein, und es mußte zur Vermeidung einer allzuweiten Ausdehnung der Arbeit schon unter den naheliegenden Möglichkeiten eine Auswahl getroffen werden. So wurden nur für Punkt I verschieden starke Seelendrähte untersucht. Unter den übrigen Punkten beschränkten sich die Messungen auf Seelendrähte von rund 0,2 cm Durchmesser. Unter II. a) 2. war verzinkter Kupferdraht in Aussicht genommen. Die Verzinkung machte aber später zu erörternde Schwierigkeiten, und es mußte schließlich auf Untersuchung dieses Punktes verzichtet werden, da äußere Umstände zum Abschluß der Arbeit drängten. Die Untersuchungen von Bjerknes lassen aber auch keine grundlegenden Unterschiede gegenüber II. a) 1. erwarten.

Es wurden bei Wellenlängen von 50 bis 900 m, zum Teil bis 1800 m, sowie sehr verschiedenen Mantelstärken untersucht:

I. a) Kupferdraht von 0,048 cm Durchmesser mit Mänteln von Schwefelsäure, Kaliumchloridlösung und Kochsalzlösung.

b) Kupferdraht von 0,096 cm Durchmesser mit Mänteln von Kochsalzlösung.

II. a) Messingdraht mit Kupfermantel.

b) 1. Eisendraht mit Kupfermantel.
2. Stahldraht mit Kupfermantel.

c) Kupferdraht mit Eisenmantel.

Die Methode der elektrischen Messungen.

Für die beabsichtigten Untersuchungen war eine elektrische Meßmethode auszuwählen, die bei einfacher Handhabung gestattete, auch kleine Widerstände mit ausreichender Genauigkeit bei Hochfrequenz zu messen. Bekannte Methoden, Widerstandsgrößen für Hochfrequenzströme zu messen, sind die historische Bjerknessche Resonnanzkurvenmethode und das von Lindemann[1]) angegebene Verfahren. Die erstere erscheint auch in ihren Abänderungen von vornherein nicht zur Erreichung der nötigen Genauigkeit geeignet. Einfacher und bei einiger Vorsicht[2]) von weitergehender Genauigkeit ist das Lindemannsche Verfahren, das unmittelbar den Widerstand des Kreises ergibt.

Beide Methoden aber bringen Schwierigkeiten, wenn Widerstände von Leiterteilen bestimmt werden sollen, die für sich bei den in Frage kommenden Frequenzen kein schwingungsfähiges System bilden können. Diese müssen in einen größeren Meßkreis eingefügt werden, dessen Widerstand dann mit und ohne den unbekannten Leiter zu messen wäre. Aus der Differenz würde sich der gesuchte Widerstand ergeben. Daraus müssen aber bei Differenzen, die klein gegen die Gesamtwiderstände sind, erhebliche Fehler entstehen.

---

1) R. Lindemann, Jahrb. f. drahtl. Tel. 4. S. 561. 1911.

2) S. Löwe, Jahrb. f. drahtl. Tel. 6. S. 325, 451. 1912/13; 7. S. 365. 1913.

In bezug auf die allgemeine Meßgenauigkeit dem Lindemannschen Verfahren gleichwertig, wegen der Vermeidung der Differenzbildung aber günstiger muß daher ein Verfahren sein, das durch Ersatz des gesuchten Widerstandes durch einen bekannten nach Art der Substitutionsmethode für Gleichstrom zum Ziel kommt.

Dieser Weg ist von E. Schott[1]) in seiner Jenaer Dissertation eingeschlagen worden. Er mißt den gesuchten Widerstand durch Einsetzen eines kontinuierlich veränderlichen, auf dem Transformatorprinzip beruhenden Widerstandes, indem er mit dem Meßkreis induktiv einige kurzgeschlossene Drahtwindungen koppelt und durch Änderung der Koppelung scheinbar den Widerstand des Kreises ändert. Die Anordnung wird punktweise durch praktisch skineffektfreie und daher durch Gleichstrommessungen feststellbare Einzelwiderstände geeicht, doch ist die Eichung natürlich für jede benötigte Frequenz vorzunehmen. Es liegt nahe, die bei allen Frequenzen richtigen Einzelwiderstände unmittelbar zur Messung zu benutzen, und den jetzt allerdings nicht genau einzustellenden Wert aus den Ausschlägen des Meßinstrumentes bei zwei dem wahren Widerstand benachbarten Vergleichswiderständen zu interpolieren. Nach diesem Verfahren, das übrigens auch von Schott bereits gestreift wurde, wurden die vorliegenden Untersuchungen durchgeführt.

Die Apparatur besteht wie bei Bjerknes und Lindemann aus Erreger-, Meß- und Indikatorkreis. In den Meßkreis wird einmal der zu prüfende Leiter und dann ein gleichgeformter Kupferleiter, dessen Widerstand nach den bekannten Formeln leicht mit genügender Genauigkeit zu errechnen ist, unter Zusatz der erwähnten Widerstände eingefügt. Gelten dabei die Bezeichnungen: R_1 und R_2 für die zugefügten Widerstände, ΔR für den Unterschied zwischen den beiden Leitern, a_1, a_2 und a_Δ für die entsprechenden Ausschläge des Indikatorinstruments, so ergibt sich für einen quadratisch anzeigenden Indikator (Thermokreuz) nach Umformung der für die drei Messungen aus dem Ohmschen Gesetz im Resonnanzfall sich ergebenden Gleichungen:

---

1) E. Schott, Hochfrequenzverluste bei Gläsern und einigen anderen Dielektrizis. Jenaer Diss. 1921, auch Jahrb. der drahtl. Tel. 18. S. 82. 1921.

$$\text{(I)} \qquad \Delta R = R_1 + (R_2 - R_1)\frac{\sqrt{\frac{a_1}{a_\Delta}} - 1}{\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} - 1}.$$

Hierbei ist natürlich Proportionalität zwischen dem Stromquadrat und dem Instrumentenausschlag vorausgesetzt, doch sind aus einem etwaigen Mangel in dieser Beziehung wesentliche Fehler nicht zu erwarten. R_1 und R_2 sollen sich ja dem ΔR möglichst annähern, so daß es sich bei den drei erforderlichen Messungen um fast gleiche Ausschläge handelt. Darin liegt allerdings andererseits ein Mangel begründet, weil dadurch $\sqrt{a_1/a_\Delta}$ bzw. $\sqrt{a_1/a_2}$ fast 1 werden, so daß die Differenzen in Zähler und Nenner des Bruches des zweiten Gliedes klein werden gegen die ersten Glieder der Differenzen. Da aber das zweite Glied gegen R_1 überhaupt klein sein soll, wird daraus eine größere Fehlerquelle nicht entstehen können.

Als ein bequemes Hilfsmittel erweist sich bei Messungen der vorliegenden Art die Kompensationsschaltung von Lindeck und Rothe.[1]) Die an dem als Schwingungsanzeiger benutzten Thermokreuz erzeugte Spannung wird durch eine Gegenspannung kompensiert (Fig. 1). Diese wird an einem kleinen Widerstand eines Hilfsstromkreises erzeugt, in welchem ein Gleichstrom durch Vorschaltwiderstände passend eingestellt wird, bis das Galvanometer in der Ruhelage bleibt. Der Thermokraft proportional (und damit den in Gleichung (I) eingesetzten Galvanometerausschlägen) ist dann der Strom im Hilfskreis, und dieser wiederum bei geeigneter Auswahl der Widerstandsverhältnisse sehr angenähert umgekehrt proportional dem Vorschaltwiderstand a. Das heißt: Es wird aus Gleichung (I) bei entsprechender Bezeichnung:

$$\text{(I')} \qquad \Delta R = R_1 + (R_2 - R_1)\frac{\sqrt{\frac{a_\Delta}{a_1}} - 1}{\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} - 1}.$$

---

1) S. Lindeck u. R. Rothe, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 20. S. 293. 1900.

Die elektrische Meßeinrichtung (Fig. 1).

Erregerkreis.

Grundbedingung für die Messungen war zunächst weitgehende Konstanz des Erregerstromes wenigstens für die Dauer einer in drei Einzelmessungen zerfallenden Messung, d. h. also für etwa 3—5 Minuten, da die Messungen immer

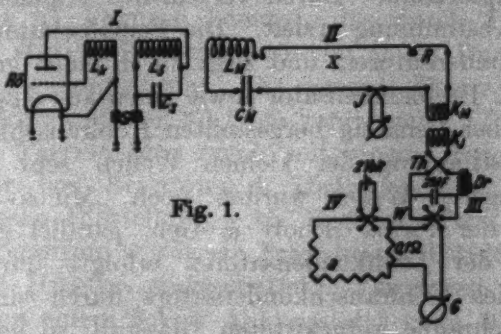


Fig. 1.

vor- und rückwärts ausgeführt wurden. Diese Konstanz wurde erst nach vielen Schwierigkeiten und Erfahrungen erreicht. Als Schwingungserzeuger wurde ein Röhrensender benutzt, an dem alle Verbindungen bis auf die Röhrensteckkontakte und die unbedingt häufiger zu lösenden Verbindungen die als gut amalgamierte Quecksilberkontakte ausgebildet wurden, sauber verlötet wurden. Dies trug sehr zur Konstanthaltung des Stromes bei. Da zunächst Senderöhren nicht zur Verfügung standen, wurden eingehende Versuche mit parallel geschalteten Verstärkerröhren gemacht. Es gelang dabei nicht, die nötige Konstanz zu erreichen. Daher wurden später ausschließlich RS 5-Senderöhren von Telefunken verwendet. Auch diese gaben jedoch nicht ohne Auswahl die erwünschte Konstanz. Es zeigte sich, daß anscheinend nur Röhren mit eingeschweißten Heizfäden brauchbar waren. Bei anderen ergaben sich offensichtlich bald Kontaktschwankungen an den Einklemmstellen des Heizfadens, denn es ließen sich mit dem Kompensationsapparat Spannungsschwankungen am Heizfaden feststellen, die sicher nicht auf Vorgänge außerhalb der Röhre zurückzuführen waren. Die Schwankungen waren jedoch im allgemeinen nicht sehr erheblich, und bewirkten nur infolge der empfindlichen Meßanordnung Störungen.

Meßkreis.

Dem Aufbau des Meßkreises war als wesentliches Prinzip die Erreichung geringer Dämpfung zugrunde gelegt, damit in dem zu untersuchenden Draht ein wesentlicher Teil des Widerstandes dieses Kreises lag. Die Spulen waren aus 5 mm starkem Rundkupfer oder etwa 15 mm breitem und 1 mm starkem Kupferband hergestellt, die Verbindungsleitungen aus gleichem Kupferband. Durch verschiedene Spulen L_M wurde eine grobe Abstimmung erzielt. Die Feinabstimmung erfolgte durch Luftkondensatoren, und zwar durch einen größeren und einen kleinen Drehkondensator sowie einen aus einem Funkenmikrometer behelfsmäßig hergestellten Kohlrauschkondensator, der die Abstimmung der kleinen Wellen sehr erleichterte. Für die längeren Wellen wurden noch „Minos-Glasplattenverdichter" der Firma Schott & Gen. parallel gelegt. Die Einstellung der Drehkondensatoren erfolgte durch Schnurläufe, die des Kohlrauschkondensators durch einen auf die Mikrometerschraube aufgekitteten Glasstab, so daß eine Annäherung des Körpers an die Meßanordnung während der Messung vermieden wurde. Der Strom wurde, soweit nötig, durch einen Hitzdraht mit aufgelötetem Thermoelement gemessen. Die Koppelung mit dem Indikatorkreis erfolgte durch zwei Drahtwindungen von 15 cm Durchmesser. Die untersuchten sowie die Vergleichsdrähte wurden in einer freien Länge von rund 84,5 cm verwendet. Diese war durch das zum Verkupfern benutzte Rohr bedingt und wurde für alle Drähte beibehalten. Die Drähte wurden auf Messingklötze ($4 \times 3 \times 0{,}6$ cm) aufgelötet und durch isoliertes Aufklemmen der Klötze auf eine Holzleiste gespannt. Das Verlöten erwies sich als einfachste, immer wieder in gleicher Güte herstellbare Verbindung. Von den Messingklötzchen führen kurze Kupferbügel in Quecksilbernäpfe, und außerdem waren auf ihnen noch „Potentialklemmen" für die Gleichstrom-Widerstandsmessung mit dem Kompensationsapparat angebracht. Die Zusatzwiderstände bzw. ein Kurzschlußbügel wurden in der von E. Schott[1]) angegebenen Form ebenfalls in Quecksilbernäpfe eingelegt. Der gesamte Meßkreis war in länglicher Form in Paraffinklötzen auf einem Tisch befestigt. Hin- und Rückleitung waren etwa 30 cm voneinander entfernt. Die montierten

1) E. Schott, a. a. O.

Drähte wurden nacheinander unmittelbar in die Endnäpfe eingelegt. Mit dem für die Untersuchung der metallischen Mäntel als Vergleichsdraht benutzten 0,2 cm starken Kupferdraht und Kurzschlußbügeln an Stelle von R und I ergab der Meßkreis ein Dekrement von 0,009 für $\lambda = 500$ m.

Indikatorkreis.

Als Schwingungsanzeiger wurde ein hochempfindliches Thermokreuz im Vakuum benutzt, das durch 3 Windungen eines 0,2 cm starken Kupferdrahtes von 15 cm Durchmesser an den Meßkreis gekoppelt war. Die erzeugte Thermokraft wurde an einem Widerstand von 0,1 Ohm kompensiert. Das möglichst wenig träge Thermokreuz ergab mit einem Drehspul-Spiegelgalvanometer von Siemens & Halske (Schwingungsdauer 2,5 Sek.) rasche Einstellung. Als Regulierwiderstand für den Kompensationsstrom wurde ein Präzisionskurbelwiderstand von Siemens & Halske eingeschaltet. Durchweg mußten zur Kompensation einem 2 Volt-Akkumulator etwa 500 Ohm vorgeschaltet werden. Die genaue Abgleichung wurde dadurch geprüft, daß durch eine Doppelwippe der Kompensationsstrom und die Thermokraft gleichzeitig umgepolt wurden. Da die Raumverhältnisse ziemlich lange Galvanometerzuleitungen bedingten, traten bei den kürzeren Wellen Störungen durch vom Sender auf die Zuleitungen bewirkte Induktion ein. Diese wurde in bekannter Weise durch Vorschaltdrossel und Parallelkondensator von Thermokreuz ferngehalten. Die Koppelung zwischen Meßkreis und Indikatorkreis konnte durch Verschieben der Indikatorspule in weiten Grenzen geregelt werden und wurde auf annähernd gleichbleibende Thermokraft eingestellt.

Die Vergleichswiderstände.

Über bei Hochfrequenzmessungen anzuwendende hautwirkungsfreie Widerstände hat E. Schott in seiner bereits zitierten Arbeit eingehende Betrachtungen angestellt. Für die vorliegenden Untersuchungen wurde ein Satz konstanter Einzelwiderstände nach Art der von Schott zur Eichung seines kontinuierlich veränderlichen Widerstandes benutzten angefertigt. Die Bügel wurden mit einem Feußnerschen Kompensationsapparat bei Gleichstrom gemessen, so daß die Widerstandszunahme gegenüber einem Kurzschlußbügel genau bekannt war. Zur Kontrolle wurden die Widerstände unter

sich mit Hochfrequenzstrom verglichen. Es wurde dadurch die ausreichende Genauigkeit der Gleichstrommessung bestätigt.

Eine bedauerliche Einschränkung der Messungen wird durch die geringe Belastbarkeit der dünndrähtigen Widerstände nötig. Sie verhindert vor allem die bei ferromagnetischem Material interessanten Messungen mit erheblich verschiedener Stromstärke, da diese auch nach unten hin durch die Meßgenauigkeit bald begrenzt wird.

Das Galvanisieren.

Elektroden und Rührvorrichtungen (Figg. 2 u. 3).

Hier war die Aufgabe, die zu prüfenden Drähte in gestreckter Form mit einer sehr gleichmäßigen Metallschicht zu bedecken. Gestreckt sollten die Drähte bleiben, damit nicht vor dem Einbringen in den Meßkreis eine Behandlung durch Biegung oder dergl. nötig wurde, die möglicherweise die Beschaffenheit des Niederschlages beeinflussen konnte. Die Technik bietet eine große Zahl von Rezepten für die Bäder, doch waren diese nicht ohne Auswahl und noch weniger die Arbeitsmethoden ohne weiteres brauchbar. Am einfachsten schien die Aufgabe zu lösen, wenn der Draht zentral durch ein Metallrohr gespannt wurde, das gleichzeitig als Anode und als Badbehälter diente. Das Rohr wurde unten durch eine Kappe mit Schlauchansatz, beide aus dem Anodenmetall, verschlossen. Innen war an der Kappe zentral und isoliert eine kleine Klemme zur Befestigung des zu behandelnden Drahtes angebracht. Oben wurde auf das Rohr eine Kappe aus Fiber aufgeschoben, durch die mit guter Führung eine Messingstange mit Klemmschraube zur Befestigung des oberen Drahtendes zentral durchgeführt werden konnte. Der Draht wurde nach der Vorbehandlung (vgl. unten)

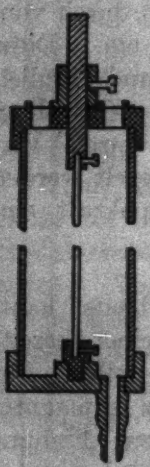


Fig. 2.

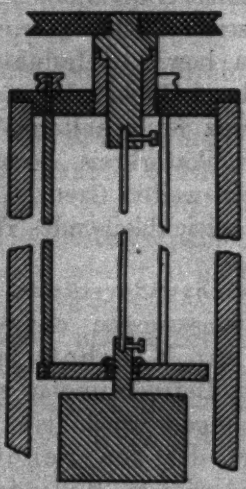


Fig. 3.

in den Klemmen befestigt und in das Rohr eingeführt, bis die untere Kappe fest aufsaß. Dann wurde über die herausragende Messingstange die obere Kappe bis auf das Rohr geschoben und die Stange nach leichtem Anspannen des Drahtes mit einer seitlichen Schraube in der Führung festgeklemmt. Die untere Kappe wurde mit sogenanntem „Bergmannkitt" abgedichtet. Dieser wurde im Gegensatz zu Siegellack von den zum Teil laugenhaltigen Bädern nicht angegriffen. Es mußte großer Wert auf zentrale Führung des Drahtes durch das Rohr gelegt werden, da bei den geringen, durch das Rohrmaterial bedingten Elektrodenabständen schon kleine Abweichungen von der genau zentralen Lage erhebliche Unterschiede in der Stromdichte bringen mußten, und von dieser hängt bekanntlich die Niederschlagsmenge an der betreffenden Stelle ab.

Einige Schwierigkeiten bot auch das Rühren des Bades. Bei längerer Dauer des Prozesses besteht die Gefahr, daß durch Bildung verschieden stark konzentrierter Schichten des Elektrolyten sich wieder Stromdichtenunterschiede einstellen. Daher ist häufiges, am besten dauerndes Rühren des Bades geboten. Einblasen von Luft von unten her war nicht tunlich, weil dadurch — wenigstens beim Verkupfern — offensichtlich der Niederschlag beeinflußt wurde. Ebensowenig war Kohlensäure anwendbar. Die Wirkung einer rasch umlaufenden Rührschraube drang in dem etwa 1 m langen Rohr nicht bis unten durch. Auch konnte ein genügend langer Rührstab nicht eingeführt werden, weil dadurch teilweise die Kathode gegen die Anode abgedeckt worden wäre. Wenn die Stromlinien sich auch stark um solche Hindernisse herumbeugen, so bestand doch bei dem geringen Elektrodenabstand die Möglichkeit einer Ungleichmäßigkeit des Niederschlages. Als einwandfrei erwies sich schließlich ein Durchpumpen des Elektrolyten durch das Rohr vermittelst einer kleinen Kolbensaugpumpe. Diese wurde durch einen Schlauch an den Ansatz der unteren Kappe gelegt und das geförderte Bad durch eine Bohrung in der oberen Kappe zurückgeleitet. Eine zweite Bohrung diente der Kontrolle des Badstandes im Rohr. Die Pumpe wurde durch einen Elektromotor mit geeignetem Vorgelege zur Verminderung der Umdrehungszahl betrieben, so daß sie in der Minute etwa 60 Hübe machte.

Während das Verkupfern in verschiedenen Bädern mit

dieser Einrichtung gut gelang, versagte sie bei den Eisen- und Zinkniederschlägen. Es ist möglich, daß hier kein geeignetes Rohrmaterial für die Anoden zur Verfügung stand. Da es schwierig war, Rohre von verschiedener Materialbeschaffenheit in den geeigneten Dimensionen zu erhalten, wurde eine andere Einrichtung getroffen, die das Anodenmetall in der leichter zu beschaffenden Stabform enthielt. Drei etwa 90 cm lange Stäbe des betreffenden Metalles wurden einerseits in eine runde Platte aus gleichem Metall geschraubt und andererseits durch den aus Isoliermaterial hergestellten Deckel eines als Badbehälter dienenden etwa 100 cm hohen Glaszylinders von 5 cm lichter Weite geführt und durch Muttern gehalten. Durch den Deckel war in einer Messingbuchse eine ebenfalls aus Messing gefertigte Achse geführt, die oben eine Scheibe für einen Schnurlauf trug und unten eine zentrale Bohrung mit seitlicher Klemmschraube zur Befestigung des zu galvanisierenden Drahtes hatte. Unten wurde an den Draht ein etwa 1 kg schweres zylindrisches Gewicht aus Zink von 4 cm Durchmesser gehängt, das mit einem 0,5 cm starken Hals zentral durch die untere Platte des Anodengestells ragte und oberhalb dieser mit einer Klemmschraube an dem Draht befestigt wurde. Der Hals wurde von der Platte durch eine Bernsteinbuchse isoliert, in der er sich so leicht drehte, daß eine Verdrillung des Drahtes nicht eintrat, wenn das gesamte Kathodensystem durch einen Schnurlauf in langsame Rotation versetzt wurde. Durch das Gewicht wurde ein Schleudern des in gut gestrecktem Zustande in das Bad gebrachten Drahtes bei der Drehung verhindert, so daß der gleichmäßige Anodenabstand gewahrt blieb. Der Strom wurde der Anode an den oberen Stabenden zugeführt und an der oberen Achse des Kathodensystems durch eine Schleiffeder abgenommen. Zu beachten war noch, daß der Hals des Gewichtes so lang sein mußte, daß das untere Ende des Drahtes weiter von der Anodenplatte als von den Anodenstäben entfernt war, damit hier nicht durch geringeren Elektrodenabstand nach der Platte zu größere Stromdichte eintrat.

Mit dieser Vorrichtung wurden einwandfreie, wiederholt verstärkte Eisenniederschläge erzeugt. Die Zinkniederschläge blieben stark körnig und ungleichmäßig. Infolge Zeitmangels mußten die Versuche, durch Änderung der Bäder oder des

Anodenmaterials bessere Ergebnisse zu erzielen, leider aufgegeben werden.

Dekapierung.

Besonders wichtig ist beim Galvanisieren bekanntlich die sorgfältige Reinigung (Dekapierung) der Kathoden. Die Drähte wurden zunächst mit Äther oder Alkohol sauber entfettet. Eine Probe für den Erfolg dieser Behandlung ist die augenblickliche gleichmäßige Benetzung durch Wasser ohne Inselbildung. Dann wurden die Drähte mit feinstem Schmirgel und einem Brei aus Wiener Kalk metallblank gemacht, abgespült und mit Fließpapier sorgfältig getrocknet. Unter Vermeidung jeder Berührung mit ungeschützten Fingern wurden die erforderlichen Wägungen vorgenommen, die Drähte nochmals leicht mit Kalk abgerieben und nach gutem Abspülen schnell in das Bad gebracht. Fehlgalvanisierungen durch mangelhafte Dekapierung waren auf diese Weise nicht zu verzeichnen.

Die Anoden müssen selbstverständlich ebenfalls gut sauber sein. Dies wurde durch Entfetten, Beizen mit geeigneter Säure und Scheuern mit Schmirgel leicht erreicht.

Bäder.

Es wurden Versuche mit einer ganzen Reihe von Bädern gemacht. Gute Niederschläge aus einfachen Salzlösungen zu gewinnen, gelingt kaum. Die Metalle werden in festhaftender, dichter Form durchweg nur durch sekundäre Prozesse aus komplexen Salzen gewonnen. Die Zusammensetzung des Bades übt einen großen Einfluß auf Farbe und Korn des Niederschlages aus. Auch ergaben sich Anhaltspunkte für eine Einwirkung auf die Leitfähigkeit, die aber angesichts der für solche Erwägungen zu großen Unsicherheiten der Untersuchungsmethode bestimmte Schlüsse nicht zulassen. Die in den Bädern verwendeten Chemikalien waren von üblicher Reinheit. Es wurden folgende Zusammensetzungen verwandt:

Kupferbäder.

a) Alkalisches Kupferbad nach Weil.[1]) Zu 1 Liter Bad sind erforderlich: 35 g krist. Kupfersulfat, 150 g Seignettesalz (Kalium-Natriumtartrat), 80 g Ätznatron. Ätznatron und

1) Muspratts Handbuch d. Chemie, Artikel „Kupfer".

Seignettesalz werden für sich gelöst und zur Kupfersulfatlösung gegossen. Es entsteht eine Flüssigkeit von lebhaft indigoblauer Farbe, die stark ätzend wirkt. Die etwa davon benetzten Hände schützt man durch Abspülen mit leichter Säure. Bei einer Stromdichte von 0,2 Amp/dcm² ergaben sich gute Niederschläge, doch wurde das Bad — wahrscheinlich durch Einwirkung der atmosphärischen Kohlensäure — rasch unzuverlässig. Daher wurde später neben einem sauren Kupferbad ausschließlich ein cyankalisches verwendet, das bei einiger Vorsicht, vor allem beim Ansetzen, durchaus nicht unangenehm in der Handhabung ist. Übrigens wurde anfänglich ein vom Glaswerk Schott & Gen. gütigst überlassenes Bad von einer dem Weilschen Bad ähnlichen Zusammensetzung benutzt.

b) Cyankalisches Kupferbad.[1]) Zu 1 Liter Bad sind erforderlich: 20 g Kupferacetat, 25 g neutrales schwefligsaures Natron, 17 g kristallierte Soda, 20 g Cyankalium von 98 bis 100 Proz. Gehalt an Cyankalium. Das essigsaure Kupfer wird in 0,5 Liter, das schwefligsaure und kohlensaure Natron in 0,25 Liter und das Cyankalium in 0,1 Liter Wasser gelöst. Die Natronlösung wird zur Kupferlösung gegossen, wodurch sich ein dicker grüner Niederschlag bildet. Dieser löst sich nach Hinzufügen des Cyankaliums völlig, und es entsteht ein klares, farbloses oder leicht gelbliches Bad, das auf 1 Liter aufzufüllen ist. Eine bläuliche Färbung deutet auf zu geringen Gehalt an Cyankalium und entsteht oft während des Gebrauchs. Sie ist durch vorsichtigen Zusatz von Cyankalium aufzuheben. Das Bad gibt bei einer Stromdichte von 0,3 Amp/dcm² festhaftende, matt hellrote Niederschläge und darf keine wesentliche Gasbildung zeigen. Diese ist meist auf zu großen Überschuß an Cyankali zurückzuführen, der durch Kupfercyanür abgesättigt wird. Bei Innehaltung der angegebenen Mischungsfolge ist keine Entwicklung von Blausäure zu befürchten, doch ist natürlich ein Ansetzen des Bades unter dem Abzug oder im Freien zu empfehlen.

c) Saures Kupferbad.[2]) Zu 1 Liter Bad sind erforderlich: 200 g kristalliertes Kupfersulfat, 30 g konzentrierte

1) H. Steinach u. G. Buchner, Die galvanischen Metallniederschläge. Verlag von M. Krayn, Berlin.

2) H. Steinach u. G. Buchner, a. a. O.

Schwefelsäure. Bei einer Stromdichte von 0,5 Amp./dcm² ergibt sich ein tadelloser, matter Niederschlag von heller, fleischroter Farbe. Er hat dichtes Korn und zeigt nach leichtem Abreiben mit Wiener Kalk die bekannte schöne Kupferfarbe. Es können ohne Schaden auch größere Stromdichten angewendet werden. Das Bad ist wegen der sofort eintretenden sogenannten Kontaktverkupferung nicht brauchbar zur Galvanisierung von Eisen. Der Kontaktniederschlag blättert nämlich schon bei dünnen Schichten ab. Daher wurden die Eisendrähte zunächst im cyankalischen Bad gedeckt und dann im schneller arbeitenden und leichter zu behandelnden sauren Bad weiter verkupfert.

Eisenbad.

Neben den bekannten, aus Eisensulfat und Salmiak in verschiedenem Mengenverhältnis zusammengesetzten Bädern gab das nachstehend aufgeführte und für die Untersuchungen benutzte Bad die besten Niederschläge.[1]) Zu 1 Liter Bad sind erforderlich: 125 g reines kristalliertes Eisensulfat (oxydul), 140 g Magnesiumsulfat. Stromdichte 0,05 Amp./dcm². Das Bad darf blaues Lackmuspapier höchstens schwach violett färben. Bei zu starkem Säuregehalt, der im Gebrauch eintritt, ist mit kohlensaurer Magnesia zu neutralisieren. Diese kann ohne Schaden im Überschuß vorhanden sein. Mit dem Bad wurden gute, taubengraue Niederschläge von feinem Korn und schönem, atlasartigen Glanz erzielt. Die befürchtete schnelle Oxydation trat nicht ein. Es scheint die Wirkung der Eisenbäder sehr von den Anoden abzuhängen. Bei den vorliegenden Untersuchungen wurde sogenanntes Schraubenweicheisen in Stabform benutzt. Ein gezogenes Eisenrohr gab in der anderen geschilderten Anordnung keine befriedigenden Ergebnisse.

Zinkbad.

Bei den im Kleinen ausgeführten Vorversuchen ergab das unten angeführte Bad gute, einfache Überzüge. Wiederholte Niederschläge gelangen jedoch mit beiden geschilderten Vorrichtungen nicht. Zu 1 Liter Bad sind erforderlich[2]): 150 g Zinksulfat, 50 g Ammoniumsulfat, 10 g Borsäure. Strom-

1) H. Steinach u. G. Buchner, a. a. O.

2) W. Pfanhauser, Die elektrolytischen Metallniederschläge. Verlag von Springer, Berlin.

dichte 0,5—1 Amp/dcm². Das Bad muß ohne großen Säureüberschuß stets sauer reagieren.

Bestimmung der Mantelstärke.

Bei den in Frage kommenden dünnen Schichten reichte natürlich die Genauigkeit der einfachen mechanischen Meßinstrumente wie Mikrometerschraube usw. nicht aus. Auch führten optische Messungen nicht zum Ziel. Als bestes Hilfsmittel erwies sich die Wage. Die Stärke des Drahtes wurde aus Länge, Gewicht und spez. Gewicht bestimmt. Das spez. Gewicht wurde aus Proben, die verschiedenen Stellen des Drahtmaterials entnommen waren, mit dem Pyknometer festgestellt. Es ergab sich dabei gute Übereinstimmung, so daß mit ausreichender Homogenität des Drahtmaterials gerechnet werden kann. Bei der Bestimmung der Mantelstärke liegt nahe, die ausgeschiedenen Metallmengen einfach nach dem Faradayschen Gesetz zu berechnen. Hierzu ist jedoch zu bemerken, daß bei den zusammengesetzten Bädern nicht allein das Metall, sondern häufig auch geringe Gasmengen an der Kathode abgeschieden werden. Die Stromausbeute ist in bezug auf das Metall nicht 100 Proz. Überdies war es nötig, die beim wiederholten Galvanisieren durch die stets erforderliche Reinigung des Drahtes entstehenden Verluste an Mantelmetall zu bestimmen.

Die Wägung der etwa 85 cm langen Drähte in gestrecktem Zustande wurde folgendermaßen ausgeführt: An einer empfindlichen Wage wurde die durch die Grundplatte des Gehäuses hindurchgeführte Schalenarretierung der einen Seite abgenommen. An der Schale wurde eine durch das freigewordene Loch hindurchreichende Klemme aufgehängt, in der der zu wiegende Draht befestigt wurde und so frei unter der auf einem Tisch und einem festen Stativ aufgestellten Wage herabhing. Die Balken- und Endschneidenarretierung wurde durch die Änderung nicht berührt.

Theoretisches.

Die Formel von J. M. Miller.[1])

Zur Theorie der untersuchten Widerstände soll nur kurz die in der Einleitung erwähnte Formel von J. M. Miller betrachtet werden, die zwar, wie sich später zeigen wird, den

1) Vgl. die Fußnote zur Einleitung.

vorliegenden Verhältnissen nicht genau entspricht, aber doch zu weiteren Schlüssen Anlaß gibt.

Miller faßt Seele und Mantel als zwei parallelgeschaltete Leiter auf. Für die Seele wird konstante Permeabilität (Anfangspermeabilität), für den Mantel die Permeabilität 1 angenommen. Bei Berechnung von Widerstand und Selbstinduktion der Seele wird die Hautwirkung in Betracht gezogen, für den *dünnen* Mantel wird sie als klein nicht in Ansatz gebracht. Die Rechnung wird für einen aus Seele und Mantel zusammengesetzt gedachten Kupferdraht durchgeführt und ergibt für den Widerstand bei 5000 Perioden einen Fehler von $-1{,}1$ Proz. gegenüber der unmittelbaren Rechnung (Radius der gedachten Seele 0,2231 cm, äußerer Radius 0,2607 cm). Den Fehler schiebt Miller der nicht berücksichtigten Hautwirkung im Mantel zu. Für hohe Frequenzen ist ein Versagen der Formel für gutleitende Mäntel schon bei sehr geringer Mantelstärke zu erwarten, während z. B. für Elektrolyte die Vernachlässigung der ungleichen Stromverteilung über den Mantelquerschnitt noch zulässig erscheint.

Die magnetischen Felder von Seele und Mantel werden getrennt betrachtet, so daß sich die gesamte innere Induktion eines bimetallischen Drahtes in folgende Teile zerlegen läßt:

Induktionswirkung	a) des vom Seelenstrom verursachten Flusses in der Seele	auf die Seele,
	b) des vom Seelenstrom verursachten Flusses im Mantel	
	c) des vom Mantelstrom verursachten Flusses im Mantel	
	d) des vom Mantelstrom verursachten Flusses im Mantel	auf den Mantel.
	e) des vom Seelenstrom verursachten Flusses im Mantel	

Die einzelnen Wirkungen lassen sich als Selbst- und gegenseitige Induktion bezeichnen:

$a + b = L_1' + L_1'' = L_1$ = Selbstinduktion der Seele.

$c = M_{21}$ Gegenseitige Induktion des Mantels auf die Seele.

$d = L_2$ = Selbstinduktion des Mantels.

$e = M_{21}$ = Gegenseitige Induktion der Seele auf den Mantel.

Weiter soll sein:

r_1 = Radius der Seele, r_2 = äußerer Radius des Mantels,
μ = Permeabilität der Seele, l = Permeabilität des Mantels.

Dann wird nach bekannten Formeln:

$$L_1 = \frac{\mu}{2} + 2\,\mathrm{Log}\,\frac{r_2}{r_1}; \quad M_{12} = M_{21} = 1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\,\mathrm{Log}\,\frac{r_2}{r_1},$$

$$L_2 = \frac{1}{2} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\,\mathrm{Log}\,\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Diese Ausdrücke gelten für gleichförmige Stromverteilung über die Leiterquerschnitte, d. h. also für die Frequenz 0. Da bei höherer Frequenz eine Hautwirkung nur für die Seele angenommen wird, ändern sich nur R_1 und L_1' mit der Frequenz. Sie sind nach den Rayleighschen Formeln leicht zu berechnen. Besonders erleichtert wird diese Rechnung durch die von Zenneck[1]) gezeichneten Kurven.

Aus der Annahme der parallelgeschalteten Leiter ergibt sich dann schließlich Widerstand und Selbstinduktion als:

$$R = \frac{[R_1 R_2 - \omega^2(L_1 L_2 - M^2)](R_1 + R_2) + \omega^2(R_1 L_2 + R_2 L_1)(L_1 + L_2 - 2M)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2(L_1 + L_2 - 2M)^2},$$

$$L = \frac{(R_1 L_2 + R_2 L_1)(R_1 + R_2) - [R_1 R_2 - \omega^2(L_1 L_2 - M^2)](L_1 + L_2 - 2M)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2(L_1 + L_2 - 2M)^2}.$$

Ergebnisse.

Die Ergebnisse der Untersuchungen sind in den beigefügten Tabellen und Kurven zusammengefaßt. Sie sind natürlich beeinflußt von verschiedenen der gerade bei Hochfrequenzmessungen so zahlreichen Fehlerquellen. So werden Frequenz- und Intensitätsschwankungen trotz größter Sorgfalt des Aufbaues nicht ganz zu vermeiden gewesen sein, wenn sie auch in keiner Weise merklich in Erscheinung getreten sind. Als viel störender sind jedenfalls die Fehler in der Bestimmung der Mantelstärke sowie die Einflüsse von Temperaturschwankungen anzusprechen. Erstere müssen eine notwendige Folge der vielfachen Behandlung der Drähte sein, letztere sind wegen der Unzulässigkeit von Bädern nicht zu unterdrücken und auch nicht genau zu definieren.

---

1) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 11. S. 1135. 1903.

Bei den Versuchen mit metallischen Mänteln stellt sich noch ein unvermeidbarer Mangel dadurch ein, daß durch das Aufbringen der Metallschichten allmählich die Bedingungen für die Hautwirkungen durch die zunehmende Stärke des Drahtes andere werden. Störungen des Gesamtbildes sind jedoch hierdurch nicht zu erwarten, da diese Verstärkung im Höchstfalle nur bis auf rund 7 Proz. des ursprünglichen Durchmessers ansteigt.

Als Vergleichsdraht wurde in jedem Falle ein der Seele des Manteldrahtes in den Dimensionen möglichst gleicher Kupferdraht genommen. Der Widerstand dieses Drahtes bei den verschiedenen Frequenzen wurde aus dem Gleichstromwert berechnet und mit den gemessenen Widerstandsdifferenzen zum Gesamtwiderstand kombiniert. Durch die Rechnung werden in das Ergebnis keine Fehler hineingebracht werden, die aus dem Rahmen der Gesamtgenauigkeit fallen. Die Durchmesser der verschiedenen Träger der Metallmäntel stimmte nur in dem bei technischen Drähten üblichen Maße miteinander überein. Es war nicht möglich, mit den vorhandenen Mitteln bessere Übereinstimmung zu erzielen. Zudem dürfte aber auch die Annäherung an den beabsichtigten Wert $2r = 0{,}2$ cm für den Vergleich der verschiedenen Meßreihen ausreichen. Die angegebenen Gleichstrom-Widerstandswerte für die Mäntel sind aus den Dimensionen und spezifischen Widerständen berechnet.

Insgesamt ist zu den angedeuteten Fehlerquellen zu bemerken, daß sie verhinderten, die von der Meßmethode an sich zu erwartende Genauigkeit voll auszunutzen. Es kann aber auch der einzelnen Messung angesichts der Gesamtaufgabe nur eine untergeordnete Bedeutung zukommen, und das Gesamtbild erscheint durch die Fehler nicht gestört.

Drähte mit elektrolytischen Mänteln.
(Tab. I und Fig. 4.)

Diese Untersuchungen haben nicht nur rein physikalische Bedeutung, denn elektrolytische oder andere Schichten geringer Leitfähigkeit, wie z. B. Oxyde, Ruß usw., werden sich häufig im Freien auf von Hochfrequenz durchströmten Leitern bilden. Für die vorliegenden Untersuchungen wurden Kupferdrähte, die zentral durch Glasröhren von verschiedener Weite

Tabelle I.

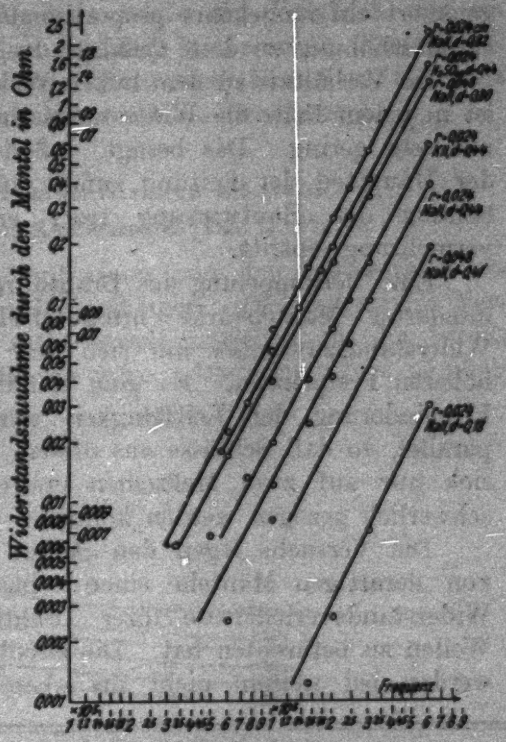
Kupferdrähte mit elektrolytischen Mänteln.
Vergleichsdraht: Kupferdraht von gleichen Dimensionen.
Wechselstromwiderstände: in Ohm pro m.

Wellenlänge	50	100	150	200	300	500	900
Drahtradius							
$r = 0{,}024$	0,418	0,304	0,252	0,222	0,185	0,147	0,115
$r = 0{,}025$	0,411	0,297	0,247	0,216	0,180	0,144	0,112
$r = 0{,}048$	0,203	0,146	0,1196	—	0,0863	0,0684	0,0524
Ergebnisse: (Widerstände in Ohm pro m)							
Gleichstromwiderstand des Drahtes	0,0835	0,0835	0,0885	0,0885	0,0885	0,0221	0,0221
Drahtradius cm	0,025	0,025	0,024	0,024	0,024	0,048	0,048
Mantelstärke cm	0,44	0,44	0,82	0,44	0,18	0,41	0,80
Gleichstromwiderstand des Mantels	197,5	540	207	670	3590	753	214
Elektrolyt	30 proz. H_2SO_4	20 proz. KCl	NaCl konz.	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
Leitfähigkeit	0,764	0,275	0,216	0,225	0,225	0,202	0,206
ΔR pro m:							
$\lambda =$ 50 m	1,547	0,616	2,284	0,385	0,030	0,188	1,262
100	0,421	0,158	0,575	0,103	0,007	0,041	0,333
125	0,269	0,102	0,367	0,062	—	—	—
150	0,191	0,073	0,263	0,042	0,0026	0,019	0,157
200	—	0,041	0,151	0,025	0,001	—	—
300	0,057	0,020	0,072	0,012	0,000	0,008	0,040
400	0,032	0,013	—	—	—	—	—
500	—	—	0,023	0,0025	—	—	0,017
530	0,018	—	—	—	—	—	—
600	—	0,007	—	—	—	—	—
900	—	—	0,006	0,000	—	—	0,006

geführt waren, mit Elektrolyten umgeben. Es wurden verhältnismäßig dünne Drähte untersucht, weil diese sich am besten einspannen ließen. Der innere Durchmesser der Glasröhren war trotz besonderer Auswahl ziemlich ungleichmäßig, so daß im Verhältnis dazu für die Messung des Drahtdurchmessers die Mikrometerschraube genügte. Die lichte Röhrenweite wurde durch Wasserfüllung bestimmt. Die Temperatur des Elektrolyten wurde durch Einführen eines Thermometer in den seitlich an das Rohr angeblasenen Füllansatz geprüft und bei Feststellung der Leitfähigkeit in Rechnung gesetzt.

Die Elektrolyte wurden durch Wägung bzw. Sättigung aus den betreffenden Säuren und Salzen hergestellt.[1]) Diese waren von üblicher Reinheit.

Die Versuche zeigen, daß bei kurzen Wellen und gutleitenden Elektrolyten in starker Schicht recht beträchtliche Widerstandserhöhungen durch den Mantel auftreten, die z. B. bei $\lambda = 50$ m durch einen 0,82 cm starken Mantel von konzentrierter Kochsalzlösung um 0,48 cm starken Kupferdraht auf 546 Proz. des ursprünglichen Drahtwiderstandes anstiegen. Dieselbe Lösung erzeugte auf demselben Draht bei gleicher Welle, jedoch als 0,44 cm starker Mantel 92 Proz. und als 0,18 cm starker Mantel 7,2 Proz. Widerstandszuwachs. Hierbei war die Leitfähigkeit des ersten Mantels infolge von Temperaturänderung noch um rund 4 Proz. kleiner als bei den anderen. Die Erhöhung fällt also rasch mit der Mantelstärke. Ebenso nimmt sie mit der Leitfähigkeit stark ab. Bei 0,44 cm Mantel auf 0,048 cm starkem Draht zeigte sich eine Erhöhung des Drahtwiderstandes um 370 Proz. in 30 proz. Schwefelsäure, um 147 Proz. in 20 prozentiger Kaliumchloridlösung und um 92 Proz. in konzentrierter Kochsalzlösung. Die entsprechenden Leitfähigkeiten waren dabei 0,764, 0,275 und 0,225. Es wurde wegen der wenigen für jeden Fall gemessenen Punkte



Kupferdrähte mit elektrolyt. Mantel.

Fig. 4.

1) Kohlrausch-Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte.

darauf verzichtet, Kurven der Abhängigkeit des Widerstandes von der Mantelstärke oder Leitfähigkeit aufzustellen. In bezug auf die Wellenlänge zeigen die beigefügten Kurven sehr angenähert ein umgekehrt proportionales Verhältnis der Widerstandserhöhung zu dem Quadrat der Wellenlänge (Fig. 4).

Im Verhältnis zu dem hohen Widerstand des Elektrolyten ist in jedem Falle die Widerstandserhöhung durch den Mantel nur sehr gering. Das besagt, daß dem Draht nach wie vor der Hauptteil der Leitung zufällt und nur eine geringe Erhöhung der Hautwirkung trotz erheblicher Querschnittsvermehrung eintritt.

Eine Verdoppelung des Drahtdurchmessers bei wenig verminderter Mantelstärke bringt bedeutende Abnahme des Widerstandszuwachses mit sich und zwar besonders bei den höheren Frequenzen. Es ging damit jedoch eine erhebliche Verminderung der Leitfähigkeit durch Temperaturabnahme parallel, so daß Schlüsse aus diesem Verhalten angesichts der sich nur auf zwei Meßreihen erstreckenden Beobachtungen schwerlich gezogen werden können.

Die Versuche legen den Schluß nahe, daß die Technik von derartigen Mänteln einen schädlichen Einfluß auf die Widerstandsverhältnisse ihrer Drähte nur bei sehr kurzen Wellen zu befürchten hat. Die zufällig sich bildenden Mäntel werden bei weitem nicht die oben in Betracht gezogenen

Erläuterung zu Mantel und Draht	$\lambda = 50$ m		$\lambda = 100$ m		$\lambda = 150$ m		$\lambda = 300$ m	
	R ber.	R gem.	R ber.	R gem.	R ber.	R gem.	R ber.	R gem.
Mantel: NaCl; Ltf. 0,216; $r_2 = 0{,}844$ cm Draht: Cu; $r_1 = 0{,}024$; $R = 00885$ Ohm/m	3,038	2,702	0,977	0,879	0,532	0,515	0,263	0,257
Mantel: NaCl, Ltf. 0,225; $r_2 = 0{,}46$ cm Draht: wie oben	0,952	0,803	0,440	0,407	0,328	0,294	0,201	0,197
Mantel: NaCl; Ltf. 0,225; $r_2 = 0{,}200$ cm Draht: wie oben	0,465	0,448	0,316	0,319	0,260	0,255	0,187	0,185
Mantel: H_2SO_4; Ltf. 0,764; $r_2 = 0{,}46$ cm Draht: Cu; $r_1 = 0{,}025$ cm; $R = 0{,}0835$ Ohm/m	2,149	1,958	0,743	0,718	0,448	0,438	0,232	0,237

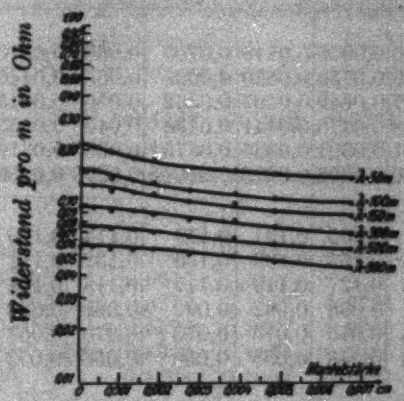
günstigen Leitfähigkeiten erreichen. Auch werden sie nur selten und dann nur bei sehr geringer Leitfähigkeit (Eis, Rauhreif) erhebliche Stärke haben.

Ein auffallendes Ergebnis zeigte ein Vergleich der gemessenen Werte mit den aus der Millerschen Formel berechneten. Die gemessenen Werte sind besonders bei ganz kurzen Wellen erheblich kleiner als die berechneten.

Drähte mit metallischen Mänteln.

Messingdraht mit Kupfermantel (Tab. II, Fig. 5).

Das Kupfer wurde auf einen von den Zeisswerken bezogenen Messingdraht niedergeschlagen. Die stufenweise Verstärkung wurde jedoch nicht soweit getrieben, bis der Strom lediglich im Kupfer geflossen wäre. Dadurch würde nämlich



Verkupferter Messingdraht $r = 0{,}1004$ cm. Fig. 5.

der Gesamtdurchmesser des bemantelten Drahtes so stark zugenommen haben, daß die Bedingungen für die Hautwirkung gegenüber dem Anfangszustand merklich andere geworden wären.

Die Tabelle und Kurven zeigen, wie das Kupfer mit zunehmender Manteldicke die Leitung übernimmt, und zwar natürlich um so schneller, je höher die Frequenz ist. Die Punkte für 0,0007 cm Mantelstärke fallen merklich unter den Kurvenverlauf. Es muß bei ihnen ein nicht zu ermittelnder

Tabelle II.

Verkupferter Messingdraht.

Versuchsdraht: $r = 0{,}1004$ cm, Gleichstromwiderstand: 0,0239 Ohm/m.
Vergleichsdraht: Kupferdraht, $r = 0{,}1025$ cm, Gleichstromwiderstand: 0,00568 Ohm/m.

Wellenlänge	50	100	150	300	500	900	1800
Wechselstrom-widerstand Ohm/m	0,109	0,076	0,062	0,048	0,036	0,027	0,0191

Ergebnisse.

Bad	Seignettesalzbad								
Mantelstärke cm	0	0,0003	0,0007	0,0013	0,0018	0,0077	0,0038	0,0048	0,0067
Gleichstrom-widerstand des Mantels Ohm/m	—	0,8966	0,3884	0,2069	0,1456	0,0976	0,0691	0,0546	0,0395
ΔR pro m:									
$\lambda =$ 50 m	0,1060	0,0959	0,0815	0,0703	0,0651	0,0510	0,0459	0,0370	0,0330
100	0,0789	0,0756	0,0630	0,0605	0,0559	0,0446	0,0402	0,0341	0,0290
150	0,0657	0,0649	0,0567	0,0552	0,0509	0,0415	0,0386	0,0314	0,0280
300	0,0488	0,0476	0,0441	0,0436	0,0402	0,0353	0,0328	0,0278	0,0224
500	0,0401	0,0391	0,0365	0,0375?	0,0335	0,0310	0,0289	0,0249	0,0210
900	0,0310	0,0308	0,0288	0,0301?	0,0278	0,0259	0,0241	0,0214	0,0183
R pro m:									
$\lambda =$ 50 m	0,215	0,205	0,191	0,179	0,174	0,160	0,155	0,146	0,142
100	0,155	0,152	0,139	0,136	0,132	0,121	0,116	0,110	0,105
150	0,128	0,127	0,119	0,117	0,113	0,104	0,101	0,093	0,088
300	0,097	0,096	0,092	0,092	0,088	0,083	0,081	0,076	0,070
500	0,076	0,075	0,073	0,073?	0,070	0,067	0,065	0,061	0,057
900	0,058	0,058	0,056	0,056?	0,056	0,053	0,051	0,048	0,045

Meßfehler vorliegen. Im allgemeinen ist der Verlauf der Kurven im Anfang überhaupt nicht eindeutig, so daß die in dem gezeichneten Verlauf vorhandenen Wendepunke unsicher sind.

Die aus der Millerschen Formel sich ergebenden Widerstandswerte liegen schon für 0,0007 cm Mantelstärke erheblich unter den gemessenen. Es ist daraus zu entnehmen, daß schon bei diesen sehr dünnen Mänteln eine erhebliche Ungleichförmigkeit der Stromverteilung im Mantel eintritt und die Formel für Hochfrequenz auch für sehr geringe Mantelstärken nicht mehr brauchbar ist.

Eisen- und Stahldraht mit Kupfermantel.

(Tabb. III und IV, Figg. 6 und 7 auf der folgenden Seite.)

Als Seelenmaterial wurde sogenanntes „Schraubenweicheisen", ein gutes und in genügend präziser Stabform lieferbares weiches Eisen, und ein guter Werkzeugstahl von angenähert $2r = 0{,}2$ cm benutzt. Es vollzog sich die Untersuchung in den früher geschilderten Bahnen, nur mußte die zur Messung benutzte Stromstärke festgelegt werden.[1]) Wegen der dünndrähtigen Vergleichswiderstände wurde der Strom nur auf 0,19 Amp. bemessen.

Tabelle III.

Verkupferter Eisendraht.

Versuchsdraht: $r = 0{,}09845$ cm, Gleichstromwiderstand: 0,0480 Ohm/m.
Vergleichsdraht: Vgl. Tab. II.
Strom im Meßkreis: 0,19 Amp.

Ergebnisse:

Bad	—	cyankal.	cyankal.	$CuSO_4 + H_2SO_4$			
Gleichstromwiderstand des Mantels Ohm/m	—	1,3388	0,4423	0,1512	0,0951	0,0595	0,044
Mantelstärke cm	0,000	0,000198	0,000619	0,001802	0,00285	0,00452	0,00609
ΔR pro m:							
$\lambda = 50$ m	2,2294	1,7366	0,7667	0,1125	0,0357	− 0,0070	−0,0107
100	1,6548	1,3506	0,6615	0,1476	0,0598	+ 0,0110	−0,0040
150	1,3847	1,1383	0,6212	0,1582	0,0771	0,0188	0,0000
300	1,0204	0,8805	0,5572	0,1662	0,0925	0,0336	+0,0140
500	0,8155	0,7274	0,4940	0,1674	0,0980	0,0434	0,0204
900	0,6405	—	0,4299	0,1662	0,1017	0,0494	0,0207
1800	—	—	—	—	—	0,0560	0,0327
R pro m:							
$\lambda = 50$ m	2,338	1,846	0,876	0,222	0,145	0,102	0,092
100	1,731	1,427	0,738	0,224	0,135	0,087	0,072
150	1,447	1,200	0,683	0,220	0,139	0,081	0,062
300	1,068	0,929	0,605	0,214	0,141	0,082	0,062
500	0,852	0,763	0,530	0,203	0,134	0,079	0,056
900	0,668	—	0,457	0,193	0,129	0,076	0,054
1800	—	—	—	—	—	0,075	0,052

Die in den Kurven und Tabellen zusammengefaßten Meßergebnisse bestätigen den zu erwartenden starken Einfluß der Kupfermäntel auf die Widerstandsverhältnisse.

1) Vgl. u. a. Zickler, Elektrotechn. u. Maschinenbau 40. S. 449. 1919.

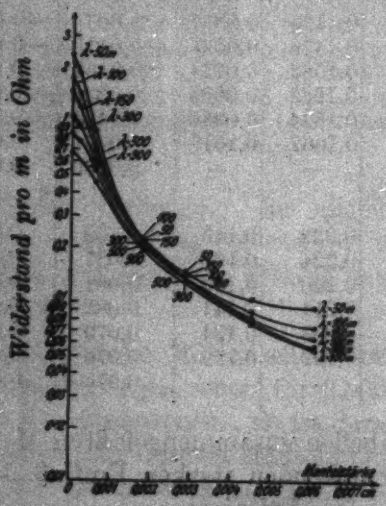
Tabelle IV.

Verkupferter Stahldraht.

Versuchsdraht: $r = 0{,}0098$ cm, Gleichstromwiderstand: 0,0616 Ohm/m.
Vergleichsdraht: Vgl. Tab. II.
Strom im Meßkreis: 0,19 Amp.

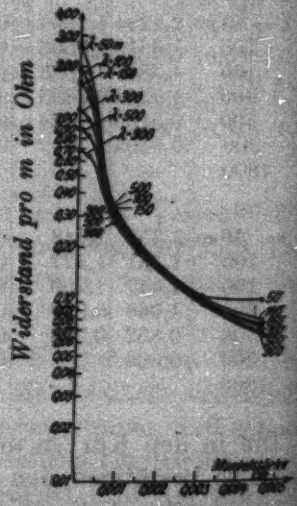
Ergebnisse:

Bad	—	cyankal.	$CuSO_4 + H_2SO_4$			
Gleichstromwiderstand des Mantels Ohm/m	—	1,186	0,3036	0,1750	0,0876	0,0571
Mantelstärke cm	0,000	0,00023	0,0009	0,0015	0,0031	0,0046
ΔR pro m:						
$\lambda =$ 50 m	2,5089	1,7426	0,2302	0,1019	0,0000	− 0,0053
100	1,8626	1,4408	0,2591	0,1385	0,0306	+ 0,0047
150	1,5563	1,2698	0,2677	0,1479	0,0400	0,0144
300	1,1114	0,9693	0,2676	0,1569	0,0560	0,0259
500	0,8701	0,7924	0,2643	0,1643	0,0640	0,0335
900	0,6628	0,6193	0,2501	0,1630	0,0716	0,0413
1800	—	—	—	—	0,0770	0,0453
R pro m: $\lambda =$ 50 m	2,618	1,852	0,339	0,214	0,109	0,104
100	1,939	1,517	0,335	0,215	0,107	0,081
150	1,618	1,332	0,330	0,210	0,102	0,076
300	1,159	1,017	0,316	0,205	0,104	0,074
500	0,906	0,828	0,300	0,200	0,100	0,070
900	0,690	0,646	0,277	0,190	0,099	0,068
1800	—	—	—	—	0,097	0,052



Verkupferter Eisendraht
$r = 0{,}0985$ cm.

Fig. 6.



Verkupferter Stahldraht
$r = 0{,}0998$ cm.

Fig. 7.

Charakteristisch für die ganze Erscheinung ist das starke Zusammenlaufen der für die verschiedenen Wellenlängen gezeichneten Widerstandskurven, und zwar ist eigentümlicher Weise das Zusammenlaufen der Kurven für Stahlseelen enger als für Eisenseelen. Nach diesen Ergebnissen liegt jedenfalls die Vermutung nahe, daß es durch geeignete „Bemantelung" von Drähten mit passenden magnetischen Eigenschaften gelingen müßte, gute Leiter zu erzeugen, die für einen größeren Wellenbereich praktisch konstanten Widerstand haben, und deren Duchmesser sehr viel größer ist, als für „skineffektfreie" Drähte sonst zulässig ist.

Die Kurven geben übrigens auch noch eine Bestätigung dafür, daß die Widerstände von reinem Kupferdraht und verkupfertem Eisen- oder Stahldraht annähernd gleich werden, wenn bei genügend starkem Kupfermantel die Drähte gleichen Durchmesser haben. Dadurch kann natürlich viel Kupfer gespart werden. Der Vergleichskupferdraht hat bei 0,1025 cm Halbmesser für $\lambda = 50$ m einen Widerstand von 0,109 Ohm pro Meter. Derselbe Widerstand wird vom Eisendraht bei einer Mantelstärke von 0,00405 cm auf einer Seele von 0,09845 cm Halbmesser, d. h. einem gesamten Halbmesser von 0,1025 cm, und vom Stahldraht bei einer Mantelstärke von 0,0031 cm auf einer Seele von 0,0998 cm Halbmesser, d. h. einem gesamten Halbmesser von 0,1029 cm erreicht. Diese Übereinstimmung dürfte innerhalb der Fehlergrenze liegen.

Kupferdraht mit Eisenmantel.

(Tab. V, Fig. 8 auf der folgenden Seite.)

Hier zeigt sich deutlich die zu erwartende starke Widerstandszunahme des Drahtes durch den Eisenmantel. Auffällig ist das sehr beträchtliche Auseinanderlaufen der für die verschiedenen Wellenlängen gezeichneten Kurven.

Zusammenfassung.

Es wird eine Meßmethode für die Bestimmung des Widerstandes gerader Leiter für Hochfrequenzströme durchgeführt, die letzten Endes auf die bekannte Methode der Messung von Gleichstromwiderständen durch Vertauschen des gesuchten Widerstandes mit einem bekannten zurückgeht. Die genauen Werte werden dabei aus zwei benachbarten interpoliert.

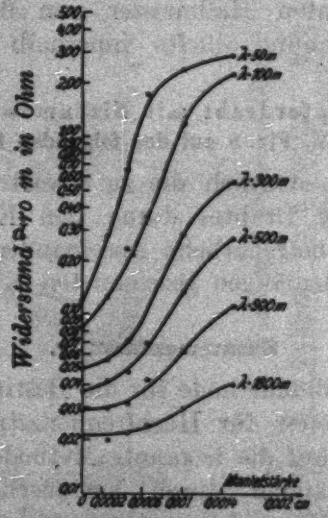
Tabelle V.

Vereisenter Kupferdraht.

Versuchsdraht: $r = 0{,}09776$ cm, Gleichstromwiderstand: 0,0066 Ohm/m.
Vergleichsdraht: Vgl. Tab. II.
Strom im Meßkreise: 0,19 Amp., in der letzten Spalte: 0,095 Amp.

Ergebnisse

Bad	Eisensulfat + Magnesiumsulfat + kohlensaure Magnesia						
Gleichstrom-widerstand des Mantels Ohm/m	—	6,49	3,571	2,484	1,527	1,053	1,053
Mantelstärke cm	0,000	0,00025	0,00045	0,00065	0,00106	0,00153	0,00153
ΔR pro m:							
$\lambda =$ 50 m	—	0,1656	0,5385	1,6053	2,2762	2,7221	unsicher
100	—	0,0494	0,1702	0,2779	1,1050	2,1344	1,7799
300	—	0,0079	0,0230	0,0999	0,2352	0,5132	0,5051
500	—	0,0060	0,0115	0,0332	0,0987	0,2310	0,2140
900	—	0,0032	0,0050	0,0163	0,0359	0,0851	0,0845
1800	—	0,00095	0,0025	0,0044	0,0106	0,0226	—
R pro m:							
$\lambda =$ 50 m	0,119	0,275	0,648	1,714	2,385	2,831	—
100	0,085	0,125	0,246	0,354	1,181	2,210	1,856
300	0,050	0,056	0,071	0,148	0,283	0,561	0,553
500	0,037	0,042	0,048	0,069	0,135	0,267	0,250
900	0,029	0,030	0,032	0,043	0,063	0,112	0,112
1800	0,021	0,020	0,022	0,024	0,030	0,042	—



Vereisenter Kupferdraht $r = 0{,}09776$ cm.
Fig. 8.

Mit Hilfe dieser Methode werden die Widerstandsverhältnisse von geraden Leitern, die mit elektrolytischen oder galvanisch niedergeschlagenen Metallmänteln versehen sind, bei verschiedenen Mantelstärken und Wellenlängen untersucht. Es ergeben sich daraus folgende Schlüsse:

1. Dünne Mäntel geringer Leitfähigkeit (Elektrolyte) bewirken nur bei sehr kurzen Wellen merkliche Vergrößerung des Widerstandes. In stärkerer Schicht wirken sie auch bei längeren Wellen ungünstig ein.

2. Mäntel von gutleitenden nicht ferromagnetischen Metallen auf weniger gutleitenden nicht ferromagnetischen Drähten zeigen die bekannte Verbesserung der Leitfähigkeit, ohne daß besondere Erscheinungen dabei zu bemerken sind.

3. Bei gutleitenden nicht ferromagnetischen Mänteln auf ferromagnetischen Drähten zeigt sich der Übergang der Hauptleitung auf den Mantel schon bei geringer Mantelstärke. In einem bestimmten Gebiet der Mantelstärke erwies sich der Hochfrequenzwiderstand als nur wenig abhängig von der Wellenlänge.

4. Ferromagnetische Mäntel auf nicht ferromagnetischen gutleitenden Drähten zeigen eine sehr starke Zunahme des Widerstandes mit der Frequenz.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Jena angefertigt.

Der Abschluß gibt mir eine angenehme Gelegenheit, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geh. Hofrat Prof. Dr. M. Wien, auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank zu sagen für das stete Interesse und freundliche Eingehen, mit dem er die Arbeit in hohem Maße förderte.

(Eingegangen 13. Februar 1923.)

2. *Über die Fortpflanzung elektrischer Wellen an einem geraden Metalldraht, der mit einem leitenden Mantel versehen ist;*

von K. Försterling.

Einleitung.

Eine strenge Theorie zu den vorstehenden Untersuchungen von Hrn. Trautmann „Über den Hochfrequenzwiderstand von geraden Drähten, die mit leitenden Mänteln versehen sind“ hätte von den Maxwellschen Gleichungen und den Grenzbedingungen an der Oberfläche zylindrischer Leiter auszugehen. Wenn es auch ohne weiteres möglich ist, die Lösung in Besselschen Funktionen hinzuschreiben[1]), so bietet doch ihre Diskussion und damit ihr physikalisches Verständnis bisher nicht überwundene Schwierigkeiten. In der nachfolgenden Arbeit soll von vornherein von einer angenäherten Betrachtung Gebrauch gemacht werden, wie sie M. Abraham[2]) zur Berechnung des Skineffektes hochfrequenter Ströme an einem einfachen Draht benutzt hat. M. Abraham geht von der Betrachtung einer ebenen Grenze aus und beschränkt sich auf den Fall, daß die Wellen nur sehr wenig in den Leiter eindringen. Die Resultate, welche an ebenen Grenzflächen gewonnen sind, lassen sich dann auf zylindrische Leiter übertragen, wenn der Zylinderradius $\bar{r}$ groß neben der Eindringungstiefe der Wellen ist, und solange man sich im Außenraum auf die unmittelbare Nachbarschaft der Grenze beschränkt. Diese Überlegungen lassen sich auch mathematisch rechtfertigen. Die Lösung der Maxwellschen Gleichungen läßt sich nämlich innerhalb des Drahtes mit Hilfe der Besselschen Funktion $J(x)$ darstellen, wobei x die Entfernung von der Zylinderachse r multipliziert mit einer Konstanten bedeutet. Falls die Wellen nur wenig in den

1) F. Harms, Ann. d. Phys. 23. S. 44. 1907.
2) M. Abraham, Theorie d. Elektrizität I. S. 338. Leipzig. 1912.

Draht eindringen, ist x eine so große Zahl, daß man $J(x)$ durch seinen asymptotischen Wert ersetzen kann. Dieser ist bekanntlich die e-Funktion multipliziert mit $1/\sqrt{x}$. Ist nun die ganze Tiefe, welche die Wellen im Draht erreichen, sehr klein neben dem Drahtradius r, so ändert sich x in diesem Bereiche so wenig, daß für $\sqrt{x}$ ein konstanter Mittelwert gesetzt werden kann. Wir haben es an Stelle der Besselschen Funktionen dann nur mit der e-Funktion zu tun, d. h. mit der Lösung des Problems für ebene Grenzflächen.

Wir werden allerdings auf die Fortpflanzung von Oberflächenwellen an ebenen Grenzen etwas näher eingehen müssen, als dies bei M. Abrahams Behandlung des einfachen homogenen Drahtes nötig war. Es ist zunächst die Bedingung dafür aufzustellen, daß das Feld sich auf die Nähe der Grenzfläche beschränkt. Hieraus ergeben sich die Gesetze der Fortpflanzung und Schwingungsform. Im Falle eines einfachen homogenen Leiters mit einer Grenze an das Vakuum führen unsere Resultate zu denjenigen zurück, welche E. Cohn und J. Zenneck bereits erhalten haben.

Indem wir dann zu zylindrischen Leitern übergehen, dürfen wir unsere Resultate als angenähert richtig für das Innere des Drahtes und die unmittelbare Umgebung außerhalb desselben ansehen. Ein Vergleich mit der strengen Sommerfeldschen Theorie[1]) für den Spezialfall eines einzelnen homogenen Drahtes zeigt, daß die tangentiellen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ genau mit den Sommerfeldschen Werten übereinstimmt, und daß die zur Oberfläche senkrechten Komponente $\mathfrak{E}_r$ nur sehr wenig abweicht, nämlich in demselben Maße wie die Geschwindigkeit der Drahtwellen (bei geringer Eindringungstiefe) von der Lichtgeschwindigkeit.

Mit Hilfe des „komplexen“ Poyntingschen Vektors erhalten wir nach dem Vorgange von Emde[2]) sogleich die „innere“ Selbstinduktion und den Hochfrequenzwiderstand des Leiters. Natürlich führen unsere Formeln für den homogenen Draht auf die Betrachtungen Abrahams und zu den Rayleigh-

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 67. S. 233. 1899.
2) F. Emde, Elektrotech. u. Maschinenbau 27. S. 79 u. 111. 1909.

schen Formeln zurück. Für einen metallischen Draht, der von einem leitenden Mantel umgeben ist, gelangen wir dagegen zur Darstellung der experimentellen Ergebnisse von Trautmann.

§ 1. Die Fortpflanzung von Oberflächenwellen längs ebener Leiter.

In der XY-Ebene mögen zwei Medien zusammenstoßen, deren Dielektrizitätskonstante, Leitfähigkeit, Magnetisierungskonstante und Brechungsindex ε_1, σ_1, μ_1 und n_1 bzw. ε_2, σ_2, μ_2 und n_2 seien. Der Brechungsindex ist im allgemeinen komplex, man setzt:

$$\mathfrak{n} = n(1 - i\varkappa)$$

und der imaginäre Teil $n\varkappa$ bestimmt die Größe der Absorption einer ebenen homogenen Welle. Der komplexe Brechungsindex einer Welle von der Frequenz ν oder Periode τ ist nach der Maxwellschen Theorie durch die Beziehung gegeben:

(1) $$n^2 = \mu(\varepsilon - 2i\sigma\tau).$$

Wir werden es in der vorliegenden Arbeit mit Wellen von über 30 cm Wellenlänge und deren Fortpflanzung in Metallen zu tun haben. Dann kann man den Verschiebungsstrom im Metall gegen den Leitungsstrom vernachlässigen und erhält statt (1):

(1a) $$\mathfrak{n}^2 = -2i\sigma\tau\mu; \quad \mathfrak{n} = (1 - i)\sqrt{\sigma\tau\mu}.$$

Wie in der Optik gebräuchlich, führen wir die Komponenten der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ parallel und senkrecht zur Einfallebene ein und bezeichnen die entsprechenden (komplexen) Amplituden in der einfallenden Welle mit E_p ($\parallel$ der Einfallsebene) und E_s, in der reflektierten mit R_p und R_s, und in der durchgegangenen mit D_p und D_s.

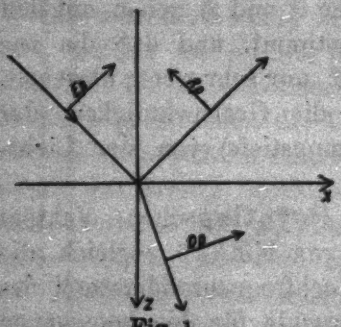


Fig. 1.

Die s-Komponenten rechnen wir positiv $\parallel +Y$, die p-Komponenten in der gebräuchlichen Weise[1]), so wie es Fig. 1 angibt. Die Grenzbedingungen verlangen Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, also von $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_x$ und $\mathfrak{H}_y$.

1) P. Drude, Lehrbuch der Optik. S. 265. Leipzig 1906.

Wählt man als Einfallsebene die XZ-Ebene, so hat man als Lösung der Maxwellschen Gleichungen für die Feldstärken der verschiedenen Wellen die Form:

$$A e^{i\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{c} n\right)},$$

wobei

$$\alpha^2 + \gamma^2 = 1$$

und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Aus den Grenzbedingungen folgt bekanntlich, daß ν für alle Wellen denselben Wert hat, ebenso:

(2) $$\alpha_h n_h \text{ (Brechungsgesetz)};$$

dagegen gilt im ersten Medium:

(3) $$\gamma_e = -\gamma_r.$$

α und γ können auch komplex[1]) ausfallen. Sie bestimmen dann nicht nur die Ebene konstanter Phase und die Geschwindigkeit, mit der sich diese vorwärtsbewegt, sondern auch die Lage der Ebene konstanter Amplitude und die Größe der Absorption. α und γ pflegt man als komplexe Richtungscosinus zu bezeichnen, da man mit ihnen genau so rechnen kann, wie mit den reellen Cosinus. Wie aus Fig. 1 folgt, gelten die Beziehungen für die einfallende Welle:

(4) $$(\mathfrak{E}_x)_e = \gamma_e E_p e^{i\nu()}; \quad (\mathfrak{E}_y)_e = E_s e^{i\nu()}; \quad (\mathfrak{E}_z)_e = -\alpha_e E_p e^{i\nu()}$$

und daher nach den Maxwellschen Gleichungen

(4a) $$\begin{cases} (\mathfrak{H}_x)_e = -\frac{n_1}{\mu_1}\gamma_e E_s e^{i\nu()}; \quad (\mathfrak{H}_z)_e = +\frac{n_1}{\mu_1}\alpha_e E_s e^{i\nu()} \\ (\mathfrak{H}_y)_e = \frac{n_1}{\mu_1}(\gamma_e \mathfrak{E}_{xe} - \alpha_e \mathfrak{E}_{ze}) = \frac{n_1}{\mu_1} E_p e^{i\nu()} \end{cases}$$

und genau die gleichen Beziehungen gelten für die übrigen Wellen. Führt man die Abkürzung:

(5) $$n' = \frac{n}{\mu}$$

ein, so haben die Grenzbedingungen genau die Form wie in der gewöhnlichen Optik, nur daß an Stelle von n jetzt n' steht (da man in der Optik $\mu = 1$ zu setzen pflegt), und lauten im

1) Vgl. z. B. W. Voigt, Magneto- u. Elektro-Optik. S. 291 u. 301. Leipzig 1908.

Falle nur zweier Medien z. B. für die p-Komponenten, ($\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ stetig), wenn $\gamma_e = -\gamma_r = \gamma_1$, $\gamma_d = \gamma_2$ und $\alpha_e = \alpha_r = \alpha_1$, $\alpha_d = \alpha_2$:

$$\gamma_1 (E_p - R_p) = \gamma_2 D_p$$
$$n_1' (E_p + R_p) = n_2' D_p .$$

Ähnliche Bedingungen gelten für die s-Komponenten. Aus ihnen folgt die Unabhängigkeit der p-Komponenten von den s-Komponenten, ferner die Proportionalität von R_p und D_p mit E_p, von R_s und D_s mit E_s. Wir setzen:

$$R_p = r_p E_p ; \quad R_s = r_s E_s . \tag{6}$$

Die r haben die aus der Optik bekannte Form des Fresnelschen Reflexionskoeffizienten:

$$r_p = \frac{n_2' \gamma_1 - n_1' \gamma_2}{n_2' \gamma_1 + n_1' \gamma_2} ; \quad r_s = \frac{n_1' \gamma_1 - n_2' \gamma_2}{n_1' \gamma_1 + n_2' \gamma_2} . \tag{7}$$

Uns interessiert in erster Linie der Fall, daß drei Medien mit parallelen Grenzflächen den Raum erfüllen. Das mittlere (zweite) Medium habe die Dicke l. Wieder ergeben die Grenzbedingungen, daß

$$\nu \text{ und } n_h \alpha_h$$

für alle Wellen denselben Wert haben. Ferner ist im ersten Medium $\gamma_e = -\gamma_r$. Wir führen die Reflexionskoeffizienten

$$r_p' = \frac{n_2' \gamma_3 - n_3' \gamma_2}{n_2' \gamma_3 + n_3' \gamma_2} , \quad r_s' = \frac{n_2' \gamma_3 - n_3' \gamma_2}{n_2' \gamma_3 + n_3' \gamma_2} \tag{7a}$$

ein. Diese wären für die Reflexion an der Grenze des zweiten und dritten Mediums maßgebend, wenn diese beiden Medien allein vorhanden wären und den ganzen Raum ausfüllten.

Im Falle dreier Medien gilt wieder

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \varrho E , \\ \text{wenn jetzt} \\ \varrho = \dfrac{r + r' \varepsilon^{-2}}{1 + r r' \varepsilon^{-2}} \\ \text{bedeutet, wobei} \\ \varepsilon = e^{2\pi i n_2 \gamma_2 l / \lambda} \\ (\lambda \text{ Wellenlänge im Vakuum}). \end{array} \right. \tag{8}$$

Diese Gleichung gilt je nachdem man den Index s oder p hinzufügt, sowohl für die parallel wie für die senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Komponente.

Uns wird nun nicht das allgemeine Reflexionsproblem der Optik interessieren, wir werden uns vielmehr auf die Frage beschränken, unter welchen Umständen das Feld sich auf die Nähe der Grenzfläche beschränkt, d. h. wann wir Oberflächenwellen vor uns haben.

Es soll künftig stets vorausgesetzt werden, daß das zweite und dritte Medium absorbiert. Dann nimmt die Energie mit z wie $e^{-4\pi n \varkappa z/\lambda}$ ab, verschwindet also bei $z = +\infty$. Das erste Medium wird nun im allgemeinen nicht absorbieren, d. h. n_1 wird reell sein. Trotzdem ist zu verlangen, daß sowohl für die einfallende wie die reflektierte Welle für $z = -\infty$

$$e^{-i\gamma n_1 \frac{\gamma t}{c} z}$$

verschwindet. Nehmen wir an, daß diese Bedingung für die einfallende Welle wirklich erfüllt sein, so ergibt sich aus

$$\gamma_r = -\gamma_e,$$

daß sie für die reflektierte Welle sicher nicht erfüllt ist, daß im Gegenteil die reflektierte Amplitude bei $z = -\infty$ selbst unendlich wird. Als notwendige Bedingung für das Bestehen von Oberflächenwellen ergibt sich also:

$$R_p = R_s = 0. \tag{9}$$

Dann haben wir es im ersten Medium in der Tat mit einer einheitlichen Wellenfront zu tun, die längs der Oberfläche entlang gleitet.

Als Beispiel betrachten wir zunächst den Fall zweier Medien und behandeln die s- und p-Komponente gesondert.

I. Es sei $E_s = 0$. Dann ist identisch $R_s = 0$ und es bleibt zu erfüllen:

$$R_p = 0 \text{ oder } r_p = 0,$$

d. h. nach (7):

$$n_2' \gamma_1 = n_1' \gamma_2 \text{ oder: } \frac{1}{\mu_2^2}\{n_2^2 - n_2^2 \alpha_1^2\} = \frac{1}{\mu_1^2}\{n_1^2 - n_1^2 \alpha_2^2\},$$

also

$$\alpha_1^2 = \frac{n_2^2 \mu_1^2/\mu_2^2 - n_1^2}{n_2^2\left(\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} - \frac{n_1^4}{n_2^4}\right)}; \qquad \gamma_1^2 = \frac{n_1^2\left(1 - \frac{n_2^2}{n_2^2}\right)}{n_2^2\left(\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} - \frac{n_1^4}{n_2^4}\right)}. \tag{10}$$

Hat man es speziell mit unmagnetisierbaren Medien zu tun und ist das erste Medium der leere Raum, so wird einfach

$$(10a) \qquad \alpha_1^2 = \frac{n_2^2}{n_2^2+1}; \qquad \gamma_1^2 = \frac{1}{n_2^2+1}.$$

Wir werden es im folgenden immer mit Metallen zu tun haben. Hier ist n_2^2 immer groß neben 1 und selbst bei Eisen auch neben μ_2^2. Es ist ja nach (1a)

$$\frac{n_2^2}{\mu_2^2} = -i\frac{2\sigma\cdot\tau}{\mu_2}.$$

In Eisen ist etwa $\sigma_2 = 5\cdot 10^{16}$, $\mu_2 = 200$, da es sich um die Anfangspermeabilität handelt. Für $\lambda = 30$ cm, d. h. $\tau = 10^{-9}$ Sek. ist daher

$$\left(\frac{n_2^2}{\mu_2^2}\right) = 5\cdot 10^5,$$

also eine sehr große Zahl, neben der 1 wegbleiben kann. Dann geht die Gleichung (10) über in

$$(10b) \qquad \alpha_1^2 = 1; \qquad \gamma_1^2 = \frac{n_1^2\mu_2^2}{n_2^2\mu_1^2}i; \qquad \gamma_1 = \frac{n_1\mu_2}{n_2\mu_1}.$$

Die Schwingungsform ist gegeben durch

$$(11) \qquad \frac{\mathfrak{E}_x}{\mathfrak{E}_z} = -\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{n_2\mu_1}{n_1\mu_2},$$

während sich

$$(11a) \qquad \frac{\mathfrak{H}_y}{\mathfrak{E}_x} = \frac{n_1}{\mu_1\gamma_1}, \qquad \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_z = 0;$$

aus den Maxwellschen Gleichungen ergibt.

Grenzt der Leiter an das Vakuum ($n_1 = \mu_1 = 1$), so ist nach (10b) die Abnahme der Amplitude durch

$$e^{-i\frac{\nu}{c}\frac{\mu_2\cdot i}{\sqrt{\sigma\tau\mu_2}}z} = e^{+\frac{\nu}{c}\frac{z}{\sqrt{\sigma_2\tau/\mu_2}}}$$

gegeben; sie verschwindet also, wie es bei Oberflächenwellen sein muß, bei $z = -\infty$. Diese Resultate sind zuerst von E. Cohn[1]) abgeleitet worden.

---

1) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld. S. 453. Leipzig 1900. — J. Zenneck, Ann. d. Phys. 32. S. 846. 1907.

II. Ist $E_p = 0$, so muß beim Bestehen von Oberflächenwellen $\mathfrak{r}_s = 0$ sein. Beschränken wir uns auf Metalle, wo wieder $\mu\sigma\tau$ groß neben 1 ist, so kann

$$\gamma_2 = \sqrt{1 + \frac{n^2}{2i\sigma_2\mu_2\tau}}$$

durch 1 ersetzt werden, und es findet sich

$$\gamma_1 = \mathfrak{n}_2'.$$

Hiernach aber würde die Änderung der Amplitude $\| Z$ gegeben sein durch

$$e^{+i\tau i\frac{\sqrt{\sigma_2\mu_2\tau}}{\mu_2 c}z} = e^{-\tau\frac{\sqrt{\sigma_2\mu_2\sigma}}{\mu_2 c}z}.$$

Die Amplitude wächst aber für $z = -\infty$ selbst ins Unendliche. Dieser Fall, welcher „magnetischen" Oberflächenwellen entsprechen würde, führt also, so lange es sich um ebene Grenzen handelt, zu keinen physikalisch möglichen Resultaten.

Wir setzen daher künftig von vornherein

$$E_s = 0$$

voraus.

Wir übertragen jetzt gemäß unseren Überlegungen in der Einleitung die gewonnenen Resultate auf zylindrische Leiter. Für einen homogenen Draht sind wir in der Lage, unsere Resultate mit denen Sommerfelds zu vergleichen.

Es ist zu bemerken, daß bei Sommerfeld die Achse des Drahtes in der Z-Richtung, bei uns in der X-Richtung liegt. Wenn wir zum Draht übergehen, werden wir zweckmäßig statt $\mathfrak{E}_z$ jetzt $\mathfrak{E}_r$, statt $\mathfrak{H}_y : \mathfrak{H}_\varphi$ einführen.

Bei Sommerfeld ist die Abkürzung

$$k^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau c}\right)^2 \mathfrak{n}^2, \tag{12}$$

wobei $\mathfrak{n}$ die im vorausgehenden benutzte Bedeutung hat. $\mathfrak{n}$ ist aber nicht mehr genau das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit c zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Drahtwellen. Sei λ die wirkliche Wellenlänge der Drahtwellen, $\varkappa$ eine neue Konstante, so ist bei Sommerfeld die Größe (Gleichung [8] bei Sommerfeld)

$$\frac{2\pi}{\lambda} - i\varkappa = c \quad (= q \text{ hier gesetzt}), \tag{12a}$$

die wir hier aber mit q bezeichnen wollen, da c wie üblich schon als Abkürzung verwandt ist. Θ bedeutet bei Sommerfeld eine Abkürzung (vgl. S. 54 dieser Abhandlung), die nur wenig von der Frequenz und dem Drahtradius abhängt und welche im Mittel $= {}^1/_{20}$ gesetzt werden kann. Die Geschwindigkeit bestimmt sich dann aus der Gleichung

$$(13) \qquad \bar{r}(k_1^2 - q^2) = +2\Theta i \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2 \mu_1} = +2\Theta i \frac{\nu}{c} \frac{n_1^2 \mu_1}{n_2 \mu_1}$$

und ergibt sich in den meist zur Verwendung kommenden Fällen als sehr wenig von $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/Sek. verschieden.

Für den hier allein in Frage kommenden Fall hinreichend dicker Drähte findet Sommerfeld im Außenraum direkt an der Drahtoberfläche, wobei α eine uns nicht interessierende Konstante ist (bei Sommerfeld ist $L = 2\Theta$)

$$\mathfrak{E}_z = \alpha; \qquad \mathfrak{E}_r = \frac{i\alpha q}{(k_1^2 - q^2)\bar{r}} 2\Theta; \qquad \mathfrak{H}_\varphi = \frac{i\alpha k_1 2\Theta}{\bar{r}(k_1^2 - q^2)}.$$

Führt man aus der Gleichung (S. 274 bei Sommerfeld) den Wert für $(k_1^2 - q^2)\bar{r}$ ein, so erhält man

$$\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_z} = \frac{q}{k_1} \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2}; \qquad \frac{\mathfrak{H}_\varphi}{\mathfrak{E}_z} = \frac{n_2}{\mu_2}.$$

Die erste dieser Gleichungen stimmt mit der Gleichung (11) sehr angenähert überein, so lange q und k_1 sich wenig unterscheiden, d. h. solange die Geschwindigkeit der Wellen nahezu gleich der Lichtgeschwindigkeit ist (vgl. Tabelle 277 bei Sommerfeld). Die zweite Gleichung ist mit unserer Gleichung (11a) genau identisch. Wir werden zur Berechnung des Hochfrequenzwiderstandes nur $\mathfrak{H}_\varphi$ und $\mathfrak{E}_z$ brauchen. Da die Fehler beim Übergang vom ebenen Problem zum zylindrischen Leiter wohl in gleicher Weise beim homogenen Draht wie bei einem zylindrischen Kern mit Mantel auftreten, so liegt in der erhaltenen Übereinstimmung mit den Sommerfeldschen Resultaten, namentlich für die tangentiellen Komponenten der Feldstärken, eine Rechtfertigung für unsere weitere Betrachtungsweise.

§ 2. Berechnung des Widerstandes mit Hilfe des komplexen Poyntingschen Vektors.

Um den Wechselstromwiderstand zu berechnen, knüpfen wir an den Energiestrom an, welcher in den Leiter eindringt,

und zwar betrachten wir mit F. Emde den komplexen Poyntingschen Vektor $\mathfrak{U}$. Sei $\mathfrak{A}^*$ die zu $\mathfrak{A}$ komplex konjugierte Größe, n bedeute die Richtung der inneren Normalen. Integriert man $\mathfrak{U}_n$ über eine geschlossene Fläche, so gilt[1])

$$\int \mathfrak{U}_n \, df = \frac{c}{8\pi} \int [\mathfrak{E}\mathfrak{H}^*]_n \, df = \bar{Q} + i2\nu(\bar{T} - \bar{\Phi}).$$

Hierin ist $\bar{Q}$ der zeitliche Mittelwert der in dem umschlossenen Volumen entwickelten Jouleschen Wärme, $\bar{T}$ und $\bar{\Phi}$ die mittlere magnetische und elektrische Energie desselben Volumens. Wenden wir diese Formel auf das Innere des Metalls an, so ist $\bar{\Phi}$ klein neben $\bar{T}$ und kann fortbleiben.

Betrachten wir also den Energiestrom in der XY-Ebene im ersten Medium, welcher $\| + Z$ in den Leiter eintritt, so finden wir, indem wir noch $\mathfrak{E}$ gemäß (4 und 4a) durch $\mathfrak{H}$ ersetzen:

$$\frac{c}{8\pi} \int [\mathfrak{E}\mathfrak{H}^*]_n \, df = \frac{c}{8\pi} \int \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y^* \, df = \frac{c}{8\pi} \frac{\mu_1}{n_1} \gamma_1 \int \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_y^* \, df.$$

Diese Formel können wir auf die Längeneinheit eines zylindrischen Leiters anwenden, ohne daß, wie am Ende des vorigen Paragraphen gezeigt wurde, durch die Übertragung vom ebenen Problem auf die gekrümmte Fläche erhebliche Fehler zu erwarten sind. Da im Metall der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigt werden kann, so gilt bei Integration rings um die Peripherie des Kreisquerschnittes des Drahtes

$$\oint \mathfrak{H}_y \, dy = 2\pi \bar{r} \mathfrak{H}_y = \frac{4\pi}{c} J$$

$$\oint \mathfrak{H}_y^* \, dy = 2\pi \bar{r} \mathfrak{H}_y^* = \frac{4\pi}{c} J^*.$$

J ist der im Drahte fließende Gesamtstrom; JJ^* ist das Quadrat der maximalen Stromamplitude. Ist J die mittlere Stromstärke, so daß $J^2 = {}^1/_2 JJ^*$. Dann ergibt sich

$$\frac{c}{8\pi} \int [\mathfrak{E}\mathfrak{H}^*]_n \, df = \frac{c}{8\pi} \gamma_1 \frac{\mu_1}{n_1} \int \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_y^* \, df = \frac{2\gamma_1}{\bar{r}c} \frac{\mu_1}{n_1} J^2 = \bar{Q} + 2i\nu\bar{T}.$$

---

1) Vgl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität I. S. 335. Leipzig 1912.

Wir wollen uns im folgenden darauf beschränken, daß das Medium außerhalb des Metalls die Wellen nicht absorbiert; dann ist n_1 reell $= n$. Setzen wir noch

$$\gamma_1 = \gamma_1' + i\gamma_1'',$$

so finden wir

$$\bar{Q} = \frac{2\gamma_1'}{\bar{r}c}\,\frac{\mu_1}{n_1}\,J^2; \qquad \bar{T} = \frac{\gamma_1''}{\bar{r}c\nu}\,\frac{\mu_1}{n_1}\,J^2.$$

Der Widerstand R und die „innere" Selbstinduktion L_i werden definiert durch

$$J^2 R = \bar{Q}; \qquad \frac{L_i}{2c^2}\,J^2 = \bar{T}.$$

Hieraus ergibt sich

$$R = \frac{2\gamma_1'}{\bar{r}c}\,\frac{\mu_1}{n_1}; \qquad L_i = \frac{2c\gamma_1''}{\bar{r}\nu}\,\frac{\mu_1}{n_1}. \tag{15}$$

Der Einfachheit halber soll künftig stets angenommen werden, daß der leere Raum das erste Medium bildet; dann wird einfacher

$$R = \frac{2\gamma_1'}{\bar{r}c}; \qquad L_i = \frac{2c\gamma_1''}{\bar{r}\nu}. \tag{15a}$$

Wir schreiben diese Formeln zunächst für den homogenen Draht hin. Hier ist nach (10b) und (1a)

$$\gamma_1 = \frac{\mu_2}{n_2} = \frac{\mu_2}{(1-i)\sqrt{\sigma_2\mu_2\tau}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2\tau}}\cdot\frac{1+i}{2}.$$

Also

$$R = \frac{1}{\bar{r}c}\sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2\tau}}; \qquad L_i = \frac{c}{\bar{r}\nu}\sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2\tau}} = \frac{c}{2\pi\bar{r}}\sqrt{\frac{\mu_2\tau}{\sigma_2}} \tag{16}$$

in Übereinstimmung mit den Rayleighschen Formeln.

Um die entsprechenden Ausdrücke für einen zylindrischen leitenden Kern umgeben von einem leitenden Mantel von der Dicke l zu finden, haben wir γ_1 aus der Bedingung (9) und (8)

$$R_p = 0 \qquad \text{oder} \qquad \varrho_p = 0$$

zu berechnen (E_s und damit $R_s = 0$ setzen wir voraus). Die Bedingung $\varrho_p = 0$ läßt sich nach (8) schreiben

$$\mathfrak{r}_p + \mathfrak{r}_p' e^{-2} = 0, \tag{17}$$

und $\mathfrak{r}_p$ und $\mathfrak{r}_p'$ haben die Form (7) und (7a).

Da wir uns im Gebiete elektrischer Wellen $\lambda > 30$ cm auf Metalle beschränken, können wir eine von P. Drude herrührende bereits im sichtbaren Spektralgebiet gültige Annäherung einführen. Bei $n_1 = 1$ ist nämlich

$$\gamma_2 = \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{n_2^2}}; \qquad \gamma_3 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n_3^2}}.$$

Da nun $\alpha_1^2 < 1$ ist und $|n_2^2| = 2\sigma\mu\tau$ eine sehr große Zahl, so können wir ohne merklichen Fehler γ_2 und γ_3 gleich 1 setzen. Dann geht (17) über in

$$(n_2'\gamma_1 - 1)(n_3' + n_2') + (n_2'\gamma_1 + 1)(n_3' - n_2')\,e^{-2} = 0$$

oder

$$\gamma_1 n_2'[n_3'(1 + e^{-2}) + n_2'(1 - e^{-2})] = n_2'(1 - e^{-2}) + n_3'(1 + e^{-2}),$$

woraus

$$\gamma_1 = \frac{1}{n_2'}\,\frac{n_3' + n_2' + (n_3' - n_2')\,e^{-2}}{n_3' + n_2' - (n_3' - n_2')\,e^{-2}} \tag{17}$$

folgt. Nun ist

$$n' = (1 - i)\sqrt{\frac{\sigma\tau}{\mu}}$$

nach (1a) und (5).

Die Größe

$$\Delta = \frac{n_2' - n_3'}{n_2' + n_3'} = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\mu_2}} - \sqrt{\frac{\sigma_3}{\mu_3}}}{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\mu_2}} + \sqrt{\frac{\sigma_3}{\mu_3}}} \tag{18}$$

ist also rein reell; komplex dagegen ist e^{-2}. Wir kürzen noch ab

$$\frac{1 + \Delta e^{-2}}{1 - \Delta e^{-2}} = a + ib \tag{19}$$

und erhalten

$$\gamma_1 = \frac{1 + i}{2\sqrt{\tau\frac{\sigma_2}{\mu_2}}}\cdot(a + ib), \tag{20}$$

also

$$\begin{cases} \gamma_1' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2\tau}}(a - b) \\ \gamma_1'' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2\tau}}(a + b). \end{cases} \tag{20a}$$

Hieraus ergibt sich

$$(21) \qquad R = \frac{1}{r\,c}\sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2\,\tau}}(a-b); \qquad L_i = \frac{c}{2\pi\tau}\sqrt{\frac{\mu_2\,\tau}{\sigma_2}}(a+b).$$

Bezeichnen wir die Werte eines massiven Drahtes (sehr großes l) von der Leitfähigkeit σ_2 und Magnetisierungskonstante μ_2 mit R_∞ und $L_{i\infty}$, so haben wir

$$(21\,a) \qquad R = R_\infty(a-b); \qquad L_i = L_{i\infty}(a+b).$$

Hierbei ist a und b aus (19) zu berechnen. Wir kürzen noch ab:

$$\eta = 4\pi\sqrt{\mu_2\sigma_2\tau}\,l/\lambda,$$

so daß (da $\gamma_2 = 1$, $\mathfrak{n}_2^2 = (1-i)\sqrt{\mu_2\sigma_2\tau}$)

$$e^{-\mathfrak{z}} = e^{-4\pi i\mathfrak{n}_2\gamma_2 l/\lambda} = e^{-(1+i)\cdot\eta}$$

wird. Damit geht (19) über in:

$$a+ib = \frac{1+\Delta e^{-\eta}\cos\eta - i\Delta e^{-\eta}\sin\eta}{1-\Delta e^{-\eta}\cos\eta + i\Delta e^{-\eta}\sin\eta} = \frac{1-\Delta^2 e^{-2\eta} - 2i\Delta e^{-\eta}\sin\eta}{1+\Delta^2 e^{-2\eta} - 2\Delta e^{-\eta}\cos\eta},$$

so daß:

$$(22) \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1-\Delta^2 e^{-2\eta}}{1+\Delta^2 e^{-2\eta} - 2\Delta e^{-\eta}\cos\eta}, \\ b = -\dfrac{2\Delta e^{-\eta}\sin\eta}{1+\Delta^2 e^{-2\eta} - 2\Delta e^{-\eta}\cos\eta}. \end{cases}$$

Diese Werte in (21) eingeführt, ergeben den Hochfrequenzwiderstand R und die innere Selbstinduktion L_i ausgedrückt durch die Konstanten des Drahtes und die Periode des Wechselstroms. Voraussetzung für ihre Gültigkeit ist natürlich, ebenso wie bei den Grenzformeln von Rayleigh (16), daß das Feld nur wenig in den Leiter eindringt.

Ist die Dicke des Mantels so groß, daß die Wellen den Kern nicht mehr erreichen, d. h. ist $e^{-\eta}$ sehr klein, so wird

$$a = 1, \quad b = 0.$$

Man kommt wie man aus (21) oder (21 a) sogleich ersieht, auf die Rayleighschen Formeln für einen massiven Draht aus dem Material des Mantels.

Ist andrerseits die Dicke des Mantels sehr klein, so daß η verschwindet, so erhält man:

$$a = \frac{1-\Delta^2}{(1-\Delta)^2} = \frac{1+\Delta}{1-\Delta} = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\sigma_3}{\mu_3}}},$$

$$b = 0.$$

Hiermit wird (21):

$$R_0 = \frac{1}{\bar{r}\,c}\sqrt{\frac{\mu_3}{\sigma_3\,\tau}}; \quad L_{i0} = \frac{c}{2\pi\,\bar{r}}\sqrt{\frac{\mu_3\,\tau}{\sigma_3}}.$$

Wir erhalten also, wie es sein muß, die Werte für R und L_i; welche für den Kern ohne Mantel nach (16) gelten würden.

§ 3. Diskussion der erhaltenen Resultate.

Im folgenden soll nun der Ausdruck für den Hochfrequenzwiderstand näher diskutiert werden. Es wird dabei vorausgesetzt, daß die beiden Metalle, welche den Kern und den Mantel bilden, sehr verschiedene Konstanten haben, etwa wie bei den Beobachtungen von Hrn. Trautmann Kupfer und Eisen. Wir setzen dann die kleine Größe:

$$2\sqrt{\frac{\sigma_E}{\sigma_{Cu}\,\mu_E}} = \varepsilon. \tag{23}$$

Das Kupfer kann nun sowohl den Kern als auch den Mantel bilden; für beide Fälle liegen Beobachtungen vor. Wir unterscheiden also zwei Fälle:

I. Zweites Medium (Mantel) Eisen, drittes (Kern) Kupfer. Dann ist nach (18) in Annäherung:

$$\Delta = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_3\,\mu_3}} - 1}{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_3\,\mu_3}} + 1} = -(1-\varepsilon). \tag{24a}$$

II. Zweites Medium (Mantel) Kupfer, drittes (Kern) Eisen.

$$\Delta = \frac{1 - \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_3\,\mu_3}}}{1 + \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_3\,\mu_3}}} = 1 - \varepsilon. \tag{24b}$$

Diese Werte sind in die Formel R einzuführen, welche sich aus (21) und (22) ergibt zu:

$$(25)\quad R = \frac{1}{c\bar{r}}\sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2\tau}}\,\frac{1 - \Delta^2 e^{-2\eta} + 2\Delta e^{-\eta}\sin\eta}{1 + \Delta^2 e^{-2\eta} - 2\Delta e^{-\eta}\cos\eta} = \frac{1}{c\bar{r}}\sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2\tau}}\,Q,$$

worin Q eine leicht ersichtliche Abkürzung ist, und η definiert war durch:

$$(26)\qquad \eta = 4\pi\sqrt{\mu_2\sigma_2\tau}\;l/\lambda = 4\pi\sqrt{\frac{\mu_2\sigma_2}{c}}\,\frac{l}{\sqrt{\lambda}}\,.$$

ε betrachten wir als kleine Größe und wir wollen im Schlußresultat ε neben 1 weglassen.

I. Fall: Kupferkern mit Eisenmantel.

Durch Einsetzen von (24a) in (25) findet man:

$$Q = \frac{e^{+\eta} - e^{-\eta} - 2\sin\eta + 2\varepsilon(e^{-\eta} + \sin\eta) - \varepsilon^2 e^{-\eta}}{e^{+\eta} + e^{-\eta} + 2\cos\eta - 2\varepsilon(e^{-\eta} + \cos\eta) + \varepsilon^2 e^{-\eta}}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\,\eta - \sin\eta + \varepsilon(e^{-\eta} + \sin\eta)}{\mathrm{Cos}\,\eta + \cos\eta - \varepsilon(e^{-\eta} + \cos\eta)}\,.$$

Hierin konnten die Glieder mit ε^2 in unserer Näherung fortbleiben; Sin und Cos bedeuten die hyperbolischen Funktionen.

Bereits für $\eta = \frac{\pi}{2}$ wird:

$$Q = \frac{1{,}1 + 1{,}22\,\varepsilon}{2{,}3 - 0{,}22\,\varepsilon}$$

und wir können die Glieder mit ε überhaupt außer acht lassen, so daß:

$$(27)\qquad Q = \frac{\mathrm{Sin}\,\eta - \sin\eta}{\mathrm{Cos}\,\eta + \cos\eta}\,,\quad \eta > 1{,}5\,.$$

Für kleine η entwickeln wir den Zähler von Q in einer Potenzreihe nach η und bemerken, daß auch jetzt die Glieder mit ε^2 fortbleiben können.

Zunächst ist:

$$\mathrm{Sin}\,\eta - \sin\eta = \frac{2\eta^3}{3!}\left\{1 + \frac{3!}{7!}\eta^4 \ldots\right.$$

Für $\eta = 1{,}5$ hat $\frac{3!}{7!}\eta^4$ etwa den Wert $\frac{1}{170}$ und kann also für $\eta < 1{,}5$ fortbleiben.

Ferner findet man:

$$e^{-\eta} + \sin\eta = 1 + \frac{1}{2!}\eta^2 - \frac{2}{3!}\eta^3 + \frac{1}{4!}\eta^4 + \frac{1}{6!}\eta^6\,.$$

Hierin ist für $\eta = 1{,}5$ das letzte Glied $= \frac{1}{60}$ und kann weil mit dem kleinen Faktor ε behaftet, fortbleiben. Wir erhalten zunächst, falls man die Glieder etwas anders ordnet:

$$Q = \frac{\frac{1}{3}\eta^3 + \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2}\eta^2\right) - \varepsilon\eta^3\left(\frac{2}{3!} - \frac{1}{4!}\eta\right)}{\mathrm{Cos}\,\eta + \cos\eta - \varepsilon(\varepsilon^{-\eta} + \sin\eta)}.$$

Die beiden letzten Glieder im Zähler und Nenner sind für $\eta < 8$ beide negativ; die Fehler, die durch ihr Fortlassen entstehen, wirken also gegeneinander. Sie können in unserer Näherung fortbleiben da:

$$\frac{\varepsilon\eta^3\left(\frac{2}{3!} - \frac{1}{4!}\eta\right)}{\frac{1}{3}\eta^3 + \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2}\eta^2\right)} < \frac{\frac{1}{3}\varepsilon\eta^3}{\frac{1}{3}\eta^3} = \varepsilon$$

und:

$$\frac{\varepsilon(\varepsilon^{-\eta} + \sin\eta)}{\mathrm{Cos}\,\eta + \cos\eta} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

da $\mathrm{Cos}\,\eta + \cos\eta > 2$.

Damit sind wir für $\eta < 1{,}5$ zu der einfachen Formel:

$$Q = \frac{\frac{\eta^3}{3} + \varepsilon\left(1 + \frac{\eta^2}{2}\right)}{\mathrm{Cos}\,\eta + \cos\eta} \tag{28}$$

gelangt. Für sehr kleine η kann man den Nenner durch 2 ersetzen. Dann wird:

$$R = \frac{1}{c\bar{r}}\sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}}\left\{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\eta^2}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\eta}{3}\right)\right\} \tag{29}$$

und bei Berücksichtigung von (23), da jetzt Kupfer das dritte, Eisen das zweite Medium, also:

$$\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_2 \mu_3}},$$

$$R = \frac{1}{c\bar{r}}\sqrt{\frac{1}{\sigma_3 \tau}} + \frac{1}{c\bar{r}}\sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}}\left\{\frac{\eta^2}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\eta}{3}\right)\right\}. \tag{29a}$$

Bei sehr kleinem η, also bei sehr geringer Mantelstärke, entfernt sich der Widerstand R nur sehr langsam von dem Hochfrequenzwiderstande des Kupfers. Erst wenn η^3 mit ε vergleichbar wird, macht sich der Eisenmantel bemerkbar. Dann allerdings wächst R auch sehr rapide, eben wie η^3, um schließlich gemäß der Gleichung

$$R = \frac{1}{\bar{r}\,c}\sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2\,\tau}}\,\frac{\operatorname{Sin}\eta - \sin\eta}{\operatorname{Cos}\eta - \cos\eta} \tag{30}$$

in den Hochfrequenzwiderstand des Eisens (σ_2, μ_2) überzugehen. Für $\eta = 4$ ist dieser Zustand schon nahezu erreicht.

Den Verlauf von $\lg R$ in der Abhängigkeit von der Mantelstärke l zeigt Fig. 2; näheres über die Berechnung vgl. S. 52.

II. Eisenkern mit Kupfermantel. Dieser Fall ist interessanter und auch praktisch wichtiger. Wir bilden zunächst aus (24b) und (25):

$$\frac{1}{Q} = \frac{e^{+\eta} + e^{-\eta} - 2\cos\eta - 2\varepsilon(e^{-\eta} - \cos\eta) + \varepsilon^2 e^{-\eta}}{e^{+\eta} - e^{-\eta} + 2\sin\eta + 2\varepsilon(e^{-\eta} - \sin\eta) - \varepsilon^2 e^{-\eta}}. \tag{31}$$

Für große η kann man zunächst die Glieder mit ε^2 weglassen und weiterhin auch diejenigen mit ε. Bereits für $\eta = 1{,}5$ wird:

$$\frac{1}{Q} = \frac{2{,}3 - \frac{1}{4{,}5}\,\varepsilon}{3{,}3 + 1{,}2\,\varepsilon},$$

so daß die Glieder mit ε wegbleiben können. Es gilt also:

$$\frac{1}{Q} = \frac{\operatorname{Cos}\eta - \cos\eta}{\operatorname{Sin}\eta + \sin\eta}, \quad \eta > 1{,}5. \tag{32}$$

Für kleine η müssen wir zu Reihenentwicklungen greifen. Es ist:

$$\left\{\begin{aligned} e^{+\eta} + e^{-\eta} - 2\cos\eta &= 2\eta^2\left(1 + \frac{2}{6!}\eta^4 \ldots\right) \\ e^{+\eta} - e^{-\eta} + 2\sin\eta &= 4\eta\,\left(1 + \frac{1}{5!}\eta^4 \ldots\right) \end{aligned}\right. \tag{33}$$

und in den mit ε multiplizierten Gliedern:

$$e^{-\eta} - \cos\eta = -\,\eta\left(1 - \eta + \frac{1}{3!}\eta^2 + \frac{1}{5!}\eta^4 \ldots\right)$$

$$e^{-\eta} - \sin\eta = +\,1 - 2\eta + \frac{1}{2!}\eta^2 + \frac{1}{4!}\eta^4 \ldots$$

Für η nahe zu Eins überwiegen bereits die von ε freien Glieder; die Genauigkeit wird durch sie bestimmt. Wollen wir η^4 vernachlässigen, so muß also

$$\frac{1}{5!}\eta^4 = \frac{1}{120}\eta^4$$

sehr klein sein. Für $\eta = 1{,}2$ ist dieser Ausdruck $^1/_{99}$. (Die Vernachlässigung von η^4 wirkt in den von ε freien Gliedern gegeneinander.)

$\frac{1}{Q}$ läßt sich mit etwas anderer Anordnung der Glieder schreiben:

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\eta^2 + 2\eta\varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon\left[2\eta^2\left(1 - \frac{1}{3!}\eta\right) + \varepsilon(1 - e^{-\eta})\right]}{4\eta + 2\varepsilon - \varepsilon\left[2\eta\left(2 - \frac{1}{4}\eta\right) + \varepsilon e^{-\eta}\right]}$$

$$= \frac{2\eta^2 + 2\eta\varepsilon + \varepsilon^2}{4\eta + 2\varepsilon}\,\frac{1 - \delta_1}{1 - \delta_2} = \frac{2\eta^2 + 2\eta\varepsilon + \varepsilon^2}{4\eta + 2\varepsilon}\{1 - (\delta_1 - \delta_2)\},$$

wobei die δ_1 und δ_2 leicht ersichtliche Abkürzungen bedeuten. Da:

$$1 - e^{-\eta} = \eta - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{3!}\eta^3 \ldots < |\eta|,$$

so gilt:

$$\delta_1 = \varepsilon\frac{2\eta^2\left(1 - \frac{1}{3!}\eta\right) + \varepsilon(1 - e^{-\eta})}{2\eta^2 + 2\eta\varepsilon + \varepsilon^2} < \varepsilon\frac{2\eta^2 + \varepsilon\eta}{2\eta^2 + 2\varepsilon\eta + \varepsilon^2} < \varepsilon,$$

$$\delta_2 = \varepsilon\frac{2\eta\left(2 - \frac{1}{4}\eta\right) + \varepsilon e^{-\eta}}{4\eta + 2\varepsilon} < \varepsilon\frac{4\eta + \varepsilon}{4\eta + 2\varepsilon} < \varepsilon.$$

Es ist also $1/Q$ mit einem Fehler $< \varepsilon$ richtig dargestellt durch:

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\eta^2 + 2\eta\varepsilon + \varepsilon^2}{4\eta + 2\varepsilon} \qquad \eta < 1{,}2. \tag{34}$$

Nun stellt jetzt:

$$\frac{1}{c\bar{r}}\sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}} \cdot \frac{2}{\varepsilon} = \frac{1}{c\bar{r}}\sqrt{\frac{\mu_1}{\sigma_2 \tau}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_2 \sigma_2}{\mu_1 \sigma_1}} = \frac{1}{c\bar{r}}\sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_1 \tau}} \tag{35}$$

den Hochfrequenzwiderstand des Kernes (hier des Eisenkernes) ohne Mantel dar. Andererseits ist ($\mu_2 = 1$):

$$\frac{1}{c\bar{r}}\sqrt{\frac{1}{\sigma_2 \tau}}\,\frac{2}{\eta} = \frac{1}{c\bar{r}}\sqrt{\frac{1}{\sigma_2 \tau}} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_2 \tau}}\,\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2\pi r l \sigma_2}, \tag{36}$$

der Gleichstromwiderstand, welchen der Kupfermantel für sich bieten würde, wenn er etwa auf einen nichtleitenden Kern säße; $2\pi r l = q_2$ ist ja der Querschnitt des Mantels.

Nunmehr ist es nicht schwer, den Verlauf von R als Funktion von η anzugeben. Für sehr kleine η ($\eta < \varepsilon$) setzen wir in (34) für $\eta/\varepsilon = x$, so daß gilt:

$$R = \frac{1}{c\bar{r}}\sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}} \cdot \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 1} \tag{37}$$

oder noch übersichtlicher:

$$\frac{1}{R} = c\bar{r}\sqrt{\frac{\sigma_2 \tau}{\mu_2}}\left\{1 + \frac{2x^2}{2x+1}\right\}. \tag{37a}$$

Nach diesem Gesetz entfernt sich also mit wachsendem η oder x der Widerstand vom Hochfrequenzwiderstand des Eisens. Der Unterschied wird sehr bald erheblich, nämlich sobald η von der gleichen Größenordnung des sehr kleinen ε geworden ist. Für $\eta = \varepsilon$ ist bereits ($x = 1$):

$$R = \frac{3}{5}\frac{1}{c\bar{r}}\sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}}.$$

Für $\eta > \varepsilon$ führt man zweckmäßig

$$\frac{\varepsilon}{\eta} = y$$

ein. Dann wird

$$\frac{1}{R} = q_2 \sigma_2 \left\{1 + y\frac{y+1}{y+2}\right\}. \tag{38}$$

Mit wachsendem η wird y immer kleiner und kleiner. Da unsere Annäherung bis $\eta = 1{,}2$ etwa reicht, so wird es ein ganzes Bereich geben, wo

$$y\frac{y+1}{y+2} \text{ neben } 1$$

fortbleiben kann. Hier, also in der Umgebung von $\eta = 1$, ist der Hochfrequenzwiderstand des Eisendrahtes mit Kupfermantel nahezu gleich dem Gleichstromwiderstand des Kupfermantels auf isolierendem Material. Bei derselben Dicke des Mantels wird also ein ganzes Bereich von Wellenlängen nahezu denselben Widerstand haben.

Weiterhin weicht dann der Hochfrequenzwiderstand des verkupferten Eisendrahtes mit wachsendem η immer mehr von $q_2 \sigma_2$ ab, und nähert sich nach der Formel:

$$R = \frac{1}{c\bar{r}}\sqrt{\frac{1}{\sigma_2 \tau}}\,\frac{\operatorname{Sin}\eta + \sin\eta}{\operatorname{Cos}\eta - \cos\eta} \tag{39}$$

dem Hochfrequenzwiderstande eines massiven Kupferdrahtes, der bei $\eta = 4$ schon nahezu erreicht wird.

Übrigens ist die Annäherung des Widerstandes an den Wert für „unendlich“ große Schichtdicken keineswegs gleichmäßig, da die vom Kern zurückgeworfenen Wellen mit den

auftreffenden interferieren. Für hinreichend große η geht nämlich (39) über in:

$$R = \frac{1}{c\,\bar{r}}\sqrt{\frac{1}{\sigma_2\,\tau}}\{1 + e^{-\eta}(\sin\eta + \cos\eta)\},$$

worin $e^{-\eta}(\sin\eta + \cos\eta)$ bei $\eta = \pi$ ein Extremum hat, vgl. Fig. 3. Analoges folgt auch aus (30) für den Kupferdraht mit Eisenkern.

Besonders interessant ist das Gebiet, in dem der Widerstand für verschiedene Wellenlängen gleich wird. Solange Formel (38) gilt, können wir die Verhältnisse leicht übersehen, aber für größere η fehlt gerade eine gute Entwicklung. Wir geben eine etwas größere Fehlergrenze zu, und bemerken, daß bei $\eta = 1{,}2$ in Formel (34) sicher ε^2 fortgelassen werden kann, dann aber auch das Glied mit ε selbst, denn in

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\eta(\eta + \varepsilon)}{4\eta + 2\varepsilon}$$

steht bei $\eta = 1{,}2$ das ε direkt neben 1. In der letzten Formel wirken zwar die so entstehenden Fehler gegeneinander, aber möglicherweise addieren sich die Fehler zusammen mit den durch frühere Vernachlässigungen verursachten. Wenn Q frei von ε ist, gilt aber Formel (32), deren Gültigkeitsbereich wir also bei $\eta = 1{,}2$ herab ausdehnen. Wenn wir in (32) die Entwicklungen (33) einsetzen, erhalten wir:

$$\frac{1}{Q} = \frac{\eta}{2}\,\frac{1 + \frac{2}{6!}\eta^4}{1 + \frac{1}{5!}\eta^4} = \frac{\eta}{2}\left(1 - \frac{1}{180}\,\eta^4\right).$$

Also, mit Benutzung von (36):

$$\frac{1}{R} = q_2\,\sigma_2\left\{1 - \frac{1}{180}\,\eta^4\right\} \qquad \eta > 1{,}2. \tag{40}$$

Da nun (38) in dem in Frage kommenden Bereich um $\eta = 1$ y eine sehr kleine Zahl ist, so wird angenähert:

$$\frac{1}{R} = q_2\,\sigma_2\left\{1 + \frac{1}{2}\,y\right\} = q_2\,\sigma_2\left\{1 + \frac{\varepsilon}{2\eta}\right\};\ \eta < 1{,}2. \tag{41}$$

Wir wollen jetzt einen Metallmantel von gegebener Dicke voraussetzen und nach dem Wellenlängenbereich fragen, in dem

$$\frac{\left|\frac{1}{R} - q_2\,\sigma_2\right|}{q_2\,\sigma_2} < a$$

ist, wobei a eine vorgegebene Größe sein mag, die natürlich mit dem Gültigkeitsbereich der Formeln (40) und (41) im Einklang sein muß. Aus diesen Gleichungen folgt dann:

$$\frac{1}{\eta_1^2} = \sqrt{\frac{1}{180\,a}} \text{ und } \frac{1}{\eta_2^2} = \frac{4a^2}{\varepsilon^2}, \text{ wobei } \eta_1 > \eta_2 .$$

Da wir in Näherung $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta_1^2} + \frac{1}{\eta_2^2}\right)$ durch Eins ersetzen können, so folgt, da nach (26):

$$\frac{1}{\eta_\lambda} = \frac{1}{4\pi l}\sqrt{\frac{c}{\mu_2 \sigma_2}}\sqrt{\lambda_\lambda}$$

$$\frac{\frac{1}{\eta_2^2} - \frac{1}{\eta_1^2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta_2^2} + \frac{1}{\eta_1^2}\right)} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_1)} = \frac{4a^2}{\varepsilon^2} - \sqrt{\frac{1}{180\,a}} .$$

Da $\eta_1 > \eta_2$, ist bei angemessener Wahl von a die rechte Seite positiv. $\sqrt{\frac{1}{180\,a}}$ hängt nicht mehr von den Konstanten des Materials ab, sondern nur $4a^2/\varepsilon$. Soll der Widerstand über ein möglichst großes Wellenlängenbereich konstant sein, so muß also $4a^2/\varepsilon^2$ möglichst groß, also

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sigma_2 \mu_2}{\mu_1 \sigma_1}}$$

möglichst klein gewählt werden. Aus diesem Grunde ist die Wahl von Kupfer bei dessen großer Leitfähigkeit sehr günstig; das Eisen wird man mit möglichst großer Magnetisierungszahl und möglichst geringer spezifischer Leitfähigkeit nehmen. Für Eisendraht mit Kupfermantel ist ε etwa 0,08.

Bei $\eta = 1$ weicht $1/R$ nach (41) nur durch den Faktor $\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ von $q_2 \sigma_2$ ab, also in unserer Annäherung gar nicht. Möge dem Wert $\eta = 1$ die Wellenlänge λ_0 entsprechen, so findet man aus (41):

(41a) $$\frac{\frac{1}{R} - q_2 \sigma_2}{q_2 \sigma_2} \text{ oder nahezu: } \frac{\frac{1}{q_2 \sigma_2} - R}{R} = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_0}}, \quad \lambda_0 < \lambda$$

und aus (40):

(40a) $$\frac{\frac{1}{q_2 \sigma_2} + R}{R} = -\frac{1}{180}\,\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \qquad \lambda_0 > \lambda .$$

Ist λ selbst 9mal größer als λ_0, so folgt aus (41a) für die prozentuelle Änderung von R erst $^3/_2\,\varepsilon$; also für unseren Fall etwa um 12 Proz. Die Unabhängigkeit des Widerstandes von der Wellenlänge ist also um so besser, je kleiner ε ist.

Ist dagegen $\lambda = \frac{1}{2}\lambda_0$, so ist nach (40a) die prozentuelle Widerstandsänderung 9 Proz.; ihre Größe ist in diesem Bereich ($\eta > 1$) unabhängig von den genauen Konstanten des Materials. Diese Zahlenangaben sind nur Überschlagswerte, da ihre Größe nahe mit den von uns vernachlässigten Werten übereinstimmt.

§ 4. Vergleich mit den Beobachtungen von F. Trautmann.

Um die Resultate von Hrn. Trautmann mit unseren Formeln zu vergleichen, haben wir zunächst nachzusehen, in wie weit die Voraussetzungen der Theorie erfüllt sind, d. h. ob

$$k_2 \bar{r} = (1 - i) \cdot 2\pi \sqrt{\frac{\mu\sigma}{c^2 \tau}} \cdot \bar{r}$$

so groß ist, daß die Anwendung der asymptotischen Werte der Besselschen Funktionen gestattet ist. Für Kupfer ist etwa $\sigma = 5 \cdot 10^{17}$, für Eisen $\sigma = 5 \cdot 10^{16}$, $\mu > 50$; ϱ war 0,1 cm und für λ setzen wir 900 m, so daß $\tau = 3 \cdot 10^{-6}$ Sek. Daraus ergibt sich

$$\text{für Kupfer: } |k_2 \bar{r}| = 11.$$
$$\text{Eisen: } |k_2 \bar{r}| = 25.$$

Für diese Werte des Arguments bilden aber die asymptotischen Darstellungen bereits eine recht gute Näherung; besonders bei Eisen ist der Fehler bereits recht klein.

Unter diesen Umständen führt die Theorie für den Hochfrequenzwiderstand eines massiven Drahtes auf die Beziehung[1]):

$$R = \frac{1}{\bar{r}\,\sigma} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma\tau}} + \frac{R_0}{4},$$

wobei R_0 der Gleichstromwiderstand ist. Das Glied $R_0/4$ ist nun in der Tat bei den vorliegenden Versuchen sehr klein und erreicht im Maximum bei Kupfer 6 Proz. bei Eisen und Stahl 1,8 bzw. 1,6 Proz., so daß wir es in der Tat vernachlässigen können und die Anwendung unserer Formeln bei $\lambda = 900$ m gesichert ist. Es

1) Vgl. M. Abraham, Math. Encykl. V. 2. S. 517.

müssen sich zunächst die an den massiven Drähten gemessenen Widerstände wie $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ verhalten. Wir finden für die Verhältnisreihe

$$: \sqrt{\lambda_{50}} : \sqrt{\lambda_{150}} : \ldots = \frac{1}{R_{50}} : \frac{1}{R_{15}} \ldots$$

	1	1,41	1,76	2,42	3,16	4,23
für Eisen	= 1	1,85	1,62	2,19	2,74	3,50
„ Stahl	= 1	1,85	1,62	2,26	2,88	3,80
„ Kupfer	= 1	1,40	—	2,38	3,22	4,10

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung bei Kupfer befriedigend, bei Eisen weniger gut, vor allem systematisch abweichend, obwohl hier die Voraussetzungen der Annäherung besser erfüllt sind. Man wird diese Abweichungen darauf zurückführen, daß μ im Eisen und Stahl nicht in allen Fällen denselben Wert hat. Es kann sein, daß μ hier bereits von der Wellenlänge abhängt, oder aber auch, daß μ an der Oberfläche des Drahtes einen anderen Wert hat, als im Inneren, so daß für kurze Wellen, welche weniger tief eindringen, andere Werte von μ im Mittel in Frage kommen, als für lange Wellen.

Leider sind auch die Leitfähigkeiten der Mäntel nicht sicher bekannt. Wollte man z. B. die Leitfähigkeit des Kupfers aus dem Grenzwert für große Mantelstärke ($l = 0{,}0061$ cm, η ca. 4,5) bei $\lambda = 50$ m nach der Rayleighschen Formel berechnen, welche hier sicher wegen der geringen Eindringungstiefe gut anwendbar ist, so würde sich ein 1,46 mal *größerer* Wert ergeben, als aus den Messungen am massiven Kupferdraht folgen würde. Ob dieser Effekt reell ist, oder die Oberfläche anders leitet als das Innere des Drahtes, muß dahin gestellt bleiben.

Die Tiefe, in welcher die Amplitude auf den e^{ten} Teil herabgesunken ist, ergibt sich aus der folgenden Tabelle:

Tabelle 1.

	$\lambda = 50$ m	300 m	900 m
Eisen	0,005	0,012	0,021 mm
Kupfer	0,013	0,032	0,055 mm

Aus diesen Gründen mußte auf eine vollkommen exakte quantitative Vergleichung zwischen Theorie und Beobachtung verzichtet werden. Die Kurven Figg. 2 und 3 wurden mit:

$$\sigma_{Cu} = 5{,}3 \cdot 10^{17},\ \sigma_E = 5{,}7 \cdot 10^{16},\ \mu_E = 67$$

berechnet, Werte, die angenähert den vorliegenden Messungen entsprochen haben dürften. Als Ordinate wurde der Logarithmus des hundertfachen Widerstandes eines Drahtes von 1 m Länge und 1 mm Radius aufgetragen.

Kupferkern mit Eisenmantel.

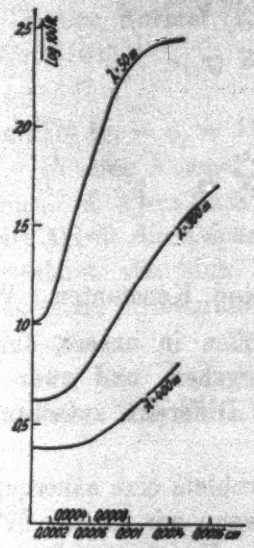


Fig. 2.

Eisendraht mit Kupfermantel.

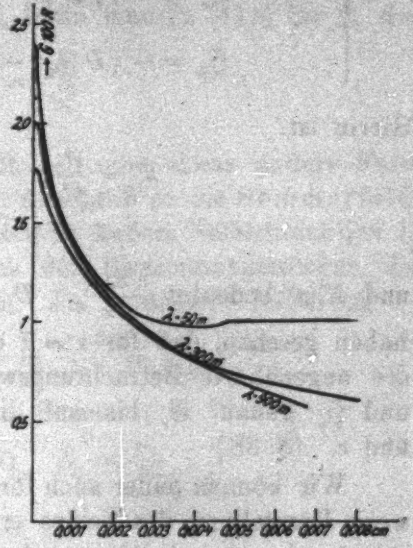


Fig. 3.

Diese Kurvenbilder entsprechen durchaus den Beobachtungen von Hrn. Trautmann.

§ 5. Berechnung des Feldes außerhalb des Leiters und Verallgemeinerung der erhaltenen Resultate.

Unsere Annäherung schränkt von vornherein die Gültigkeit unserer Formeln auf die unmittelbare Nähe der Oberfläche des Drahtes ein. Innerhalb des Drahtes reicht diese Betrachtungsweise aus, solange das Feld sehr wenig in den Leiter eindringt. Im Außenraume geben in einiger Entfernung von der Drahtoberfläche unsere Formeln kein Bild des wirklichen Zustandes, vielmehr muß für die Variabeln z oder r an Stelle der e-Funktion, die Besselsche Funktion $K(x)$ treten. Die Lösungen (für den Außenraum) der Maxwellschen Glei-

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 67. S. 233. 1899. Vgl. auch M. Abraham, Math. Encykl. V. 2. S. 528; doch ist hier das Maßsystem ein anderes, es steht σ wo bei uns $4\pi\sigma$ steht.

chungen in Zylinderkoordinaten sind[1]), falls das erste Medium das Vakuum ist:

$$(40)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = D(k_1^2 - q^2)\, K(x_1)\, e^{i\nu\left(t - \frac{q}{\nu} z\right)} \\ \mathfrak{E}_r = -iqD(k_1^2 - q^2)^{1/2}\, K'(x_1)\, e^{i\nu\left(t - \frac{q}{\nu} z\right)} \\ \mathfrak{H}_\varphi = -iD(k_1^2 - q^2)^{1/2} \frac{\nu}{c} K'(x_1) e^{i\nu\left(t - \frac{q}{\nu} z\right)}. \end{cases}$$

Hierin ist:

$$k_1 = \frac{\nu^2}{c^2}; \qquad k_2^2 = \frac{\nu^2}{c^2}\, n_2^2$$

$$x_1 = \sqrt{k_1^2 - q^2}\, r$$

und $K'(x)$ bedeutet $\frac{dK(x)}{dx}$. D und q sind Konstanten. Wir haben gesehen, daß für $r = \bar{r}$ diese Größen in unsere, durch die angenäherte Betrachtungsweise übergehen, und zwar $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ genau, $\mathfrak{E}_r$ bis auf die kleine Differenz zwischen q und c. (S. 38.)

Wir können daher auch für unser Problem eine näherungsweise Darstellung des Feldes erlangen, wenn wir für die Feldstärken den Ansatz (40) machen und die Konstanten D und q so bestimmen, daß etwa die tangentiellen Komponenten in unsere Werte (4, 4a) übergehen; dann geht auch $\mathfrak{E}_r$ angenähert in (4) über.

Da D nur ein Faktor ist, welcher die absolute Größe der Amplitude bestimmt, so bleibt q aus der Gleichung zu berechnen:

$$(41)\quad \left[\frac{\mathfrak{E}_z}{\mathfrak{H}_\varphi}\right]_{r=\bar{r}} = i\frac{c}{\nu}(k_1^2 - q^2)^{1/2} \frac{K(\bar{x}_1)}{K'(\bar{x}_1)}.$$

Nun ist $\bar{x}_1$ immer eine sehr kleine Größe, solange der Drahtradius klein gegen die Wellenlänge ist. Man kann dann $K(\bar{x}_1)$ und $K'(\bar{x}_1)$ näherungsweise setzen:

$$K(\bar{x}_1) = \lg \frac{2i\gamma}{\bar{x}_1} = \frac{1}{2\Theta}; \quad K'(\bar{x}_1) = \frac{-1}{\bar{x}_1}.$$

2Θ ist eine Abkürzung. Θ ändert sich sehr wenig mit $\bar{r}$.[1]) Führt man für $\bar{x}_1$ seinen Wert ein, so erhält man:

1) A. Sommerfeld, a. a. O., S. 272f.

$$(41\,a)\qquad \begin{cases} k_1^2 - q^2 = i\frac{\nu}{c}\left[\frac{\mathfrak{E}_x}{\mathfrak{H}_\varphi}\right]_{r=\bar{r}} \frac{2\Theta}{\bar{r}} \\ \qquad\qquad = i\frac{\nu}{c}\gamma_1 \frac{2\Theta}{\bar{r}} \text{ wegen (4) und (4a).} \end{cases}$$

Für einen massiven Draht kommt man, wie es ja schon nach den Überlegungen S. 38 zu erwarten ist, zu der Sommerfeldschen Formel (13) zurück, wenn man in (41a) für γ_1 den Wert (10b)

$$\gamma_1 = \frac{\mu_2}{\pi_2}$$

einführt ($\mu_1 = \pi_1 = 1$).

Unserer Formel (41a) läßt sich eine etwas andere Form geben. M. Abraham[1]) hat im Anschluß an die Sommerfeldsche Arbeit die Kapazität C und die äußere Selbstinduktion L_a berechnet, die sich allein aus den Bestimmungsstücken des Feldes im Außenraum ergeben. Da in unserer Näherung

$$-\frac{K(\bar{x}_1)}{\bar{x}_1 K'(\bar{x}_1)} = +\lg\frac{2i\gamma}{x} = \frac{1}{2\Theta},$$

so werden die Abrahamschen Formeln:

$$C = \varepsilon_1\Theta; \quad L_a = \frac{\mu_1}{\Theta}$$

und

$$C L_a = \varepsilon_1\mu_1$$

stellt das Verhältnis der Geschwindigkeit einer homogenen Welle im ersten Medium zur Lichtgeschwindigkeit im Vakuum dar. Es ist also:

$$k_1^2 = \frac{\nu^2}{c^2} L_a C,$$

während q mit der Geschwindigkeit ω der Drahtwelle zusammenhängt:

$$q^2 = \frac{\nu^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{\omega^2}\cdot$$

Wir können daher (41a) schreiben:

$$q^2 = \frac{\nu^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{\omega^2} = \left(\frac{\nu^2}{c^2} L_a - i\nu\frac{\gamma_1}{c\bar{r}}\right) C.$$

Nun ist nach S. 40:

$$\frac{\gamma_1}{\bar{r}c} = \frac{1}{2}\left(R + i\nu\frac{L_i}{c^2}\right).$$

---

1) M. Abraham, Math. Encykl. V. 2. S. 580. Formel 55d und 55e. Es ist $1/2\,\Theta = \zeta$ bei Abraham.

Daher ergibt sich:

$$\frac{c^2}{\omega^2} = \left(L_a + L_i - i\frac{c^2}{\nu} R\right) C .$$

$L = L_a + L_i$ ist die gesamte Selbstinduktion, so daß man auch schreiben kann:

$$q^2 = \frac{\nu^2}{c^2} LC - i\nu RC.$$

Eine analoge Formel ist für das System zweier Paralleldrähte von E. Cohn[1]) auf einem anderen Näherungswege gefunden.

Die Methode der vorhergehenden Abschnitte bestand darin, daß die an ebenen Grenzflächen gewonnenen Resultate auf zylindrisch gekrümmte Flächen übertragen wurden. Dieses Verfahren ließ sich, wie in der Einleitung gezeigt wurde, aus dem Verhalten der Besselschen Funktionen für große Argumente auch mathematisch rechtfertigen, und führte für den Fall des einfachen Drahtes zu fast denselben Resultaten, wie die strenge Behandlung durch Sommerfeld. Es liegt nun nahe, diese Übertragung nicht auf den Fall des Kreiszylinders zu beschränken, und z. B. den Fall einer Schiene mit abgerundeten Ecken nach derselben Methode zu behandeln, wenn vorausgesetzt wird, daß die Krümmungsradien alle groß neben der Eindringungstiefe sind. Aus den Formeln von S. 39 u. 40 ergibt sich daraus ohne weiteres:

$$R = \frac{\mu_1}{n_1} \frac{\pi}{c(\pi\bar{r} + B + D)} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}},$$

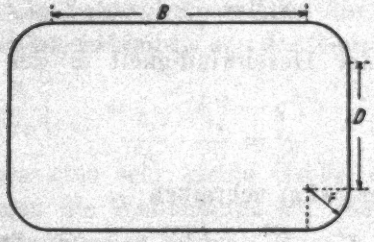


Fig. 4.

wenn $\bar{r}$, B und D die aus Fig. 4 ersichtliche Bedeutung haben. Für verschwindende D und kleine $\bar{r}$ bei großem B kommt man zu dem Widerstand eines Bleches von der Dicke $2\bar{r}$:

1) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld S. 475ff.; M. Abraham, Math. Encykl. V. 2. S. 526.

$$R = \frac{\mu_1}{n_1} \frac{\pi}{c(\pi\bar{r} + B)} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}},$$

ein Ausdruck, der sich für sehr große B und kleine $\bar{r}$, also für relativ dünne Bleche zu

$$R = \frac{\mu_1}{n_1} \frac{\pi}{cB} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}}$$

vereinfacht.

Zusammenfassung.

Unter der Voraussetzung, daß die elektrischen Wellen nur wenig in den Leiter eindringen, läßt sich ihre Fortpflanzung an metallischen Drähten mit leitendem Mantel angenähert behandeln und der Widerstand solcher Drähte angeben. Speziell diskutiert wurden die Fälle eines Kupferdrahtes mit Eisenmantel und eines verkupferten Eisendrahtes. In beiden Fällen liefert die Theorie eine Abhängigkeit des Widerstandes von der Mantelstärke, welche den Beobachtungen von F. Trautmann entspricht. Praktisch wichtig ist vielleicht der Fall eines verkupferten Eisendrahtes. Hier führen Theorie und Beobachtung nämlich zu dem Resultat, daß bei geeigneter Mantelstärke der Widerstand nur wenig mit der Wellenlänge variiert.

(Eingegangen 13. Februar 1923.)

3. *Erwiderung auf die Bemerkungen Einsteins über meine Arbeit „Beiträge zum kosmologischen Problem“*

(Ann. d. Phys. 68. S. 281. 1922; 69. S. 436. 1922);

von Franz Selety.

Herr Einstein hatte die Freundlichkeit, meiner Arbeit „Beiträge zum kosmologischen Problem“ Bemerkungen zu widmen. In einigen Punkten haben meine Darlegungen zu Mißverständnissen Anlaß gegeben.

Die Hauptergebnisse meiner Abhandlung waren:

1. Kleine mittlere Sterngeschwindigkeiten sind mit beliebig großen kosmischen Potentialdifferenzen vereinbar, da Körper mit sehr großen Geschwindigkeiten dennoch überall *genügend selten* auftreten können. Unendlichkeit der Potentialdifferenz gegen das Unendliche ist durch die Erfahrung nicht ausgeschlossen, da diese bloß Endlichkeit der Beschleunigungen erfordert. Die Theorie der isothermen Gaskugel und G. H. Darwins Rechnungen lehren (auf Grund der Newtonschen Theorie), daß sich eine kugelsymmetrische Welt mit unendlicher Masse, in der die Dichte wie r^{-2} verschwindet und das Potential wie $\ln r$ oder noch langsamer unendlich wird, bei beliebig kleinen mittleren Sterngeschwindigkeiten im statistischen Gleichgewicht befinden kann (die Sterne als Atome betrachtet). (S. 292—295.)

2. In der Welt, die ich die molekularhierarchische genannt habe[1]), liegt das Potential an der Oberfläche eines

---

1) Außer den angeführten Schriften von Fournier d'Albe, Charlier und Borel über diese Materieverteilung habe ich inzwischen noch von folgenden erfahren, die teils vor, teils nach meiner Arbeit erschienen sind: H. Holst, Die kausale Relativitätsforderung und Einsteins Relativitätstheorie. Danske Videnskabernes Selskab, Mathematisk-fisiske Meddelelser II. S. 11. 1919. (Vgl. Abschnitt V, S. 51 ff.) W. D. Mac Millan, Some postulates of cosmology. Scientia, Februar 1922; und La densité

Systems $n$ter Ordnung (nach der Newtonschen Theorie betrachtet) über einer bestimmten angegebenen Schranke.[1]) (S. 301 bis 302, Anm.) Es ist nicht unwahrscheinlich, daß auch hier langsames Unendlichwerden des Potentials die Bedingung für Gleichgewicht zwischen den aus irgendeinem System entfliehenden und in dasselbe eindringenden Körpern ist. Die Grenze, für die das Potential unendlich wird, ist auch hier wie im kugelsymmetrischen System proportionales Wachsen der Massen und Lineardimensionen, bzw. Verschwinden der mittleren Dichten wie r^{-2}. Ein solcher Aufbau der Welt empfiehlt sich auch aus allgemeinen Gründen, da bei Proportionalität aller Längen, Zeiten und Massen die Systeme verschiedener Größe einander dynamisch ähnlich sind. (S. 303—304.)

3. Eine molekularhierarchische Materieverteilung kann in keiner endlichen Zeit in eine angenähert gleichmäßige übergehen und kann (unter geeigneten Annahmen) in keiner endlichen Zeit den molekularhierarchischen Charakter verlieren. (S. 306—307.)

4. Eine molekularhierarchische Welt (die sicherlich nicht in dem groben Sinn wie eine kugelsymmetrische einen Mittelpunkt hat) kann, aber muß nicht ein endliches Gebiet besitzen, in dem schließlich bei Betrachtung immer umfassenderer materieller Systeme die Schwerpunkte verbleiben. In einer speziellen Schematisierung ergab sich die Mannigfaltigkeit der Konstruktionen, die zu einem Mittelpunkt führen, als von abzählbarer Mächtigkeit, die zu einer Welt ohne Mittelgebiet führen, von der Mächtigkeit des Kontinuums. (S. 308—312.)

5. Machs Hypothese, daß in Inertialsystemen die mittlere Beschleunigung *und Rotation* aller Massen verschwindet, ist in der molekularhierarchischen Welt erfüllt. (S. 322—325.)

6. Wenn die Massen der Systeme wie die Lineardimensionen (oder schneller) wachsen, ist zwar die Geschwindigkeit jedes Körpers in jedem Inertialsystem nach der Newtonschen Me-

---

moyenne de l'univers peut-elle être finie? Compt. rend. 175. Nr. 22. S. 1044. 1922. A. Costa, À propos d'une note de M. Borel. Compt. rend. 175. Nr. 24. S. 1190. 1922.

1) Vgl. auch die Berechnung des Potentials in der molekularhierarchischen Welt bei Holst a. a. O. S. 54, die im wesentlichen zu dem gleichen Ergebnis wie meine führt.

chanik endlich, nach der der speziellen Relativitätstheorie kleiner als c, die mittlere Relativgeschwindigkeit immer entfernterer Körper nähert sich aber nach der einen ∞, nach der anderen c, so daß in jedem Koordinatensystem die mittlere Geschwindigkeit aller Körper der Welt jenen Grenzwerten gleichkommt. Es gibt dann kein Koordinatensystem, in dem die Materie der Welt im Durchschnitt ruht oder eine kleinere Geschwindigkeit als c hat, und keines der Inertialsysteme ist zur Beschreibung der Gesamtwelt vor einem anderen im mindesten bevorzugt.[1]) (S. 328—332.) — Da ich in bezug auf den früheren Punkt (5.) (z. B. S. 324) darauf hinwies, daß jene Betrachtungen mit der allgemeinen Relativitätstheorie nicht im Widerspruch stehen, so war es ein Fehler, hier nicht zu erwähnen, daß sich das soeben Dargelegte *nicht ohne weiteres* auf die allgemeine Relativitätstheorie übertragen läßt. Meine Betrachtungen setzen nämlich Unendlichkeit der Potentialdifferenz gegen das Unendliche voraus, was nach der allgemeinen Relativitätstheorie mit einer im großen angenähert Minkowskischen Welt nicht vereinbar ist.

Herr Einstein schrieb: „Die molekularhierarchische Welt erfüllt ebenso wenig wie die ‚Inselwelt' das Machsche Postulat, nach welchem die Trägheitswirkung des einzelnen Körpers durch die Gesamtheit der übrigen im gleichen Sinne bedingt sein soll wie seine Gravitationskraft."

Ich habe nun im zweiten Teile meiner Arbeit ausgeführt:

A. daß Machs Annahme, daß in den Inertialsystemen, bzw. nach der allgemeinen Relativitätstheorie, in den der Weltmetrik im großen angepaßten Koordinatensystemen die Beschleunigung *und Rotation* der

1) Wie ich nach Veröffentlichung meiner Arbeit erfuhr, hat H. Holst 1919 den Gedanken ausgesprochen, daß in der „molekularhierarchischen" Welt beliebig bewegte Koordinatensysteme für die Beschreibung des Gesamtkosmos gleichberechtigt seien (a. a. O. S. 56). Er bezieht dies jedoch auch auf die ungleichförmige Translation und Rotation, was nach meinen Ergebnissen nicht möglich ist. Ferner verlangt Holst Endlichkeit der Potentialdifferenzen gegen das Unendliche, was quasistatische Materieverteilung (kleinere mittlere Relativgeschwindigkeit als c) erfordert, so daß sich dann ein Koordinatensystem finden läßt, in dem die Materie im Durchschnitt ruht, bzw. Minimalgeschwindigkeit hat.

Gesamtmaterie im Durchschnitt verschwinde, eine Hypothese ist, der keine erkenntnistheoretische Notwendigkeit zukommt. (Darauf haben bereits Schlick, De Sitter u. a. hingewiesen.)

B. daß jene Hypothese Machs plausibel und in der molekularhierarchischen Welt erfüllt ist.

Ich habe nicht behauptet, daß in der molekularhierarchischen Welt die weitergehende Forderung Einsteins, die er „Machsches Prinzip" genannt hat, erfüllt sei (daß das G-Feld durch den $T_{\mu\nu}$-Tensor bestimmt sei) und auch nicht, „daß die Trägheitswirkung des einzelnen Körpers durch die Gesamtheit aller übrigen im gleichen Sinn bestimmt sein soll wie seine Gravitationskraft". Ich habe ja mit meinen Überlegungen über die Bestimmung der Inertialsysteme durch die Materieverteilung (ebenso wie seinerzeit Mach) an die Newtonsche Mechanik angeknüpft (S. 315 f.), so daß von einer Bestimmung der Trägheit durch die Materie der Welt *in dem gleichen Sinn* wie der Gravitation bei mir nicht die Rede ist. Wenn ich also (S. 325) schrieb, daß die Trägheit durch die Materieverteilung bestimmt sein könne, so meinte ich dies *nicht in demselben Sinn* wie Einstein, sondern bloß in einem solchen (weniger weitgehenden), in dem man auch auf Grund der Newtonschen Mechanik davon sprechen kann. Es ist dies dann der Fall, wenn man durch praktische Bestimmung von Koordinatensystemen in bezug auf immer umfassendere Massen nach der Methode, nach der zunächst das in bezug auf die Erde, sodann — angenähert — das in bezug auf das Fixsternsystem im Mittel ruhende bestimmt wurde) sukzessiv einem Inertialsystem immer näher kommt. Wenn ich ferner (ebenfalls S. 325) schrieb, daß die Materie alle Maßverhältnisse bestimmen könne, so meinte ich dies ebenfalls in einem anderen Sinne als Einstein.[1])

---

1) Ich hatte dabei den Gedanken im Auge, daß sicherlich (wie vor allem Helmholtz betont hat) alle unsere räumlichen und zeitlichen Maße auf dem Verhalten der „Materie" im weitesten Sinne beruhen. In diesem Sinne verlangt Bestimmtheit des *metrischen* Feldes, daß *überall* etwas *physikalisch Bestimmtes* (mag man es „Materie", „Äther" oder wie immer nennen) vorhanden ist. Darum legte ich auch im ersten Teile meiner Arbeit auf die triviale (aber bisweilen verkannte) Tatsache so-

Ich hatte betont, daß die nach der Newtonschen Mechanik vorhandene Möglichkeit, daß es in bezug auf die als ruhend gedachte Gesamtmaterie ein Zentrifugalfeld gebe, bzw. daß die Gesamtmaterie im Durchschnitt in den Inertialsystemen rotiere, etwas *erkenntnistheoretisch* durchaus Denkbares ist. Dasselbe gilt auch für das analoge, in Hrn. Einsteins Bemerkungen zur Illustrierung fingierte, homogene Beschleunigungsfeld in bezug auf die Gesamtmaterie. Es ist freilich eine plausible *Hypothese*, daß in einem Koordinatensystem, in dem die *Weltmaterie* im Durchschnitt *nicht rotiert*, *kein* kosmisches *Zentrifugal-* und Coriolisfeld vorhanden ist, ebenso wie die schon in der Newtonschen Mechanik enthaltene *analoge* Annahme, daß in einem Koordinatensystem, in dem die *Materie* im Durchschnitt *keine* translatorische *Beschleunigung* hat, *kein* kosmisches homogenes *Beschleunigungs*feld vorhanden ist. Wäre das Zentrifugalfeld oder auch das homogene Gravitationsfeld vorhanden, dann wäre das physikalische Weltbild etwas komplizierter als wenn dies nicht der Fall ist, da dann eine besondere fundamentale Konstante zu den übrigen hinzukäme. Nimmt man aber, um diese durch die Feldgleichungen offen gelassene *Möglichkeit* auszuschließen, die Endlichkeit des Raumes an, dann führt man ja gerade *sicher* eine weitere Konstante ein. Wenn in einer unendlichen quasieuklidischen Welt *tatsächlich* jene besonderen Konstanten (des Zentrifugalfeldes usw.) nicht notwendig sind, dann scheint mir das Weltbild befriedigend, obwohl dann nach der allgemeinen Relativitätstheorie das metrische Feld durch den $T_{\mu\nu}$-Tensor sicherlich nicht bestimmt, sondern nur gewissermaßen ein wenig „gestört" wird.

Indem ich betonte, daß nicht einmal die zu der Newtonschen Theorie hinzugefügte Hypothese, daß in den Inertial-

---

viel Gewicht, daß das Verschwinden der mittleren Dichte der Welt mit vollständiger Raumerfüllung oder mit dem Vorhandensein einer Dichte größer als Null in jedem Raumpunkte vereinbar ist. (S. 283 ff.) Die Bestimmtheit aller metrischen Beziehungen durch den physikalischen Weltinhalt im Sinne von Helmholtz ist auch auf Grund der älteren Physik möglich. In diesem allein erkenntnistheoretisch notwendigen Sinn, in welchem *nichts* über die besondere Beschaffenheit der Naturgesetze folgt, sprach ich von der Bestimmung der Maßverhältnisse durch die „Materie".

systemen die Materie im Durchschnitt nicht rotiere, erkenntnistheoretisch notwendig ist, habe ich a fortiori zum Ausdruck gebracht, daß dies auch für das viel mehr enthaltende „Machsche Prinzip" Einsteins gilt. Auf die Erfüllung dieses Prinzips muß man allerdings bei einem im großen euklidischen Raum verzichten, aber es scheint mir (ebenso wie De Sitter, Eddington u. a.), daß man sich dazu entschließen kann — trotz der Gravitationseffekte zweiter Ordnung der allgemeinen Relativitätstheorie, die sich als Analoga der Trägheit deuten lassen. Dies gilt besonders dann, wenn die erwähnte Hypothese über die Rotation erfüllt ist, was in der molekularhierarchischen Welt der Fall ist.

Herr Einstein schrieb ferner: „Es sei endlich noch ein weiterer Punkt erwähnt, der nicht nur in der Seletyischen Abhandlung, sondern vielfach in der einschlägigen Literatur Verwirrung stiftet. Die Relativitätstheorie sagt: Die Naturgesetze sind unabhängig von jeder besonderen Koordinatenwahl zu formulieren. . . . Das Relativitätsprinzip behauptet nicht, daß die Welt gegenüber allen Koordinatensystemen in gleich einfacher oder gar in gleicher Weise zu beschreiben sei" usw.

Es lag mir sicherlich fern, irgend jemandem eine derart unmögliche Auffassung wie die letztere zuzuschreiben. — Die Unterscheidung zwischen der allgemeinen Kovarianz der *Gesetze* und der Bevorzugung bestimmter Koordinatensysteme für die Beschreibung der konkreten Wirklichkeit habe ich selbst hervorgehoben (S. 325 ff.). Indem ich betonte (S. 327 Anm.), daß die Gründe, die mir gegen die Auszeichnung eines bestimmten Bewegungszustandes oder einer bestimmten *Zeitrichtung* in der vierdimensionalen Welt zu sprechen scheinen, die gleichen sind, die gegen die Auszeichnung eines bestimmten *Raumgebiets* (Weltmittelpunktes) sprechen, habe ich zum Ausdruck gebracht, daß es sich hierbei nicht um eine Frage handelt, die die allgemeinen mechanischen Gesetze und ihre für mehr oder weniger umfassende Gruppen kovariante Darstellung berührt. — Meine Ausführungen über die Auszeichnung von Koordinatensystemen waren sonach, wie ich glaube von Verwirrung im Hinblick auf die von Einstein hervorgehobenen Unterscheidungen frei. Ich habe bloß auf Gesichtspunkte Ge-

wicht gelegt, die meiner Meinung nach nicht immer genügend in den Vordergrund gestellt werden.

Ich bin allerdings der Ansicht, daß die *Auszeichnung von Koordinatensystemen* für die Beschreibung des Gesamtkosmos für unser Weltbild auch auf Grund der allgemeinen Relativitätstheorie *von sehr großer Wichtigkeit* ist (wie schon Mie, Holst u. a. betont haben). Daß sie nicht gleichgültig ist, ist sicherlich auch Einsteins Ansicht, ein Unterschied der Meinung kann nur darüber bestehen, *wie viel* Gewicht darauf zu legen ist.

Herr Einstein schrieb: „Wenn ich z. B. die wirkliche Welt durch die ‚Zylinderwelt' mit gleichmäßig verteilter Masse approximiere und dabei die Zeitachse parallel der Erzeugenden des ‚Zylinders' wähle, so bedeutet dies nicht die Einführung einer ‚absoluten Zeit'." Ob es eine „absolute Zeit" gibt, wenn einerseits die Einsteinsche Gravitationstheorie gilt und andererseits die wirkliche Welt angenähert eine Zylinderwelt ist, hängt natürlich davon ab, was man unter der „absoluten Zeit" versteht. Es scheint mir aber, daß jene keine unangemessene Ausdrucksweise anwenden, die in diesem Falle von dem Vorhandensein einer absoluten Zeit sprechen und die das Dasein einer solchen im physikalischen Weltbild davon abhängig machen, ob es für die *Beschreibung des konkreten Kosmos* eine ausgezeichnete Zeitachse gibt. In *diesem* Sinn gibt es auch dann schon eine absolute Zeit, wenn die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie gelten und wenn die Gesamtmaterie quasistatisch ist. Wenn das letztere *nicht* der Fall ist, dann kann der Physiker mit Recht geltend machen, daß, wenigstens in seinem Weltbild, eine absolute Zeit bedeutungslos ist, und die Lorentzsche Auffassung bedeutet dann eine überflüssige Komplizierung desselben. Wenn aber eine quasistatische Materieverteilung vorliegt, dann gilt dies nicht mehr in jedem Sinne. Dies hat sehr klar Helge Holst ausgeführt.[1])

Im Zusammenhange meiner Arbeit kam es mir bei der Besprechung der Auszeichnung von Koordinatensystemen darauf

---

1) H. Holst, Zeitschr. f. Phys. 1. S. 32 ff. 1920; Danske Meddelelser a. a. O. Abschnitt I.

an, daß, wenn die Welt im großen angenähert Minkowskisch ist, es eine der Weltmetrik im großen angepaßte Schar von Koordinatensystemen gibt, die den Inertialsystemen der speziellen Relativitätstheorie analog sind. Dann ist im Sinne der Annahme, daß die Weltmetrik und die Verteilung der Weltmaterie einander angepaßt sind, anzunehmen, daß in den genannten Koordinatensystemen die (irgendwie geeignet definierte) mittlere Beschleunigung und Rotation der Gesamtmaterie verschwindet. Während nun durch die Weltmetrik der im großen Minkowskischen Welt die Schar der in dieser geradlinig-orthogonalen (bzw. angenähert so beschaffenen) Koordinatensysteme ausgezeichnet ist, besteht keine Auszeichnung unter diesen durch die *geometrische* Struktur der Minkowskiwelt. Es liegt nun im Sinne der *Forderung des Ausschlusses von Singularitäten* (natürlich nicht im funktionentheoretischen Sinn) das Prinzip nahe, daß, *soweit durch die weltgeometrische Struktur im großen keine Auszeichnung besteht, auch durch die Materieverteilung im großen keine Auszeichnung besteht.* Ebenso wie nun durch diese Annahme verlangt wird, daß keine bestimmte *zeitliche Weltlinie* bzw. kein *Punkt* im dreidimensionalen Raum durch die Materieverteilung ausgezeichnet sei, ebenso wird dadurch verlangt, daß in einer Minkowskiwelt durch die Materieverteilung keine *zeitliche Richtung* ausgezeichnet sei. Beide Annahmen sind einander analog.

Ich habe auf Grund der Newtonschen und der speziellen Relativitätstheorie gezeigt, daß die molekularhierarchische Materieverteilung derart beschaffen sein kann, daß einerseits diese Verteilung in dem früher besprochenen Sinn der geometrischen Struktur der Minkowskiwelt (bzw. Galileiwelt) angepaßt ist und daß andererseits *weder* eine *singuläre Zeitlinie* (Mittelpunkt des Raumes) *noch auch nur* eine *ausgezeichnete Zeitrichtung* (quasistatisches Verhalten der Materie) vorhanden ist. *Die molekularhierarchische Materieverteilung ermöglicht also, ohne mit den älteren Einwänden gegen die unendliche Welt oder mit dem Verödungseinwand in Konflikt zu geraten, die Existenz einer im großen in jeder Hinsicht singularitätenfreien Minkowskiwelt, für deren Beschreibung keines der Inertialsysteme einen Vorzug besitzt.*

Mit der klassischen Theorie ist dies alles mutatis mutandis ebenso wie mit der speziellen Relativitätstheorie vereinbar, mit

der allgemeinen Relativitätstheorie dagegen, wie erwähnt, nur ein Teil davon, so daß die Tatsachen, die für die allgemeine Relativitätstheorie sprechen, gegen dieses, wie mir scheint, *im übrigen in jeder Hinsicht befriedigende Weltbild* geltend gemacht werden können. Nach der allgemeinen Relativitätstheorie ist in einem quasieuklidischen Raum zwar eine molekularhierarchische Welt möglich, aber keine, die nicht quasistatisch und dennoch im mechanischen Gleichgewicht ist. Auf die Möglichkeit, diese Annahmen unter Verzicht auf eigentliche Quasieuklidizität des unendlichen Raumes mit der allgemeinen Relativitätstheorie in Einklang zu bringen, gedenke ich bei anderer Gelegenheit zu sprechen zu kommen.

Wien, den 12. März 1923.

(Eingegangen 15. März 1923.)

4. *Über ausgezeichnete Energiewerte in mechanischen Systemen;*
von Alfred Klose.

Einleitung.

Die Bohrschen Untersuchungen über das Atommodell des Wasserstoffs haben gezeigt, wie außerordentlich fruchtbar die Anwendung der Planckschen Quantenidee auch auf dem Gebiete der Atomstrahlung sein kann. Ich möchte im folgenden auf ein rein mechanisches Problem hinweisen, das ebenfalls die Eigentümlichkeit hat, gewisse Energiewerte zu bevorzugen. Während aber im Atom die Energiequantelung postuliert wird, erscheint sie in dem hier zu entwickelnden Problem als statistischer Effekt einer großen Vielheit von Einzelsystemen und als Konsequenz des Newtonschen Gravitationsgesetzes. Dabei tritt die Bevorzugung gewisser Energiewerte erst vom Dreikörperproblem an auf, denn im Zweikörperproblem kann nach der Newtonschen Theorie selbstverständlich jeder beliebige Wert angenommen werden. Obwohl das Vielkörperproblem nach den Beweisen von H. Bruns[1]) und H. Poincaré[2]) außer den bekannten zehn Integralen keine weiteren eindeutigen algebraischen Integrale zuläßt, so gibt es doch eine Anzahl von Speziallösungen, die singulären Werten der Grenzbedingungen entsprechen: die zuerst von Hill[3]) in allgemeinerer Form eingeführten periodischen Lösungen. Die zu den periodischen Lösungen einer gewissen Klasse gehörigen Integrationskonstanten bilden eine abzählbare Mannigfaltigkeit, sind also von niederer Mächtigkeit als die noch unbekannten allgemeinen Lösungen. Andererseits zeigte P. Stäckel[4]), daß,

1) H. Bruns, Ber. d. sächs. Ak. 39. S. 1—39, 55—82. 1887 u. Acta math. 11. S. 25—96. 1888.
2) H. Poincaré, Acta math. 13. S. 259. 1890.
3) G. W. Hill, Americ. Journ. Math. 1. S. 5. 129. 245. 1878.
4) P. Stäckel, Math. Ann. 54. S. 86. 1901.

falls gewisse Bedingungen erfüllt sind, nicht nur jeder beliebige Punkt des Raumes von periodischen Bahnen geschnitten wird, sondern daß auch die durch irgendeinen dieser Punkte gehenden Anfangsrichtungen in jedem Winkel überall dicht liegen. Mithin kann jede Bewegung, wenigstens im ersten Zeitmoment, als in einer periodischen Bahn vor sich gehend betrachtet werden. Den Übergang auf endliche Zeiten, die in sehr allgemeinen Fällen auch beliebig groß sein können, erreicht man mit der sehr fruchtbaren Methode des charakteristischen Exponenten.[1]) Folglich gestattet die Theorie der periodischen Lösungen nahezu jedes dynamische Problem mit beliebiger Genauigkeit zu diskutieren, indem es nur nötig ist, diejenige periodische Bahn aufzusuchen, die den tatsächlichen Bedingungen am besten genügt.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit behandle ich die Bewegung eines Satelliten im restringierten Dreikörperproblem unter der Voraussetzung, daß die Bahn bereits nach einem einzigen synodischen Umlauf in sich selbst zurückkehrt. Diese periodischen Satellitenbahnen erster Art werden, soweit sie stabil sind, im zweiten Teil dazu benützt, um die komplizierteren periodischen Bahnen zweiter Art zu konstruieren. Während sich noch im ersten Teil ein zwar endliches, dabei aber kontinuierliches Bewegungsgebiet ergibt, nämlich das der stabilen Lösungen, so wird dieses Gebiet durch die Bahnen zweiter Art in beliebig viele Teile von verschiedener Breite und Intensität aufgespalten, wobei der ständig wechselnde Grad der Stabilität die bevorzugten Energiewerte von den weniger bevorzugten unterscheidet. Im dritten Teile wird gezeigt, daß in der Darwinschen Satellitenfamilie A ein zusammenhängendes, dabei endliches Stabilitätsgebiet um Jupiter existiert, wobei der charakteristische Exponent c in gesetzmäßiger Weise zwischen einem Minimalwert und 1 veränderlich ist. Mithin existieren in diesem Intervall auch periodische Bahnen zweiter Art. Es existieren also im Darwinschen und in allen ähnlichen Satellitenproblemen tatsächlich bevorzugte Energiewerte. Der vierte Teil schließlich bringt dasselbe Problem in allgemeinerer Form als Sternhaufenproblem. In einem derartigen

1) H. Poincaré, Méth. nouv. I. S. 162—232. 1892.

System müßten sich, falls nur die Zahl der Körper gehörig groß ist, die im ersten und zweiten Teil entwickelten Verhältnisse direkt nachweisen lassen.

§ 1. Stabilität der periodischen Satellitenbahnen erster Art.

G. H. Darwin hat in seiner berühmten Untersuchung über periodische Bahnen im restringierten Dreikörperproblem[1]) u. a. eine Reihe Familien periodischer Satelliten entdeckt. Seine Aufsuchungsmethode ist die des numerischen Experiments. Obgleich aber Darwin nur ganz spezielle numerische Fälle betrachtet, so ist es dennoch gestattet, allgemeine analytische Eigenschaften aus diesen Experimenten herzuleiten auf Grund eines Theorems von F. R. Moulton[2]), das die Nichtexistenz isolierter periodischer Bahnen beweist und das wir etwa so formulieren können: Lassen die Bewegungsgleichungen eines dynamischen Systems

$$dx_i/dt = X_i$$

für irgendeinen Parameterwert $\mu = \mu_0$ eine periodische Lösung

$$x_i = x_i(\mu_0, T)$$

von der Periode T zu, so bleiben die Lösungen sicher reell und periodisch mit derselben Periode, wenn wir statt μ_0 den Parameterwert $\mu = \mu_0 + \delta\mu$ zugrunde legen, sofern nur $\delta\mu$ nicht zu groß gewählt wird. Als Parameter μ ist vor allem das Massenverhältnis der endlichen Komponenten des mechanischen Systems anzusehen, das neben den Anfangsbedingungen die Bewegungsformen wesentlich beeinflußt. Die Bestimmung der maximalen Parametervariation $\delta\mu$ stößt freilich bei der Darwinschen Arbeit auf zur Zeit noch unüberwindliche Schwierigkeiten. Doch ist die Kenntnis der numerischen Größe von $\delta\mu$ für die hier beabsichtigte Untersuchung nicht erforderlich.

Darwin behandelt in mühevollen numerischen Rechnungen den folgenden Spezialfall des Dreikörperproblems, den man als restringiertes Problem bezeichnet: Eine endliche Masse $m = 1$, im folgenden kurz „Jupiter" genannt, bewegt sich in

1) G. H. Darwin, Acta math. 21. S. 99—242. 1897.

2) F. R. Moulton, Periodic orbits, S. 487. Carnegie Inst. Publ. 161. Washington. 1920.

einer Kreisbahn vom Radius $r = 1$ mit der (konstanten) Winkelgeschwindigkeit n um die „Sonne", deren Masse $M > m$ gewählt werden möge. Der dritte Körper, der „Satellit", bewegt sich in der Ebene der Jupiterbahn. Seine Masse sei, verglichen mit den Massen M und m, verschwindend klein. Unter diesen Festsetzungen sind die Bewegungsgleichungen des Satelliten

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} d^2x/dt^2 - 2n\,dy/dt = \partial\Omega/\partial x, \\ d^2y/dt^2 + 2n\,dx/dt = \partial\Omega/\partial y, \end{cases}$$

wo

$$2\Omega = M(r_1^2 + 2/r_1) + (r_2^2 + 2/r_2),$$

$$r_1^2 = x^2 + y^2, \qquad r_2^2 = (x-1)^2 + y^2.$$

Die Koordinaten x, y beziehen sich auf ein mit Jupiter um die Sonne rotierendes System, in dessen Nullpunkt die Sonne steht. Die Differentialgleichungen (1) haben stets das Jacobische Integral

$$\text{(2)} \qquad v^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 = 2\Omega - C$$

mit der willkürlichen Konstanten C. Wir suchen alle Bahnen auf, die in dem rotierenden System periodisch verlaufen, ohne uns jedoch darum zu kümmern, ob diese Bahnen auch in bezug auf die Sonne periodisch bleiben. Darwin stellt an die aufzusuchenden Lösungen noch die weiteren Bedingungen, daß die Satellitenbewegung direkt erfolgen soll und daß die Periode der Bewegung identisch sein soll mit der Dauer eines einzigen synodischen Umlaufs. Ich bezeichne derartige Bahnen als periodische Bahnen der ersten Art. Den Anfangspunkt der Zeit wählen wir stets so, daß sich für $t = 0$ der Satellit an der Stelle $x = x_0 > 1$, $y_0 = 0$ befindet, während die Geschwindigkeitskomponenten $x_0' = 0$, $y_0' = v_0$ betragen sollen. Diese Anfangsbedingungen sind die notwendigen Voraussetzungen für Periodizität von der ersten Art. An Stelle der Anfangsgeschwindigkeit können wir auf Grund des Jacobischen Integrals (2) die Konstante C setzen, so daß sich jede periodische Bahn durch die Größen x_0 und C charakterisieren läßt. Ist nun

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} x = \xi\,(x_0, C, t) \\ y = \xi\,(x_0, C, t) \end{cases}$$

eine Lösung der Differentialgleichungen (1) von der Art, daß

$$\hat{x}(x_0, C, t) = \hat{x}(x_0, C, t+T),$$
$$\hat{y}(x_0, C, t) = \hat{y}(x_0, C, t+T),$$

d. h., ist Gl. (3) eine mit der Periode T periodische Lösung, so läßt sich eine benachbarte Bahn darstellen durch

$$x(t) = \hat{x}(t) + \delta x,$$
$$y(t) = \hat{y}(t) + \delta y.$$

An Stelle der virtuellen Verrückungen δx und δy führt Darwin die normalen und tangentialen Komponenten δp bzw. δs ein durch

$$\delta p = \quad \delta x \cos\varphi + \delta y \sin\varphi,$$
$$\delta s = -\delta x \sin\varphi + \delta y \cos\varphi.$$

Dann ergeben sich die schon von Hill[1]) aufgestellten Variationsgleichungen

$$\frac{d^2\delta p}{dt^2} + \Theta\,\delta p = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta s}{v}\right) + 2\frac{\delta p}{v}\left(\frac{d\varphi}{dt} + n\right) = 0,$$
$$\Theta = n^2 + 3\left(\frac{d\varphi}{dt} + n\right)^2 - \frac{\partial^2\Omega}{\partial p^2}.$$

Führen wir hierin an Stelle der Zeit t die Bogenlänge s ein, so ergibt sich, wenn S die Länge der periodischen Ausgangsbahn verstellt,

$$d^2\delta q/d\sigma^2 + \Phi\,\delta q = 0, \tag{4}$$

wo

$$\Phi = \Phi_0 + 2\Phi_1\cos 2\sigma + 2\Phi_2\cos 4\sigma + \ldots$$
$$\delta q = \delta p\cdot\sqrt{v} \qquad \sigma = \pi(s/S)$$

gesetzt wurde. Die Lösung der Differentialgleichung (4) ist von der Form

$$\delta q = \sum_j \left(b_j e^{\sigma(c+2j)\sqrt{-1}} + d_j e^{\sigma(-c+2j)\sqrt{-1}}\right). \tag{5}$$

Die charakteristischen Exponenten c bestimmen sich nach Darwin und Hill aus der Gleichung

$$D^2 = \sin^2(\pi c/2) = \Delta\,\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\Phi_0}\right),$$

wenn Δ die unendliche Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \Phi_1/[1] & \Phi_2/[1] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \Phi_1/[0] & 1 & \Phi_1/[0] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \Phi_2/[1] & \Phi_1/[1] & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

1) G. W. Hill, Acta math. 8, S. 1–36. 1886.

und wenn

$$[\,] = \Phi_0 - 4j^2$$

bedeutet.

Die Gl. (5) gestattet uns, den Charakter von solchen Lösungen zu studieren, die der periodischen Ausgangslösung benachbart sind, indem nämlich

$$\delta p = v^{-1/2} \cdot \delta q$$

die normale Komponente der Abweichung von der ursprünglichen Bahn vorstellt. Beschränken wir uns darauf, überhaupt nur die säkularen Effekte zu betrachten, so können wir $v = \text{const.}$ setzen, so daß (5) geradezu ein Maß für die Stabilität der periodischen Bahnen vorstellt. Ist c imaginär, so schreitet δq nach reellen Exponentialausdrücken fort. Eine solche Bahn bezeichnen wir als instabil: Der Satellit entfernt sich beliebig weit von der periodischen Ausgangslösung. Ist dagegen c reell, so läßt sich δq in eine Fouriersche Reihe nach Vielfachen von σ und $\sigma \cdot c$ entwickeln, so daß δq eine gewisse Grenze niemals überschreiten kann und in gehörig langer Zeit beliebig oft der periodischen Ausgangsbahn nahe kommt. Eine solche Bahn bezeichnen wir als stabil. Offenbar erhält man reelle Werte c, solange

$$0 \leqq \sin^2(\pi c/2) \leqq +1\,.$$

Für $\sin^2(\pi c/2) < 0$ sowohl, wie für $\sin^2(\pi c/2) > +1$ dagegen werden die Werte der Exponenten imaginär. Als Maß der Instabilität kann die Größe

$$D^2 = \triangle \cdot \sin^2\left(\tfrac{1}{2}\pi \cdot \sqrt{\Phi_0}\right)$$

direkt benützt werden. δq ist dann in jedem der beiden instabilen Fälle eine um den Wert $\delta q = 0$ oszillierende Größe, wobei aber die Amplitude dieser Oszillation mit wachsender Zeit ständig zunimmt, so daß nach einer endlichen Zeit $t = t_1$ der Satellit entweder mit Jupiter zusammenstößt oder gänzlich aus dem Jupitersystem ausscheidet. Wir können den Endeffekt auch so beschreiben: Angenommen, wir haben für $t = 0$ eine große Zahl Satelliten in dem Bereich $\bar{x} - \frac{1}{2}\delta x$ bis $\bar{x} + \frac{1}{2}\delta x$, wo $\bar{x}$ die Koordinaten einer strengperiodischen, aber instabilen Bahn fixiert, so wird es stets eine Zeit $t = t_2$ geben, derart, daß für $t > t_2$ die kleinste Differenz $|\,\delta x_i - \delta x_k\,| > E$

bleibt, wo E eine beliebige vorgegebene Zahl bedeutet. Es folgt dies unmittelbar 1. aus der Tatsache, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die zur periodischen Ausgangslösung gehörigen Anfangswerte in Strenge erfüllt werden, gleich Null ist und 2. aus der Tatsache, daß im Zeitpunkt $t = 0$ für irgend zwei Satelliten $\delta x_i = \delta x_k$ mit mathematischer Schärfe nie erfüllt sein wird. Mithin nimmt im instabilen Bereich die mittlere Dichte an der Stelle ξ, die für $t = 0$ als sehr groß vorausgesetzt wurde, mit wachsender Zeit beliebig ab. Bei einer stabilen Ausgangslösung aber bleibt selbst für lange Zeiten jeder Wert $\delta q_i < \varepsilon$, wo ε beliebig klein gewählt werden kann. In der Umgebung einer stabilen periodischen Bahn ξ bleibt also die mittlere Dichte dauernd endlich, indem sie sich einem von Null verschiedenen Grenzwerte nähert.

§ 2. Stabilität der periodischen Satellitenbahnen 2. Art.

Wir nehmen nunmehr an, daß ein Bereich

$$0 < D_1^2 \leqq D^2 \leqq D_2^2 < +1$$

existiert, mit andern Worten, daß stabile periodische Bahnen möglich sind. Wir können in diesem Bereich die Werte c, welche die Gleichung

$$D^2 = \sin^2(\pi c/2)$$

befriedigen, stets in der Form schreiben

$$c = \pm c_0 \pm 2j,$$

wobei j irgendeine positive Zahl verstellt und wo $|c_0| < 1$ vorausgesetzt werden darf. Ist c_0 reell, so läßt sich aber δq gemäß Gl. (5) durch eine Fourierreihe darstellen. Mithin können auch

$$x(t) = \xi(t) + \delta x$$
$$y(t) = \eta(t) + \delta y$$

in der Form

$$x(t) = \sum\{E_{j,k} \cos\sigma(kc_0 + 2j) + F_{j,k} \sin\sigma(kc_0 + 2j)\}$$
$$y(t) = \sum\{G_{j,k} \cos\sigma(kc_0 + 2j) + H_{j,k} \sin\sigma(kc_0 + 2j)\}$$

geschrieben werden. Diese neue Bahn überstreicht im allgemeinen eine ringförmige Fläche überall dicht, solange nämlich c_0 irrational ist. Nur im Falle $c_0 = p/q$, wo p und q ganze, relativ prime Zahlen verstellen, werden die neuen

Bahnen wiederum periodisch. Derartige strengperiodische Lösungen, die durch Variation der periodischen Ausgangslösungen erster Art und durch Verfügung über c_0 gewonnen werden können, bezeichne ich als periodische Satellitenbahnen zweiter Art. Dieser Bildungsprozeß kann fortgesetzt werden, falls die Bahnen zweiter Art ein endliches, begrenztes Stabilitätsbereich besitzen. Auf diese Weise erhalten wir periodische Satellitenbahnen dritter Art und durch Wiederholung solche vierter und höherer Art. Es lassen sich aber bereits an den Bahnen erster und zweiter Art die Eigenschaften dieser „Gruppe periodischer Bahnen durch einen Punkt" aufzeigen, so daß wir unsere Untersuchung im folgenden auf dieses beschränken dürfen.

Wir können uns die Bedeutung von c_0 anschaulich machen, wenn wir die periodische Bahn angenähert durch eine Ellipse ersetzt denken. Berücksichtigen wir nur das Glied mit dem Argument

$$c\sigma = c \cdot \pi \cdot s / S,$$

so durchläuft der Satellit eine anomalistische Periode, wenn s von $s_1 = 0$ bis $s_2 = 2S/c$ gewandert ist. Es ist also, da S die synodische Periode bedeuten sollte,

$$\frac{c}{2} = \frac{\text{synodische Periode}}{\text{anomalistische Periode}}.$$

Ist c eine rationale Zahl, so kommt also die Ellipse nach einer gewissen Anzahl von Umläufen wieder in die Anfangslage zurück. Berücksichtigt man die wahre Gestalt der periodischen Bahnen und nimmt man auch die oben vernachlässigten Glieder mit, welche ein Vielfaches von $c\sigma$ als Argument enthalten, so verliert zwar c die einfache anschauliche Bedeutung. Die Tatsache, daß sich bei rationalem c die Konstellationen periodisch wiederholen, bleibt aber auch dann noch bestehen. Die Länge der periodischen Bahnen zweiter Art beträgt, wenn die der Bahnen erster Art mit S_1 bezeichnet wird

$$S_2 = 2q S_1.$$

Wir haben hier ein dem bekannten Asteroidenproblem sehr ähnliches Problem vor uns, nämlich die Stabilität periodischer Bahnen an Kommensurabilitätsstellen zu untersuchen. Doch lassen sich die dort benutzten Methoden der Potenzentwicklung

nach gewissen kleinen Parametern[1]) in dem Darwinschen Falle nicht anwenden. Wir müßten also das Stabilitätskriterium numerisch bestimmen, ein bei der analytischen Kompliziertheit und großen Länge der periodischen Bahnen zweiter Art nahezu undurchführbares Verlangen. Es ist aber auch nicht unbedingt nötig, die Koeffizienten c' dieser neuen Bahnen zu berechnen, denn wir erhalten eine genügend genaue Kenntnis des Stabilitätsgrades auf Grund der folgenden Betrachtung. Ist $c' = p'/q'$ eine rationale Zahl mit möglichst kleinen Zahlen p' und q', so werden, wie schon bemerkt, dieselben relativen Konstellationen in jeder Periode einmal angenommen, was bei irrationalem c' in Strenge niemals eintritt. Infolge von Resonanzwirkung sind also die Störungen in einer kommensurablen Bahn größer als in einer benachbarten inkommensurablen. Ohne zu entscheiden, ob die Bahnen zweiter Art stabil oder instabil sind, erkennen wir also, daß die Stabilität um so gefestigter ist, je mehr sich c' von einem kleinzahligen Kommensurabilitätsverhältnis p'/q' unterscheidet. Als Ordnungselemente können die Zahlen $|p' - q'|$, der Grad der Kommensurabilität sowie $|q'|$, der in die Periodenlänge eingehende Faktor gelten. Je größer $|p' - q'|$ und je größer $|q'|$ wird, um so „stabiler" wird die Bahn.

Die Verteilungsbetrachtung des ersten Abschnittes stellen wir auch hier an. Wir denken uns zur Zeit $t = 0$ in dem Intervall $c' - \frac{1}{2}\delta c'$ bis $c' + \frac{1}{2}\delta c'$, wo $c' = p'/q'$ der einzige niedrigzahlige kommensurable Wert des Intervalls sein möge, eine große Anzahl Satelliten. Es gibt dann nach dem obigen eine Zeit $t = t_1$, von der ab an der Stelle $c' = p'/q'$ die mittlere Verteilungsdichte der Satellitenbahnen geringer ist als an jeder andern Stelle des Intervalls

$$c' - \tfrac{1}{2}\delta c' \leqq c' \leqq c' + \tfrac{1}{2}\delta c'.$$

Sind für die kommensurablen Fälle die Bahnen instabil, so ist die Verteilungsdichte im instabilen Gebiet sogar gleich Null, d. h. es entstehen säkulare Lücken in der Verteilung.

---

1) H. v. Zeipel, Ark. Mat. Astr. Fys. 10. Nr. 30. 1915; K. Hirayama, Ann. Obs. Tokyo. app. 2. 1917. 4., 5. 1918; A. Klose, Astr. Nachr. 218. S. 401. 1923.

Nachweisbar wird diese Erscheinung aber erst bei einer großen Anzahl von Einzelsystemen. Aus diesem Grunde soll auch im letzten Abschnitt ein System höherer Ordnung diskutiert werden.

§ 3. Die Darwinschen Satelliten.

Darwin wählt, um möglichst große Störungen zu erhalten, das Massenverhältnis $m/M = 1/10$. Durch Variation z. B. von C, bei festgegebener Anfangslage x_0, bestimmt er denjenigen Wert C_0, der zu einer periodischen Bahn erster Art führt. Wir wollen aus naheliegenden Gründen diejenigen Satellitenfamilien übergehen, die als entartet zu betrachten sind, nämlich diejenigen Bahnen, welche Lemniskaten- oder Ellipsenform um beide Massenzentren M und m haben, desgleichen diejenigen Familien, deren Bewegung nur in Oszillationen um eines der Lagrangeschen Librationszentren besteht. Es bleiben dann noch drei, durch positive Bewegungsrichtung charakterisierte Familien übrig.

Satellit A. Für sehr große Werte der Integrationskonstanten C ergeben sich kreisähnliche Bahnen um Jupiter. Für $C < 39{,}5$ geht die Bahn in eine lemniskatenähnliche Figur um Jupiter und das innere Librationszentrum über.[1]) Die Bahnen sind stabil, solange die Librationsschleife noch nicht existiert. Mithin ist der stabile Zweig dieser Familie charakterisiert durch Werte von C zwischen 39,5 und $+\infty$. Zu dem stabilen Zweige gehört übrigens, wenigstens angenähert, unser Erdmond. Interessant ist der Verlauf des Stabilitätskriteriums

$$D^2 = \triangle \sin^2\left(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\Phi_0}\right),$$

wenn wir uns wiederum auf den stabilen Teil der Familie beschränken. Für sehr große Werte von C ist D^2 offenbar nahezu $+1$. Für kleiner werdendes C nimmt D^2 zunächst ab, um bei $C = 40{,}25$ etwa mit $D^2 = +0{,}063$ sein Minimum zu erreichen. Von da an wächst es rasch bis zur Instabilitätsgrenze $C = 39{,}5$ auf $+1$ an. Der eben erwähnte Wert

1) Nach S. S. Hough, Acta math. 24. S. 257—288. 1901 bilden übrigens die lemniskatenähnlichen Bahnen nicht die analytische Fortsetzung des stabilen Zweiges der Familie *A*.

$C = 40{,}25$ ist weiterhin noch dadurch ausgezeichnet, daß zu ihm der maximale Anfangswert $x_0 = 1{,}1150$ gehört. Die untere Grenze der x-Koordinate ergibt sich offenbar als der sonnennächste Punkt der an der Stabilitätsgrenze $C = 39{,}5$ liegenden Bahn. Dieser dürfte bei $x_1 = 0{,}77$ zu suchen sein, während der größte Sonnenabstand in diesem Falle nur 1,0334 beträgt.

Satellit B und *C*. Diese beiden Familien lassen sich aus einer einzigen singulären Bahn herleiten. Es sind im allgemeinen ellipsenähnliche Bahnen, wobei die große Achse senkrecht auf der Verbindungslinie Sonne-Jupiter steht. Die Satelliten vom Typus *B* sind durchweg instabil, dagegen existiert ein wenn auch nicht sehr großes Bereich, in dem der Typus *C* auf stabile Bewegungen führt. Diese Satelliten beanspruchen aber, wie es scheint, weniger Interesse, weil, wie Moulton nachgewiesen hat, die Familien *B* und *C* wenigstens für kleine Massenverhältnisse m/M nur im komplexen Gebiet existieren.

Es bleibt also nur der stabile Zweig der Familie *A* übrig, so daß die stabilen periodischen Satellitenbahnen erster Art in ein enges Intervall eingeschlossen werden. Befindet sich der Satellit zu Beginn der Bewegung in äußerer Lage bzgl. Sonne-Jupiter, so kommen als Anfangskoordinaten nur die Werte x_0 zwischen 1,0 und 1,1150 in Frage, befindet er sich zwischen Sonne und Jupiter, so sind nur Werte zwischen 1,0 und 0,77 zulässig. Da die Darwinschen Satelliten ein endliches Stabilitätsbereich besitzen, so existieren also auch periodische Bahnen zweiter Art mit ihren früher diskutierten Stellen „größerer“ und „kleinerer“ Stabilität. Wenngleich die Perioden der Bahnen erster und zweiter Art sich um endliche und zum Teil recht beträchtliche Größen unterscheiden können, so bleiben ihre Energiekonstanten nahezu dieselben. Wir können demnach periodische Satellitenbahnen beliebig hoher Art ersetzt denken durch Bahnen erster Art, wenn wir nur diejenigen Energiewerte nicht zulassen, welche in der Umgebung eines kleinzahligen kommensurablen Wertes von c liegen.

§ 4. Satellitenbahnen im Kugelhaufenproblem.

Wir fragen uns nunmehr, unter welchen Bedingungen die in den ersten Abschnitten entwickelten Auswahlprinzipien sich in der Natur verwirklichen lassen. Da es sich um statistische Effekte handelt, so ist eine große Anzahl von Einzelsystemen nötig. Diese können dadurch entstehen, daß Jupiter von einer sehr großen Anzahl Satelliten umkreist gedacht wird. Es gibt dann soviel Einzelsysteme wie Satelliten, wobei eine gegenseitige Störung nur durch Zusammenstoß von Satelliten möglich ist. Wir kennen zurzeit tatsächlich ein derartiges System: Saturn mit seinen aus kleinsten Satelliten gebildeten Ringen.

Im folgenden möchte ich aber noch auf eine andere Möglichkeit hinweisen, die es gestattet, eine große Zahl gleichgebauter Systeme nebeneinander (nicht ineinander wie beim Saturnsystem) zu erhalten. Ich meine die sog. kugelförmigen Sternhaufen. An direkte Nachprüfung ist hier allerdings wegen der großen Entfernung dieser Haufen nicht zu denken. Es erscheint aber möglich, vielleicht indirekt die Richtigkeit der Theorie nachzuprüfen. Im übrigen scheint mir dieses Kugelhaufenproblem nicht ohne Interesse für die moderne Atomphysik zu sein. Allgemein läßt sich dieses Problem freilich nicht integrieren. Ich beschränke mich daher auf einen von E. Strömgren[1]) durchgerechneten Spezialfall, der für die Astronomie eine gewisse Bedeutung besitzt. Die Dichte ϱ setzt Strömgren als Funktion des Radius an in der Form

$$\varrho = [3/(3 + r^2)]^{7/2}.$$

Wenn wir nur die Gesamtwirkung des Haufens auf die Einzelkörper berücksichtigen, so lassen sich die Differentialgleichungen der Bewegung genau integrieren. Man erhält für die Länge in der Bahn w und die Zeit t elliptische Integrale dritter Gattung.

$$w = \pm c \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{h^2 + 2/\{\sqrt{3 + r^2} - (c/r)^2\}}},$$

$$t = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}a^2} \int \frac{dr}{\sqrt{h^2 + 2/\{\sqrt{3 + r^2} - (c/r)^2\}}}.$$

1) E. Strömgren, Astr. Nachr. 203. S. 17. 1917.

Betrachten wir eine Kugelschale vom inneren Radius r und vom äußeren Radius $r + dr$, so sind in dieser Schale am häufigsten diejenigen Massen des Haufens vertreten, deren Bewegung in einem Kreis um das Kugelzentrum erfolgt. Diese Körper werden weiterhin nahezu dieselbe Masse besitzen, weil sie andernfalls nach dem dritten Keplerschen Gesetze sich schließlich gegenseitig aufzehren müßten. Die übrigen Mitglieder des Kugelhaufens, deren Bewegung näherungsweise durch rotierende Ellipsen darstellbar ist, durchschreiten, wenn überhaupt, nur für relativ kurze Zeit die betrachtete Kugelschale. Von sehr kleinen Massen können sich nur stabile Satelliten in gesicherten Bahnen halten. Wir haben also innerhalb der Kugel vom Radius $r + dr$ Systeme von der im ersten bzw. zweiten Abschnitte behandelten Art in sehr großer Zahl. Als Repräsentanten Jupiters haben die stationären Mitglieder der Kugelschale zu gelten, wogegen die Sonne von der Gesamtmasse der inneren Kugel gebildet wird, so daß sich ihre Masse zu

$$M = 4\pi \int_0^r r^2 \varrho \, dr = 4\pi \cdot \sqrt{3}\, r^3 / (3 + r^2)^{3/2}$$

ergibt. Der makroskopische Effekt ist derselbe wie der bei den Darwinschen Satelliten beobachtete: Betrachten wir die Gesamtheit der Satelliten unserer Kugelschale, so tritt keineswegs jeder Wert der Energiekonstanten gleich häufig auf. Vielmehr läßt sich eine abzählbar unendliche Menge von Energiewerten angeben, die außerordentlich viel häufiger angenommen werden als gewisse Nachbarwerte.

Diese merkwürdige Energieverteilung ist übrigens keinesfalls nur den hier skizzierten Satellitenproblemen eigentümlich. Sie scheint vielmehr in allen mechanischen Problemen eine Rolle zu spielen, soweit es sich um Systeme materieller Punkte handelt, deren Zahl größer als 2 ist. Durch Vertauschung der Zentren kommen wir z. B. vom Satellitenproblem zum Asteroidenproblem. Im Ring der kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter haben wir das glänzendste Beispiel für das auf Kommensurabilitäten gegründete Auswahlprinzip. Daß auch

in gewissen Vielkörperproblemen mit mehr als drei materiellen Punkten ähnliche Auswahlprinzipien gelten, will ich in einer andern Arbeit nachweisen.

Zum Schluß möchte ich nicht unterlassen, für das Interesse und die Unterstützung zu danken, welche die vorliegende Untersuchung von seiten der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft erfahren hat.

Greifswald, Astron. Institut der Universität,
20. Januar 1923.

(Eingegangen 4. April 1923.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Hoch-Vakuum-Pumpen

aller Art

für Wissenschaft und Technik

Vakua bis zu $^1/_{1000000}$ mm Hg. Saugleistung bis 50 cbm pro Stunde

Neuheit!

Quecksilber-Dampfstrahlpumpe

System Pfeiffer. D.R.P. angem.

Ganz aus Glas!

Für Gas und elektrische Heizung

Kostenlose Lieferung!

Rotierende Kapsel-Ölluftpumpe

D.R.P.

Vakuum bis 0,001 mm Hg

Saugleistung bis 10 cbm pro Stunde

Listen auf Verlangen

Arthur Pfeiffer, Wetzlar

Fabrik für physikalische, chemische und technische Apparate

1923. № 18.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 72.

1. *Über erregende Absorption und Tilgung der Phosphore*[1]; *von Emil Rupp.*

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

Nach Erkenntnis der Bedeutung der *erregenden Absorption* und der *auslöschenden Absorption* des auffallenden Lichtes bei der Phosphoreszenzerregung konnte Hr. Lenard in „Lichtabsorption und Energieverhältnisse bei der Phosphoreszenz“ [2]) die Theorie der Anklingung mathematisch durchführen, die das sonst so verwickelte Gebiet quantitativ zu klären gestattet. In einer weiteren Arbeit Hrn. Lenards „Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht“[3]) wurde die Theorie noch um den ebenso wichtigen Begriff der *Tilgung* als Maßzahl der an der maximalen Lichtsumme fehlenden Lichtsumme bereichert. Die Differentialgleichung, die alle für das Anklingen und den ersten Abfall der Lichtsumme in Betracht kommende Vor-

1) Auszug aus der Heidelberger Dissertation vom 12. Mai 1922.

Es wird hauptsächlich auf folgende Arbeiten Bezug genommen (angeführt mit eingeklammerter Abkürzung):

P. Lenard und V. Klatt, „Über die Erdalkaliphosphore“, Ann. d. Phys. 15. S. 425. 1904. P. Lenard, „Über Lichtemission und deren Erregung“, Heidelb. Akad. 1909, auch Ann. d. Phys. 31. S. 641. 1910 („Lichtem.“). P. Lenard, „Über Lichtsummen bei Phosphoren“, Heidelb. Akad. 1912 („Lichts.“). P. Lenard und W. Hausser, „Absolute Messung der Energieaufspeicherung bei Phosphoren“, Heidelb. Akad. 1913 („Abs. Mess.“). P. Lenard, „Lichtabsorption und Energieverhältnisse bei der Phosphoreszenz“, Heidelb. Akad. 1914 („Lichtabs.“). P. Lenard, „Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht“, Teil I bis IV, Heidelb. Akad. 1917 und 1918 („Ausleucht.“).

2) Heidelb. Akad. 1914. 13. Abhandl.

3) Heidelb. Akad. 1917. 5. u. 7. Abhandl.; 1918. 8. u. 11. Abhandl.

gänge zu beschreiben gestattet, lautet nach Einführung der Tilgung:[1])

$$\text{(I)} \qquad dL = J\,dt\,\frac{1}{z\,d}\,(1 - e^{-z\,d})\,[\varepsilon(L_d - L)p - \mu L] - \frac{L}{\delta(\Theta)}\,dt.$$

Es ist: L die Lichtsumme der Phosphors zur Zeit t, L_d die maximale, bei auslöschungsfreier Erregung aller Zentren der Mitteldauer $1/\delta(\Theta)$ sich einstellende Lichtsumme, J die Intensität des auffallenden Lichtes, ε die erregende Absorption, z die Gesamtabsorption des Lichtes, d die Schichtdicke, p der Ökonomiekoeffizient, μ die Tilgung, Θ die Temperatur.

Um aus den Lösungen dieser Differentialgleichung die erregende Absorption und die Tilgung für die verschiedenen Wellenlängen auf möglichst einfachem Wege messen zu können, muß man sich zunächst auf sehr dünne, voll durchstrahlte Schichten beschränken. Man kann die Absorption im Füllmaterial des Phosphors vernachlässigen, wenn $\frac{1}{2}\,z\,d$ klein gegen 1, was für Schichten von der Größenordnung einiger tausendstel Millimeter in guter Annäherung zutrifft. Eine weitere bedeutende Vereinfachung läßt sich gewinnen, wenn man $1/\delta(\Theta)\,J$ gegen $\varepsilon\,p + \mu$ vernachlässigen darf, wenn man sich also nur auf Messung der Zentren längster Dauer einläßt. Durch Vorwärmen des erregten Phosphors, wobei alle Zentren kurzer Dauer ausgelöscht werden, läßt sich der Einfluß des Gliedes $1/J\,\delta(\Theta)$ bis unter 1 Promille gegenüber $\varepsilon\,p + \mu$ herabdrücken. Zu einer Untersuchung scheiden dabei von vornherein alle kurzdauernden Phosphore aus und unter den Phosphoren mit viel Zentren langer Dauer sind unternormale solchen mit normalem Metallgehalt vorzuziehen. So vereinfacht sich für Zentren langer Dauer bei dünnen Schichten Differentialgleichung I zu:

$$\text{(Ia)} \qquad \frac{dL}{dt} = J\,[\varepsilon\,p\,(L_d - L) - \mu\,L].$$

In vorliegender Arbeit wurde es unternommen, für eine Reihe Phosphore, besonders *mit Cu und Bi als wirksamem Metallatom für langdauernde Zentren die erregende Absorption und die Tilgung, ferner die Lichtsumme in Abhängigkeit von der erregenden Wellenlänge im Gebiet der Erregungsverteilung zu bestimmen.* Auch wurden die *Erregungsverhältnisse mit Kathoden-*

1) Ausleucht. I. S. 26.

strahlen hauptsächlich zur Erreichung der maximalen, tilgungsfreien Lichtsumme einer neuen Untersuchung unterzogen, wobei glühelektrisch erzeugte Kathodenstrahlen konstanter Intensität Verwendung fanden. Die aus den Messungen zu ziehenden Schlüsse liefern eine quantitative *Bestätigung der lichtelektrischen Theorie der Phosphoreszenz sowohl für die erregende Absorption wie für die Tilgung* und erlauben weitere Einblicke in das Wesen der Phosphoreszenzerregung, wobei der von Hrn. Lenard erschlossene Mechanismus nicht nur ein guter Wegweiser während der Untersuchung war, sondern auch neu bestätigt und weiter zahlenmäßig gefaßt werden konnte.

An *älteren Untersuchungen* über diesen Gegenstand liegen aus den Arbeiten Hrn. Lenards vor: Die relativen Messungen der erregenden Absorption an verschiedenen Phosphoren[1]) und die Absolutwerte für das d_1-Maximum des Ca-Bi α.[2]) Ferner die ausführliche Ermittelung der Tilgung in Abhängigkeit von Wellenlänge, Lichtintensität, Zentrengröße und Temperatur[3]) an Ca-Bi α, die die Verfolgung der Absolutwerte der Tilgung bis ins Erregungsgebiet hinein ergab und zur Trennung der Tilgungskurven in einen langwelligen Teil mit Maxima und Minima und einen stark ansteigenden kurzwelligen Teil führte, und die okular beobachteten Tilgungsverteilungen einer ganzen Reihe Phosphore[4]), die zu wichtigen Vergleichen und Schlüssen, besonders über die langwellige Tilgung, herangezogen werden konnten.

Teil I. Erregung mit Licht.

I. Die verwendeten Methoden.

Die Differentialgleichung (Ia) bietet zwei verhältnismäßig einfache Wege zur Bestimmung von εp und μ. Für das *erste Absinken der Lichtsumme* eines belichteten Phosphors folgt aus ihr die bereits von Hrn. Lenard angegebene Gleichung:[5])

$$(1) \qquad -\left(\frac{dL_0}{dt}\right)_{t=0} = (L_a - L_0) J \varepsilon p - L_0 J \mu .$$

Im Gebiet geringer Erregung und bei einem L_0 nahe L_a eignet sich diese Gleichung unter Vernachlässigung des ersten

1) Lichtabs. S. 24.
2) Lichtabs. S. 41.
3) Ausleucht. II.
4) Ausleucht. III. S. 51.
5) Ausleucht. I. S. 40.

Gliedes zur unmittelbaren Berechnung der Tilgung μ. Man hat dabei eine möglichst groß gewählte Anfangslichtsumme L_0 mit dem Lichte einer Wellenlänge λ, dessen Intensität J mit der Thermosäule absolut ermittelt ist, eine bestimmte Zeit t sec zu tilgen. Die so durch Tilgung verminderte Lichtsumme wird lichtelektrisch gemessen und daraus kann der Abfall von L_0 mit der Tilgungszeit bestimmt werden. Im allgemeinen wird jedoch die Vernachlässigung des ersten Gliedes nicht gestattet sein, man muß also L_a und εp anderweitig kennen.

Zur Messung des Ökonomiekoeffizienten p verwendet Hr. Lenard die Gleichung

$$\frac{dL}{dt} = L_a J \varepsilon p \; ^1),$$

die auch zur Ermittelung der erregenden Absorption εp dienen kann in der Form:

$$\varepsilon p = \frac{\left(\frac{dL}{dt}\right)_{t=0}}{J L_a} . \tag{2}$$

Dabei hat man nur den ersten Anstieg der Lichtsumme L mit der Zeit t bei Erregung des vorher unbelichteten Phosphors mit einer Wellenlänge λ der absolut gemessenen Intensität J zu verfolgen. Allerdings muß noch die maximale Lichtsumme L_a bekannt sein oder man muß sie nach der unten angegebenen Methode errechnen. Die experimentelle Messung von dL/dt hat bei kleinen Intensitäten den Nachteil, daß durch die Mitwirkung fremder Metallatome und anderer Banden [2]) die Anstiegskurve, statt geradlinig aufzusteigen, nach unten konvex gekrümmt ist (vgl. „Lichtabs.", Fig. 2, S. 64), was die genaue Ermittelung von dL/dt erschwert.

Bei den hier benützten Intensitäten und Zeiten zeigte sich die Ausbuchtung nicht, wenn man statt Gleichung (2) die ihr völlig analoge Gleichung

$$\varepsilon p = \frac{\left(\frac{dL}{dJ}\right)_{J=0}}{t L_a} . \tag{3}$$

verwendet, die sich aus der Integralform von (Ia)

$$L = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon p + \mu} \cdot L_a (1 - e^{-J(\varepsilon p + \mu) t})$$

1) Lichtabs. S. 67.
2) Lichtabs. S. 62.

durch Differentiation nach J ableiten läßt. Dabei wird bei festgehaltener Zeit der *Anstieg der Lichtsumme* L mit der absolut gemessenen, durch Schleier um einen bestimmten Prozentsatz verminderten Intensität J verfolgt und bei bekanntem L_d ergibt sich daraus εp.

Um L_d zu finden, liegt es nahe, die Erreichung der maximalen Erregung mittels Kathodenstrahlen heranzuziehen. Aber auch die Gleichungen (1) und (3) bzw. (2) liefern einen Weg zur Berechnung von L_d. Für die drei Unbekannten εp, μ, L_d stehen drei, jedoch nicht voneinander unabhängige Gleichungen zur Verfügung, nämlich

$$\varepsilon p = \frac{\left(\frac{dL}{dJ}\right)_{J=0}}{t L_d},$$

$$L = \frac{\varepsilon p L_d}{\varepsilon p + \mu},$$

$$-\left(\frac{dL_0}{dt}\right)_{t=0} = J \varepsilon p (L_d - L_0) - J \mu L_0.$$

Man erhält hingegen sechs Gleichungen mit fünf Unbekannten, wenn man die Messungen mit zwei verschiedenen Wellenlängen λ_1 und λ_2 miteinander verbindet. So läßt sich aus den zu λ_1 gehörigen εp_1, μ_1 und den zu λ_2 gehörigen εp_2, μ_2 L_d berechnen, indem man aus den sechs Gleichungen nacheinander εp_1, εp_2, μ_1, μ_2 eliminiert. Dies führt zu dem Ausdruck für L_d

$$(4a)\quad L_d = \frac{L_1 L_2 \left\{ \left(\frac{dL_0}{dt}\right)_1 \frac{\left(\frac{dL}{dJ}\right)_2}{t_2} J_2 + \left(\frac{dL_0}{dt}\right)_2 \frac{\left(\frac{dL}{dJ}\right)_1}{t_1} J_1 \right\} + J_1 J_2 \frac{\left(\frac{dL}{dJ}\right)_1}{t_1} \frac{\left(\frac{dL}{dJ}\right)_2}{t_2} L_0 (L_2 - L_1)}{L_1 J_2 \left(\frac{dL_0}{dt}\right)_1 \frac{\left(\frac{dL}{dJ}\right)_2}{t_2} + L_2 J_1 \left(\frac{dL_0}{dt}\right)_2 \frac{\left(\frac{dL}{dJ}\right)_1}{t_1} - J_1 J_2 \frac{\left(\frac{dL}{dJ}\right)_1}{t_1} \frac{\left(\frac{dL}{dJ}\right)_2}{t_2} (L_2 - L_1)}$$

oder, da

$$\frac{\frac{dL}{dJ}}{t} = \frac{\frac{dL}{dt}}{J},$$

zu der einfacheren Form

$$(4b)\quad J_{l_d} = \frac{L_1 L_2 \left\{\left(\frac{dL_0}{dt}\right)_1 \left(\frac{dL}{dt}\right)_2 + \left(\frac{dL_0}{dt}\right)_2 \left(\frac{dL}{dt}\right)_1\right\} + L_0 (L_2 - L_1) \left(\frac{dL}{dt}\right)_1 \left(\frac{dL}{dt}\right)_2}{L_1 \left(\frac{dL}{dt}\right)_2 \left\{\left(\frac{dL_0}{dt}\right)_1 - \left(\frac{dL}{dt}\right)_1\right\} + L_2 \left(\frac{dL}{dt}\right)_1 \left\{\left(\frac{dL_0}{dt}\right)_2 - \left(\frac{dL}{dt}\right)_2\right\}}.$$

Beide Gleichungen (4) haben zwar die Nachteile der Differenzenbildung, sie können jedoch, wie die ausgeführten Messungen zeigen werden, befriedigend übereinstimmende Werte für L_d liefern, besonders wenn die Lichtsummen L_1 und L_2 weit auseinander liegen und die erregenden Intensitäten J_1 und J_2 möglichst groß sind.

II. Messungen an CaBi α.

Zur Messung von L_d, εp und μ verwendet wurde die blaue α-Bande eines 0,1 n. CaSBi-Phosphors. Die praktisch unendlich dünne, mit Benzol geschlemmte Schicht von 1 cm² befand sich in wagrechter Lage auf einem Heizblech. Ihr Licht wurde in die durch einen Momentverschluß abgeschlossene lichtelektrische Kamera (KA-Zelle, 40 Volt Anodenspannung) geworfen und gelangte an einem Quadrantelektrometer zur Messung (Empfindlichkeit 0,001 Volt bei 80 Volt Nadelspannung). Um nur die Zentren längster Dauer zu erhalten [Vernachlässigung des Gliedes $1/J\,\delta\,(\Theta)$], wurde die voll erregte Schicht stets 30 Sek. nach Schluß der Erregung, 60 Sek. bei 8,2 Weber Heizstrom vorgewärmt, so daß der Phosphor darnach dunkel erschien. Darauf wurde 1 Minute abkühlen lassen und dann die noch vorhandene Lichtsumme der Zentren langer Dauer in 2 Minuten ausgetrieben, wobei der Heizwiderstand in regelmäßigen Zeitabschnitten jeweils um ein Kurbelteil ausgeschaltet wurde. Um fremde Banden, besonders CaCu α und CaBi β, abzuhalten, befand sich vor dem Momentverschluß ein passend gewähltes Blaufilter. Erregt wurde mit dem von Hrn. Lenard bereits beschriebenen lichtstarken Quarzspektralapparat[1]) mit Hg-Lampe ohne Spalt, zur Messung der spek-

1) Lichtem. Ann. d. Phys. 11. S. 644. 1910.

tralen Verteilung der Lichtsumme mit Nernstfaden. Eine Blende auf einem Quarzkondensator gestattete die Einstellung bestimmter Wellenlängen.

Tilgungsmessungen.

Auf die volle in 8 Min. erregte, dann wie oben vorgewärmte Lichtsumme L_0 der Hg-Linie 435 $\mu\mu$ fällt das Licht der tilgenden Wellenlänge während einer bestimmten Zeit t, die so gewählt ist, daß sie 2 Min. nach Schluß der Vorwärmung gerade verflossen ist; so kann die Messung der getilgten Lichtsumme stets zu definierter Zeit erfolgen.

Als Beispiel sei angeführt die Tilgung mit $\lambda = 365\,\mu\mu$.

Tabelle I.

Tilgung. CaBi a.

λ	J	L	Le. nach t sec Tilgung					$\frac{dL}{dt}$
$\mu\mu$	erg/cm² sec	sc	10	15	20	30	60 sec	sc/sec
365	194	261	253	249	246	237	218	0,79
	136		255	253	250	246	229	0,55

Unmittelbar vor und nach jeder Tilgungsmessung wurde die erregende Intensität mittels einer Bi-Sb-Thermosäule und eines Drehspulgalvanometers von Hartmann & Braun (Empf. $2 \cdot 10^{-11}$ Wb. in 2,5 m Skalenabstand) ermittelt. Strom und Spannung der Hg-Lampe wurden stets aufgeschrieben und die Messungen auf 45 Volt Elektrodenspannung und 8,5 Wb. reduziert.[1]) Durch Kühlen mit Druckluft konnte die Elektrodenspannung in langen Zeiten nahe konstant gehalten werden. Gegen ultrarote Strahlung waren Thermosäule, Wippe und Zuleitung durch Wattepackung geschützt. Auch wurden stets Kontrollmessungen (geschlossener Spalt und undurchlässige Filter) durchgeführt. Durch Anschluß der Thermosäule an die mit Angströmschem Spalt[2]) abgeblendete Hefnerlampe konnte J in absolutem Maße ausgedrückt werden (1 MH = 900 erg/cm² sec).

1) Die Intensitätsänderung mit der Wattzahl war, soweit feststellbar, in Übereinstimmung mit den Messungen von Hrn. Hörnle, Dissert. Heidelberg 1920. S. 30 und Jahrb. d. Radioakt. 1921. S. 302.

2) K. Angström, Soc. d' Upsala 6. V. S. 8. 1903.

Anstieg der Lichtsumme.

Als Beispiel diene der Anstieg der Lichtsumme mit der erregenden Intensität $J = 158$ erg/sec für $\lambda = 365\,\mu\mu$ bei festgehaltener Zeit t.

Tabelle II.

Lichtsummenanstieg. CaBi α.

t sec	J % von $J_{abs.}$	L sc	$\frac{dL}{dJ}$	t sec	J % von $J_{abs.}$	L sc	$\frac{dL}{dJ}$	$\frac{\frac{dL}{dJ}}{t}$ sc/erg/cm²
60	100	58	0,38	120	70	82	0,77	$6{,}4 \cdot 10^{-3}$
60	70	41		120	32,2	38		
60	32,2	19		120	10,5	12		
60	10,5	6		30	100	30	0,19	
				30	70	21		

Berechnung von L_d.

Dazu wurden die Tilgungs- und Anstiegsmessungen der Wellenlängen $\lambda = 365$ und $400\,\mu\mu$, $\lambda = 365$ und $300\,\mu\mu$ und $\lambda = 254$ und $300\,\mu\mu$ benutzt. Die in Gleichung (4a) eingesetzten experimentellen Daten lieferten so für L_d 308, 302 und 297 sc, im Mittel 304 sc.

Spektrale Verteilung der Lichtsummen.

Mit dem kontinuierlichen Spektrum eines Nernstfadens, das mittels eingebauter Hg-Lampe geeicht und jeder Zeit auf Beibehaltung der Eichung kontrolliert werden konnte, wurde in Abständen von 10 zu $10\,\mu\mu$ die Verteilung der vollen Lichtsumme ermittelt. Die Erregungszeit betrug 10 und im Verlauf des Ultraviolett bis 20 Min., bis die volle Lichtsumme erreicht war. Tab. A und Fig. A zeigt die Mittelwerte der gemessenen vollen Lichtsummen.

Ermittelung von εp, ε und μ.

Mit Hilfe des berechneten L_d lassen sich für die Hg-Linien εp und μ unmittelbar bestimmen. Der Ökonomiekoeffizient p wird gleich dem Verhältnis der erregenden Wellenlänge zur Wellenlänge des Maximums der emittierten Bande[1]) gesetzt, also

$$\varepsilon = \frac{\lambda_B}{\lambda} \cdot \varepsilon p\,.$$

1) Lichtabs. S. 70.

Aus den bei geradlinigem Verlauf der μ-Kurve interpolierten Tilgungswerten und den gemessenen vollen Lichtsummen findet man aus der Gleichung $L = \frac{\varepsilon p \, L_a}{\varepsilon p + \mu}$ den gesamten Gang der εp und ε mit der erregenden Wellenlänge λ (Bande bei 445 $\mu\mu$). In allen folgenden Kurven sind Messungen mit der Hg-Lampe durch +, Messungen mit Nernstfaden durch · eingetragen. In die Tabellen sind nur die εp- und μ-Werte der Hg-Linien aufgenommen.

Tabelle A.

CaBi α 0,1 n.

λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	$\mu_{10^{-6}}$ cm²/erg	$\varepsilon p_{10^{-6}}$ cm²/erg	$\varepsilon_{10^{-6}}$ cm²/erg
—70	2	430—40	256	390—1400	186	340—50	188	435	261	13	70	72
—	10	425—	262	380—	176	335—	214	404	198	15	28	31
—	36	420—	256	370—	167	330—	242	365	162	19	21	26
—	110	415—	232	360—	158	325—	262	300	208	22	48	71
—	182	410—	214	350—	162	320—	271	253	148	26	25	45
—	210	400—	198	345—	170	310—	240	546	—	6	—	—

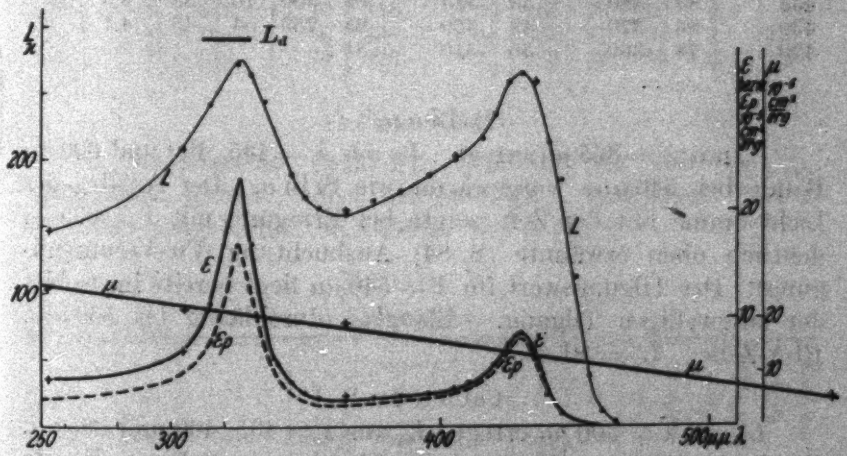


Fig. A. CaBi α 0,1 n.

III. Messungen an anderen Phosphoren.

Es seien im folgenden die Ergebnisse der in derselben Weise durchgeführten Messungen an einer Reihe anderer Phosphore zusammengestellt. Abweichende Messungsbedin-

gungen sind jeweils angegeben. Die Vorwärmung wurde für jeden Phosphor so gewählt, daß die Schicht nach Ausschalten des Heizstroms nur noch fahl mit unbestimmter Farbe leuchtete. Fast alle Messungen wurden an derselben Schicht in möglichst fortlaufenden Meßreihen durchgeführt.

SrBi α n.[1])

Die getilgte Lichtsumme L_0 mit $\lambda = 435\,\mu\mu$ erregt. L_d berechnet aus $\lambda = 400$, 365 und $300\,\mu\mu$. Bande bei $470\,\mu\mu$. 30 Sek. nach Schluß der Erregung, 50 Sek. bei 8,2 Wb. vorgewärmt. 1 Min. abgekühlt. In 2 Min. Lichtsumme ausgetrieben. Vor der Kamera Blaufilter. RbA-Zelle. $L_d = 110$ sc.

Tabelle B.

SrBi α n.

λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	$\mu \cdot 10^{-4}$ cm²/erg	$\varepsilon \cdot 10^{-4}$ cm²/erg	$\varepsilon \cdot 10^{-4}$ cm²/erg
460—70	8	410—20	68	350—60	60	435	88	24	9,6	10,2
450—	45	400—	62	340—	75	404	67	27	4,2	5
440—	85	390—	58	330—	94	365	47	32	2,4	3,1
435—	89	380—	53	325—	96	300	76	38	8,5	13
430—	86	370—	49	320—	93	253	54	43	4,1	7,7
420—	78	360—	50	310—	81					

BaBi α n.[1])

L_0 mit $\lambda = 365\,\mu\mu$ erregt. L_d aus $\lambda = 435$, 400 und $300\,\mu\mu$ Bande bei $540\,\mu\mu$. Vorgewärmt wie SrBi α. Der Anstieg der Lichtsumme mit der Zeit zeigte bei Erregung mit $\lambda = 365\,\mu\mu$ deutlich oben erwähnte (S. 84) Ausbuchtung (Cu-Verunreinigung). Der Tilgungswert für $\lambda = 546\,\mu\mu$ liegt bereits im Gebiet der langwelligen Tilgung. Blauglas (durchlässig bis $550\,\mu\mu$). RbA-Zelle. $L_d = 81$ sc.

CaCu α 2 n.[1])

L_0 mit $\lambda = 300\,\mu\mu$ erregt. L_d aus $\lambda = 435$, 400 und $365\,\mu\mu$. Bande bis $515\,\mu\mu$. Vorgewärmt 50 Sek. wie SrBi α. Zusatz $Na_2SO_4 + NaF$. Zeigt etwas die kürzer dauernde β-Bande. Grünfilter, durchlässig von 480—580 $\mu\mu$. KA-Zelle. $L_d = 118$ sc.

1) Präparat von Hrn. Geheimrat Lenard in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellt. — Die Figuren der folgenden Tabellen sind der Kürze halber nicht mitgedruckt.

Tabelle C.

BaBi α n.

λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	$\mu \cdot 10^{-6}$ cm²/erg	$d \cdot 10^{-6}$ cm²/erg	$\varepsilon \cdot 10^{-6}$ cm²/erg
500—10	12	450—60	54	390—40	40	330—400	58	435	46	31	4,1	5
490—	36	440—	48	380—	50	320—	55	404	36	32,5	2,6	3,5
480—	60	430—	43	370—	62	310—	52	365	68	39	20	30
475—	68	420—	39	360—	72			300	50	45	7,2	13
470—	66	410—	36	350—	68			253	32	52	3,4	7,3
460—	60	400—	34	340—	62			546	—	23	—	—

Tabelle D.

CaCu α 2 n.

λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	$\mu \cdot 10^{-6}$ cm²/erg	$d \cdot 10^{-6}$ cm²/erg	$\varepsilon \cdot 10^{-6}$ cm²/erg
450—60	2	410—20	92	360—70	82	310	74			
440—	14	400—	82	355—	98	435	60	18	1,9	2,2
435—	44	390—	76	350—	104	404	84	23	5,7	7,2
430—	74	380—	70	340—	96	365	75	25	4,4	6,2
425—	86	375—	66	330—	84	300	87	32	9	15
420—	98	370—	70	320—	76	253	74	36	6,1	12

CaCu α 0,3 n.[1])

L_d entsprechend CaCu 2 n. ermittelt als $1{,}38 \cdot L_{\lambda=360}$. Vorgewärmt 40 Sek., sonst wie CaCu 2n. Grünfilter. Hat d_1 schlechter ausgebildet. KA-Zelle. $L_d = 118$ sc.

Tabelle E.

CaCu α 0,3 n.

λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	$\mu \cdot 10^{-6}$ cm²/erg	$d \cdot 10^{-6}$ cm²/erg	$\varepsilon \cdot 10^{-6}$ cm²/erg
450—60	2	410—20	66	355—65	90	435	54	16	1,5	1,7
440—	12	400—	60	350—	98	404	63	19	2,4	3,0
435—	46	390—	56	340—	94	365	75	21	4,2	5,8
430—	54	380—	54	330—	86	300	87	26	8,7	12
425—	64	370—	58	320—	76	253	78	30	6,7	9,7
420—	70	360—	76							

1) Präparat von Hrn. Scheifele.

SrCu α 0,25 n.

L_0 mit $\lambda = 300\,\mu\mu$ erregt. L_d aus $\lambda = 435$ und $400\,\mu\mu$. Bande bei $535\,\mu\mu$. Vorgewärmt 40 Sek., sonst wie CaCu 2n. Hat d_1 schlecht ausgebildet. Rb-A-Zelle. $L_d = 98$ sc.

Tabelle F.

SrCu α 0,25 n.

λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	$\mu_{10^{-6}}$ cm²/erg	$\varepsilon p_{10^{-6}}$ cm²/erg	$\varepsilon_{10^{-6}}$
480—90	0	430—40	62	375—85	87	320—30	66	435	65	53	10	13
470—	15	420—	57	370—	85	310—	78	404	54	64	7,8	10
460—	50	410—	53	360—	78			365	82	73	37	55
450—	68	400—	52	350—	73			300	86	92	67	120
445—	69	390—	63	340—	68			253	54	115	13	29
440—	68	380—	82	330—	62							

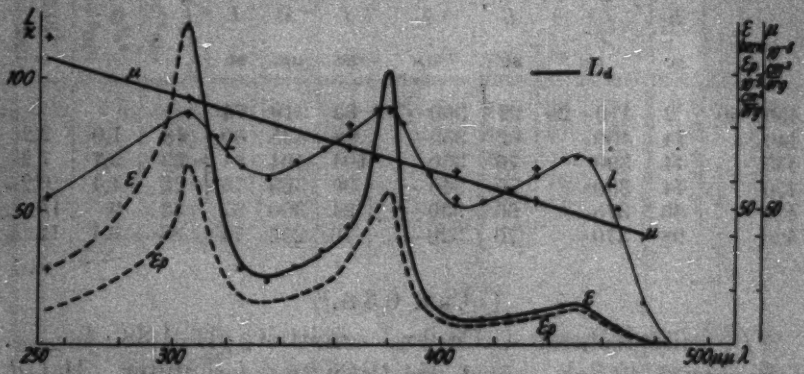


Fig. F. SrCu α 0,25 n.

SrCu α n.[1])

L_d entsprechend SrCu 0,25 n. ermittelt als $1{,}140 \cdot L_{\lambda=300}$. Vorgewärmt wie SrCu 0,25 n. Hat d_2 nicht ausgebildet. Zusatz NaB. Rb-A-Zelle. $L_d = 89$ sc.

BaCu α „wenig Cu".[1])

L_0 mit $\lambda = 365\,\mu\mu$ erregt. L_d aus $\lambda = 400$ und $300\,\mu\mu$, Bande bei $600\,\mu\mu$. Vorgewärmt 30 Sek., sonst wie CaCu 2n. Hat d_3 schlecht entwickelt. Keine β-Bande, mit Rotfilter kontrolliert. Zusatz $CaF + K_2SO_4$. Rb-A-Zelle. $L_d = 37$ sc.

1) Vgl. Anmerkung S. 90.

Tabelle G.

SrCu *a* n.

λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	$\mu_{10^{-8}}$ cm³/erg	$\varepsilon p_{10^{-8}}$ cm³/erg	$\varepsilon_{10^{-8}}$ cm³/erg
470—80	15	410—20	52	350—60	31	435	65	52	18	24
460—	50	400—	48	340—	28	404	51	57	7,6	10
450—	76	390—	44	330—	32	365	37	69	4,9	7,2
440—	72	380—	41	320—	46	300	80	80	71	127
430—	64	370—	38	310—	71	253	46	93	10	21
420—	58	360—	35							

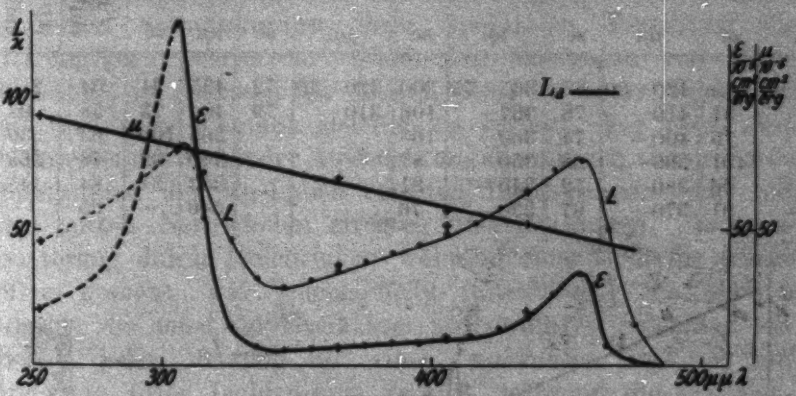


Fig. G. SrCu *a* n.

Tabelle H.

BaCu *a*

λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	$\mu_{10^{-8}}$ cm³/erg	$\varepsilon p_{10^{-8}}$ cm³/erg	$\varepsilon_{10^{-8}}$ cm³/erg
460—70	4	410—20	23	360—70	31	435	30	25	12	16
450—	16	400—	20	350—	28	404	22	31	7,5	11
440—	27	390—	19	340—	26	365	32	34	25	41
432—	31	380—	23	330—	25	300	24	45	8,3	16
430—	30,5	370—	31	320—	24	253	19	51	5,4	13
420—	27	365—	32	310—	24					

ZnCu *a*.[1])

L_0 mit $\lambda = 365\ \mu\mu$ erregt. L_a aus $\lambda = 435$, 400 und 300 $\mu\mu$. Bande bei 520 $\mu\mu$. Vorgewärmt 50 Sek. wie CaCu 2n. μ-Werte

1) Präparat von Hrn. Dr. Tomaschek.

aus krummlinigem μ-Verlauf interpoliert. Die Lichtsumme war zuerst etwas größer, stellte sich aber mit vollzogener Schwärzung konstant ein und hielt diese Konstanz durch die ganze Messung hindurch. Die Schwärzung war bei der verhältnismäßig geringen Energie des erregenden Lichtes eben gerade merklich. Grünfilter. Rb-A-Zelle. $L_d = 119$ sc.

Tabelle J.

ZnCu α.

λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	$\frac{\text{Erg/cm}^2}{\text{sc} \cdot 10^{-4}}$	$\frac{\text{Erg/cm}^2}{\text{sc} \cdot 10^{-4}}$	$\frac{\text{Erg/cm}^2}{\text{sc} \cdot 10^{-4}}$
470—80	5	420—30	85	365—75	300	320—30	72	435	94	54	210	2
460—	31	410—	78	362—	106	310—	79	404	73	58	92	1
450—	75	400—	74	360—	105			365	100	63	330	4
442—	101	390—	68	350—	87			300	92	78	265	4
440—	96	380—	72	340—	81			253	81	84	145	2
430—	91	370—	87	330—	76			546	—	25	—	

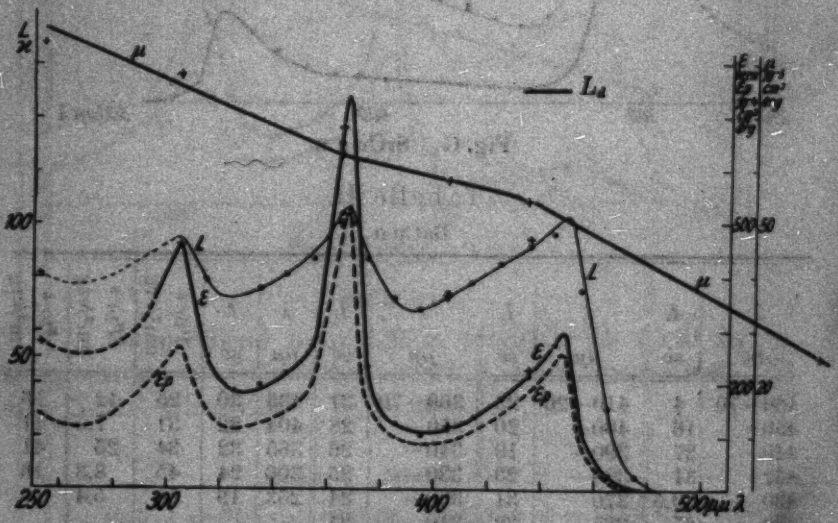


Fig. J. ZnCu α.

Kritisches zu den Messungen.

Es bleibt zu untersuchen, wiefern in vorstehenden Messungen Verwickelungen durch den Einfluß anderer Metall-

spuren oder anderer Banden desselben Metalls vermieden worden sind. Meist standen sehr reine, nur in einer Bande leuchtende Präparate zur Verfügung, sonst war durch passend gewählte Filter eine befriedigende Trennung der einzelnen Banden möglich. Tilgung der gemessenen Bande durch das Licht anderer Banden sowie Selbsttilgung kommt bei den benutzten sehr dünnen Schichten nicht in Betracht. Die Wirkung der Ausleuchtung würde sich in einer Verkleinerung der Zentrendauer, also in Vergrößerung des Gliedes $1/J\,\delta\,(\Theta)$ der Gleichung (I) bemerkbar machen. Da aber die Vorerhitzung stets so gewählt war, daß danach Verdunkelung der erregten Schicht eintrat, könnte die Ausleuchtung höchstens bei ganz extremen Schwankungen ihrer spektralen Verteilung die Tilgungskurve verzerren. Nach den Messungen von Hern. Lenard[1]) ist indessen die Ausleuchtung im kurzwelligen Teil des Spektrums ziemlich gleichmäßig verteilt. Vor allem aber könnte bei mitwirkender Ausleuchtung die mit den viel größeren Intensitäten der Hg-Linien erregten Lichtsummen nicht mit den mittels Nernstfaden erregten übereinstimmen. Zentrenzerstörung durch Feuchtigkeit während einer Meßreihe wurde öfters gesucht, war jedoch nicht feststellbar. Im übrigen wurden die sonst im Exsikkator aufbewahrten Schichten vor Beginn jeder Messung mit einer bestimmten Hg-Linie auf Änderung ihrer Lichtsumme geprüft, während die lichtelektrische Zelle, die im Lauf der Untersuchung sehr konstant in Empfindlichkeit und Gang[2]) blieb, und das Elektrometer stets mit der Hefnerlampe nachkontrolliert wurden. Was die Genauigkeit der Messungen anlangt, sei bemerkt, daß Lichtsummen meist auf einige v. H. genau ermittelt werden konnten, die Werte für die Intensitäten der Hg-Linien jedoch oft beträchtlich schwankten, besonders bei der Linie $\lambda = 254\,\mu\mu$ bis zu 10 v. H. Die Werte der erregenden Absorption in den Stellen der Erregungsmaxima d_2 und d_3 bei Erregung mit Nernststift ändern sich beträchtlich bei nur wenig verschiedenen L_d-Werten (wegen $L_d - L$ im Nenner), so daß sie bei Schwankungen der Lichtsummenwerte von einigen v. H. bis zu 10 v. H. sich ändern können. Doch zeigt deren Übereinstimmung mit den für die Hg-Linien nach Gleichung (3) ermittelten Werten, daß keine Unstimmigkeit in bezug auf die Schlüsse in Teil III vorliegt.

1) Ausleucht. II. 2) 1—2 Sk/min.

Teil II. Erregung mit Kathodenstrahlen.

Aus dem Vergleich der durch Licht und durch Kathodenstrahlen in gleichen voll durchstrahlten Schichtdicken erregten Lichtsumme konnte Hr. Lenard bereits 1912[1]) schließen, daß die Lichtsumme der Dauerzentren bei maximaler Erregung durch Licht und durch Kathodenstrahlen von gleicher Größenordnung ist. Eine genauere quantitative Verfolgung dieses Ergebnisses ließ erwarten, daß durch Kathodenstrahlerregung die maximale Lichtsumme L_d sich bestimmen lasse. Damit wäre auch eine bedeutend einfachere Methode zur Messung der Tilgung μ und der erregenden Absorption εp gewonnen. Die Gleichungen (1), (2) und (3) vereinfachen sich dann zu

$$\left(\frac{dL_d}{dt}\right)_{t=0} = J\mu L_d \tag{5}$$

und

$$\varepsilon p = \frac{\left(\frac{dL}{dt}\right)_{t=0}}{JL_d} = \frac{\left(\frac{dL}{dJ}\right)_{J=0}}{tL_d}, \tag{6}$$

wobei zur Tilgungsmessung der Abfall der mit Kathodenstrahlen erregten maximalen Lichtsumme L_d mit der Tilgungszeit t einer Wellenlänge λ zu verfolgen ist und zur Messung von εp der Anstieg der Lichtsumme des unbelichteten Phosphors entweder mit der erregenden Intensität oder mit der Zeit bei gleichbleibender Intensität. Gleichzeitig ergibt sich eine Kontrolle, ob die aus den Gleichungen (4) errechnete L_d auch übereinstimmend sich finden läßt, womit wieder die gute Brauchbarkeit der Differentialgleichung (I) erwiesen wäre.

Um zwischen Erregung mit Licht und mit Kathodenstrahlen eindeutig vergleichbare Werte zu gewinnen, mußte zunächst die von Kathodenstrahlen noch voll durcherregte Schichtdicke ermittelt werden, und um zu sehen, daß diese Erregung auch tatsächlich voll ist, wurde der Anstieg der Erregung mit der Zeit bis zum konstanten Endwert aufgenommen. Auch mußte die Abhängigkeit der so erhaltenen vollen Lichtsumme von der Kathodenstrahlgeschwindigkeit geprüft werden. Erst dann konnte die aus der Lichterregung errechnete L_d mit der aus Kathodenstrahlenerregung gefundenen Lichtsumme für die verschiedenen Phosphore ver-

1) Lichts. S. 36.

glichen werden. Die Verhältnisse bei Erregung der Sauerstoffphosphore wurden eingehender untersucht und dabei die Tilgung und erregende Absorption dieser Phosphore sowie von SrAg β nach den oben kurz erläuterten Methoden ermittelt.

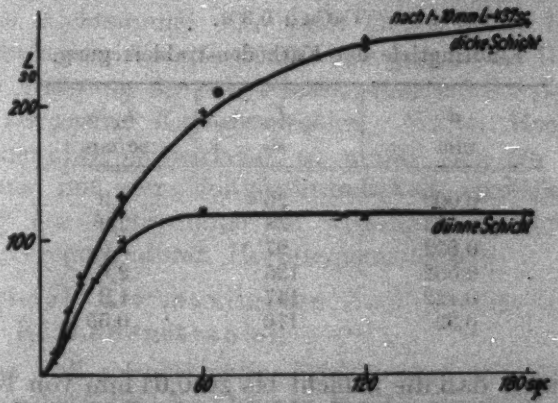
Meßanordnung.

Zur Erzeugung der Kathodenstrahlen diente eine Glühkathodenröhre[1]) mit Lenardschem Fenster, wie sie Hr. Eisenhut angegeben und benutzt hat.

Der Phosphor befand sich unmittelbar unter der Röhre in etwa 0,5 cm Abstand auf dem Heizblech. Durch Wegkippen der Röhre und Vorschieben eines Spiegels wurde sein Licht nach geschehener Erregung in die lichtelektrische Zelle geworfen.

Voll erregte Schichtdicke.

Zur Herstellung der für die Untersuchung nötigen dünnen Schichten wurde der Phosphor zwischen Glasplatten zerrieben, auf ein Deckglas gestreut und mit Benzol[2]) mittels eines Stäbchens gleichmäßig auf die ganze Fläche verteilt. Die so aufgetragenen Schichten konnten bis unter 0,008 mm Dicke er-



Lichtsummenanstieg bei Kathodenstrahlerregung.
Fig. 1. CaBi α.

halten werden. Daß diese Schichten im Gegensatz zu den dickeren (über 0,05 mm) voll durcherregt waren, zeigt Fig. 1

1) O. Eisenhut, Heidelberger Dissert. 1921.

2) Die Schichten standen in Einheitlichkeit des Korns und gleichmäßiger Dicke nicht hinter den geschlemmten zurück. — Xylol eignet sich auch gut, verdampft jedoch schwerer.

an CaBi a. Die Strahlgeschwindigkeit betrug 30000 Volt. Die Schichten wurden zur Lichtsummenmessung 50 Sek. vorgewärmt bei 8,2 Wb. Heizstrom.

Man sieht, daß die dünne Schicht (untere Kurve) nach 1 Min. schon voll erregt ist, während die Lichtsumme der dicken bis 10 Min. noch ansteigt.[1]) Auch zeigt sich zu Anfang der Erregung ein schwächeres Ansteigen, was wie bei Licht als Energieverbrauch anderer kürzer dauernder Banden (β-Bande und Cu-Verunreinigung), die bei Kathodenstrahlenerregung besonders kräftig hervortreten, zu deuten ist.[2])

Um bei der Bestimmung der voll durcherregten Schichtdicke Selbsterregung und Erregung durch fremde Banden auszuschließen, die sich bei dicken Schichten, z. B. bei CaBi a, wirksam erwiesen hatten, wurde ein CaCu a 0,3 n. mit sehr wenig momentanem β-Leuchten als besonders günstig gewählt. In Tab. III sind die Werte der vollen Lichtsumme mit Kathodenstrahlen 5—10 Min. erregt zusammen mit den durch Wägung bestimmten Schichtdicken angegeben.

Tabelle III.

CaCu a 0,3 n.

Eindringtiefe der Kathodenstrahlerregung.

d mm	L_k sc	L_k/a sc/mm
0,009	26	2,9
0,013	38	2,9
0,032	97	3,0
0,052	135	2,6
0,122	147	1,2
0,32	176	0,55

Man sieht, daß die Schicht bis zu 0,04 mm von Kathodenstrahlen voll durchstrahlt wird. Die nach Al berechnete Grenzdicke[3]) im Phosphor bei den hier benutzten Strahlen (35000 Volt) beträgt 0,02 mm, die ihr proportional entsprechende Licht-

1) Den schnellsten Anstieg zur vollen Lichtsumme unter sonst gleichen Verhältnissen zeigt ZnCu.

2) Lichtabs. S. 62.

3) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen S. 63 und Tab. II, S. 261.

summe wäre 58 Sk. Daraus ergibt sich, daß Kathodenstrahlen in einen Phosphor bis zur doppelten Grenzdicke einzudringen vermögen. Dieser scheinbare Widerspruch wird jedoch leicht geklärt, wenn man die körnige Struktur der Phosphorschicht in Betracht zieht, in der bei starker Diffusion der Strahlen Luftzwischenräume und Phosphorkörner abwechselnd durchsetzt werden, so daß auf Erregung reiner Phosphorschichten über Grenzdicke nicht geschlossen werden kann. Der Grenzwert der Schicht von 0,32 mm Dicke hatte sich nach 20 Min. Bestrahlungszeit noch nicht konstant eingestellt, wofür Erregung der grünen α-Bande durch die blaue, in d_1 von α liegende β-Bande verantwortlich zu machen ist, die auch mit dem Spektralphotometer im Momentanleuchten festgestellt werden konnte.

Erregung durch die von den Kathodenstrahlen erzeugte *weiche Hochfrequenzstrahlung*, die überhaupt Phosphore nur recht matt aufleuchten läßt[1]), war nicht merkbar, wie auch das Folgende zeigt.

Zur Untersuchung, ob die volle Lichtsumme sich mit der Geschwindigkeit der auffallenden Kathodenstrahlen ändere, wurde die Lichtsumme für einen CaBi α 0,1 n. bei Strahlgeschwindigkeiten von 25—50000 Volt gemessen. Dabei zeigte sich *keine Änderung der vollen Lichtsumme mit der Geschwindigkeit der erregenden Kathodenstrahlen.* Wären Hochfrequenzstrahlen merklich mitwirkend, so müßte sich ein Gang der Lichtsumme mit der Voltgeschwindigkeit einstellen, sei es Rückgang der Lichtsumme bei Tilgung oder Zunahme bei stärkerer Erregung durch Hochfrequenzstrahlen.

Vergleich der maximalen Lichtsumme aus Licht und aus Kathodenstrahlen.

Da so voll durchstrahlte Schicht und konstante Lichtsumme gewährleistet war, konnte für die einzelnen Phosphore der Vergleich der berechneten L_d mit der vollen Lichtsumme der Kathodenstrahlen durchgeführt werden. Die Messungen zeigt Tab. IV.

In der 3. Spalte sind die Lichtsummen einmal mit Kathodenstrahlen erhalten L_k, das andere Mal mit Licht der angeführten Wellenlänge L_λ. Das Verhältnis L_k/L_λ gibt

1) Vgl. R. Tomaschek, Ann. d. Phys. 65. S. 202. 1921.

Tabelle IV.

Vergleich zwischen L_d aus Licht und aus Kathodenstrahlen.

Phosphor	Erregungsart	L sc	L_k/L_λ	L_d/L_λ
CaBi 0,1 n.	Kath.-Str.	74	1,161	1,165
	Licht 435 $\mu\mu$	63,5		
CaBi 1 n.	Kath.-Str.	126	1,167	wie 0,1 n.
	Licht 435 $\mu\mu$	108		
SrBi	Kath.-Str.	44	1,26	1,24
	Licht 435 $\mu\mu$	35		
BaBi	Kath.-Str.	32	1,23	1,19
	Licht 365 $\mu\mu$	26		
CaCu 0,3 n.	Kath.-Str.	42	1,43	1,50
	Licht 365 $\mu\mu$	29,5		
CaCu 2 n.	Kath.-Str.	73	1,38	1,37
	Licht 300 $\mu\mu$	53		
SrCu $^1/_4$ n.	Kath.-Str.	44	1,14	1,13
	Licht 300 $\mu\mu$	38,5		
SrCu n.	Kath.-Str.	49	1,11	1,12
	Licht 300 $\mu\mu$	44		
BaCu	Kath.-Str.	28	1,19	1,16
	Licht 365 $\mu\mu$	23,5		
ZnCu	Kath.-Str.	42	1,23	1,19
	Licht 365 $\mu\mu$	34		

Spalte 4. Die 5. Spalte zeigt das aus den früheren Messungen mit berechneten L_d gewonnene Verhältnis. Berücksichtigt man, daß in den berechneten L_d eine Reihe experimentell bestimmter Faktoren stecken, die alle mit Fehler behaftet sind, so muß man schließen: *Kathodenstrahlen erregen die maximale, auslöschungsfreie Lichtsumme* L_d, die genau mit der aus Gleichung (4) berechneten übereinstimmt. *Kathodenstrahlen verursachen also keine Tilgung.* Ob sie an Zentren kürzerer Dauer Ausleuchtung bewirken — was möglich wäre, da durch die Absorption eine molekular lokale Temperaturerhöhung statthaben kann —, wurde hier nicht weiter verfolgt.

Zur Kontrolle der tilgungsfreien Erregung wurde noch ein CaBi α 0,1 n. und ein CaCu α 0,3 n. erst mit Kathodenstrahlen, dann mit Licht erregt und umgekehrt. Dabei stellt sich, wenn zuletzt mit Kathodenstrahlen erregt wird, die maximale Lichtsumme L_d ein, wird jedoch zuletzt mit Licht erregt, so fällt die Lichtsumme, bis allmählich die der erregenden Wellenlänge entsprechende volle Lichtsumme L_λ erreicht wird. Das zuletzt erregende bestimmt also die schließliche Lichtsumme.

Das Fehlen jeder Tilgung bei Erregung mit Kathodenstrahlen erscheint überraschend, da die auftreffenden Elektronen nicht nur im Metallatom, sondern auch in den Schwefelatomen des Grundmaterials sekundäre Kathodenstrahlen auslösen; doch ist es durch die durchgeführten Messungen wohl als erwiesen zu betrachten, daß die Tilgung durch Kathodenstrahlen entweder ganz fehlt oder doch außerordentlich gering ist.[1])

Die fehlende Tilgung erklärt auch das prächtige, jede sonstige Erregungsart weit überbietende Aufleuchten eines Phosphors während der Bestrahlung mit Kathodenstrahlen, die eine Begünstigung der Zentren kurzer Dauer vortäuscht.

Erregende Absorption und Tilgung von SrAg β.

Die so nachgewiesene Möglichkeit der Erregung der maximalen Lichtsumme L_a mittels Kathodenstrahlen gestattet oben skizzierte einfache Methode zur Messung der Tilgung und der erregenden Absorption zur Durchführung zu bringen. Untersucht wurden hier SrAg β und die Sauerstoffphosphore CaOBi und CaOCu. Von SrAg β standen zwei Proben zur Verfügung[2]), ein SrAg β 0,1 n. und ein SrAg β 0,04 n. Die Schichten waren für beide Phosphore nahe gleich dick, so daß sich die Lichtsummen unmittelbar vergleichen lassen. L_a wurde in dünner Schicht mit Kathodenstrahlen erregt. Die sonstigen Messungen geschahen wie bei CaBi α. Folgende Tabellen zeigen die gewonnenen Daten.

Tabelle K.

SrAg β 0,1 n.

λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	$\mu_{10^{-6}}$ cm²/erg	$\varepsilon\, p_{10^{-6}}$ cm²/erg	$\varepsilon_{10^{-5}}$ cm²/erg
430—40	(1)	360—70	13	435	—	54	—	—
420—	2	355—	15	404	—	62	—	—
410—	(1)	350—	14	365	13	70	20	23
400—	(1)	340—	13	300	14	90	36	50
390—	(1)	330—	12	253	10	102	14	23
380—	4	320—	11					
370—	9							

1) Vgl. die Vorstellung über die Tilgung in „Ausleucht." III. S. 79.

2) Präpariert von Hrn. Scheifele.

SrAg β 0,1 n.

Vorgewärmt 20 Sek. bei 8,2 Wb. Bande bei 420 $\mu\mu$. Nickelglas. K-A-Zelle. Hat d_1 sehr schlecht entwickelt. $L_d = 17{,}5$ sc.

SrAg β 0,04 n.

Bedingungen wie oben. Hat d_1 nicht sichtbar. $L_d = 18{,}8$ sc.

Tabelle L.

SrAg β 0,04 n.

λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	λ $\mu\mu$	L sc	$\mu \cdot 10^{-4}$ cm²/erg	$\varepsilon p_{10^{-4}}$ cm²/erg	$\varepsilon_{10^{-4}}$ cm²/erg
390—400	0	350—60	11	435	—	42	—	—
380—	2	340—	10	404	—	50	—	—
370—	7	330—	9	365	10	60	17	20
360—	10,5			300	11	74	29	40
355—	12			253	8	80	11	28

Erregende Absorption und Tilgung der Sauerstoffphosphore.

Besondere Verhältnisse boten die bei Zimmertemperatur im unteren Momentanzustand befindlichen Sauerstoffphosphore. Zunächst zeigte sich, daß mit Licht volle Erregung auch bei der größten zur Verfügung stehenden Intensität der Hg-Lampe in annehmbaren Zeiten nicht zu erreichen war, während *Kathodenstrahlen schon in kurzer Zeit ganz auffallend große Lichtsummen* erregten, die die an Schwefelphosphoren bei gleicher Schichtdicke erregbaren um das 10—15fache übertrafen. Mit größerer Intensität und langer Belichtungszeit ließ sich zwar ein immer weiteres Steigen der Lichtsumme nachweisen, doch waren die Intensitäten des spektral zerlegten Lichtes verhältnismäßig so gering, daß sie höchstens ein Viertel der durch die Gesamtintensität der Hg-Lampe, die ja auch rein tilgende Wellenlängen umfaßt, gewonnene Lichtsumme erreichen ließen. Diese geringe Erregung durch Licht ließ auf eine sehr geringe erregende Absorption schließen, wie sie bei Phosphoren im unteren Momentanzustand auch zu er-

warten ist.[1]) Bringt man den Phosphor in eine höhere Temperaturlage, wobei er sich dem Dauerzustand nähert, so muß auch seine erregende Absorption und damit seine in gegebener Zeit erreichbare Lichtsumme steigen; geht man mit der Temperatur noch höher, so werden schließlich auch viele Zentren kurzer Dauer, die also auch besonders große Tilgung haben, immer mehr hervortreten. Die von einer konstanten Zeit ab genommene Lichtsumme wird also kleiner, je mehr man sich über den Dauerzustand hinaus dem oberen Momentanzustand nähert.

Um dies zu verfolgen, wurde ein CaOCu *a-Phosphor bei verschiedenen Temperaturen* sowohl mit Kathodenstrahlen als auch mit Licht erregt. Die Erregung mit Licht fand derart statt, daß der Phosphor auf dem Heizblech von der vollen Intensität der Hg-Lampe in 10 cm Abstand unter der Quarzröhre 10 Min. lang belichtet wurde. 2 Min. nach Schluß der Erregung wurde die Lichtsumme gemessen. Tab. V gibt die so gewonnenen Lichtsummen zusammen mit den mittels Kathodenstrahlen bei gleicher Temperatur erregten. Die Temperatur Θ des Heizblechs wurde durch Schmelzung geeigneter Stoffe in Abhängigkeit vom Heizstrom bestimmt.[2]) Da hier das gesamte Spektrum des Hg-Bogens mit allen tilgenden und erregenden Linien auf den Phosphor auffiel, muß die so erhaltene Lichtsumme beträchtlich gegen die maximale zurückstehen.

Tabelle V.

CaOCu *a*.

Erregung bei verschiedenen Temperaturen.

Θ °C	L_h sc	L_{Licht} sc	Θ °C	L_h sc	L_{Licht} sc
20°	408	192	300°	338	119
120°	395	256	400°	305	54
200°	362	200			

Man erkennt aus der Tabelle: Wird ein *Sauerstoffphosphor bei verschiedenen Temperaturen vom unteren Momentanzustand*

1) Vgl. Lichtabs. S. 42. Die geringe Absorption im unteren Momentanzustand könnte durch geringe zeitliche Schwingungsschwankungen der Resonatoren des Phosphorzentrums bedingt sein. Vgl. S. 33.

2) Ausleucht. II. S. 10.

allmählich zum Dauerzustand bis gegen den oberen Momentanzustand von Licht erregt, so *steigt seine* in begrenzter Zeit erregte und von einer bestimmten Zeit an genommene *Lichtsumme bis zu einem im Gebiet seines Dauerzustands*[1]) *liegenden Umkehrpunkt*, um dann wieder immer mehr zu fallen, je größer der Anteil an kurzen schon vor der Lichtsummenmessung abgeklungenen, aber auch der Tilgung besonders ausgesetzten Zentren anwächst. Wird ein Sauerstoffphophor von Kathodenstrahlen bei verschiedenen Temperaturen erregt, so fällt seine Lichtsumme mit steigender Temperatur immer mehr, aber langsamer als bei Lichterregung, entsprechend der Zunahme der kurzen, aber jetzt tilgungsfrei erregten Zentren.

Um aber auch für die Sauerstoffphosphor die vollen Lichtsummen, wenigstens für die Hg-Linien, zu kennen, wurde zunächst die Tilgung μ aus

$$\left(\frac{d L_d}{d t}\right)_{t=0} = J \mu L_d$$

ermittelt, dann die erregende Absorption εp aus

$$\left(\frac{d L}{d t}\right)_{t=0} = \varepsilon p J L_d$$

und schließlich konnte die volle Lichtsumme L errechnet werden aus

$$L = \frac{\varepsilon p L_d}{\varepsilon p + \mu} .$$

Die Messungen wurden, wie bei SrAg β bzw. CaBi a, durchgeführt. Vorwärmen erübrigt sich, da die Phosphore nach Schluß der Erregung dunkel erschienen. Die Tabb. M und N geben die Zusammenstellung der gefundenen Werte für CaOCu a und CaOBi a. Figg. M und N veranschaulichen die Tilgung.

CaOCu a.[2])

Bande bei 480 $\mu\mu$. Hat d_1 schlecht ausgebildet. K-A-Zelle. $L_d = 360$ sc.

---

1) Hr. F. Schmidt (Die Erdalkalisauerstoffphosphore, Ann. d. Phys. 63. S. 292. 1920) gibt als Temperaturlage der größten Dauer für CaOCu a 300—400°.

2) Präpariert nach Ann. d. Phys. 63. S. 267. 1920. Cu: Nr. 2.

Tabelle M.

CaOBi α.

λ $\mu\mu$	L sc	$\mu_{10^{-6}}$ cm²/erg	$\varepsilon p_{10^{-7}}$ cm²/erg	$\varepsilon_{10^{-7}}$ cm²/erg
435	—	9	—	—
404	23	11	7	8
365	72	7	18	23
300	27	14	11	18
275—280	—	18	—	—
253	56	24	44	84

Tilgung.

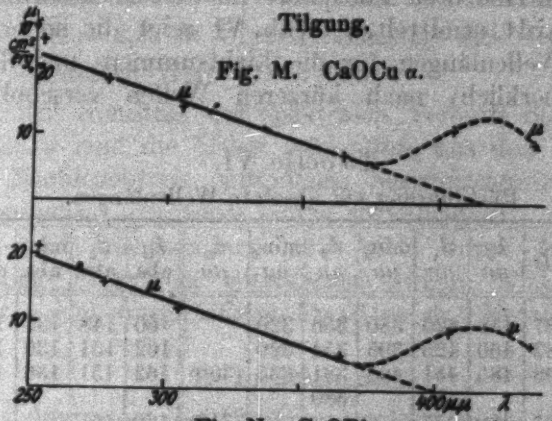


Fig. M. CaOCu α.

Fig. N. CaOBi α.

CaOBi α.[1])

Bande bei 435 $\mu\mu$. d_1 schlecht ausgebildet. K-A-Zelle, V.U.V.-Glas. $L_d = 480$ sc.

Tabelle N.

CaOBi α.

λ $\mu\mu$	L sc	$\mu_{10^{-6}}$ cm²/erg	$\varepsilon p_{10^{-7}}$ cm²/erg	$\varepsilon_{10^{-7}}$ cm²/erg
435	—	7	—	—
404	—	9	—	—
365	28	5	3	4
300	62	12	18	26
275—280	—	16	—	—
253	285	21	440	840

1) Präpariert nach Ann. d. Phys. 63. S. 268. 1920. Bi: Nr. 4.

Teil III.

Theoretische Betrachtungen über erregende Absorption und Tilgung.

I. Rückführung auf absolute Wellenlängen.

Die bereits 1910 von Hrn. Lenard entdeckten[1]), von Hrn. F. Schmidt[2]) weiter verfolgten und theoretisch geordneten Gesetzmäßigkeiten in den Dauererregungsstellen der Phosphore bei Division der beobachteten Wellenlänge durch die Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstante des Phosphors konnten hier für den ganzen Verlauf der *L*- und *ε*-Kurven nachgewiesen werden. Dazu wurden die Dielektrizitätskonstanten der oben untersuchten Phosphore mit der Meßanordnung von Hrn. Schmidt ermittelt.[3]) Tab. VI zeigt die so erhaltenen absoluten Wellenlängen für die Lichtsummen- und die etwas (meist unmerklich) nach kürzeren Wellen verschobenen *ε*-Kurven.

Tabelle VI.

Rückführung auf absolute Wellenlängen.

Phosphor		$\sqrt{D}$	λ_G $\mu\mu$	d_1 $\mu\mu$	$\min_1$ $\mu\mu$	d_2 $\mu\mu$	$\min_2$ $\mu\mu$	d_3 $\mu\mu$	λ_G abs.	d_1 abs.	$\min_1$ abs.	d_2 abs.	$\min_2$ abs.	d_3 abs.
CaCu 2 n.		2,87	458	425	380	356	320		160	148	132	125	111	
CaCu 0,3 n.		2,83	460	425	395	354	320		162	151	139	126	112	
SrCu $^1/_4$ n	*L*	2,98	485	451	405	381	335	(300)	162	151	136	127	112	101
	ε			450		380								
SrCu n.		3,05	480	455	—	—	—	(310)	160	151	—	—	—	101
BaCu	*L*	2,94	470	436	400	371	325	(300)	160	148	136	126	110	102
	ε					370								
CaBi 0,1 n.		2,86	465	430	360	326			162	150	126	114		
SrBi	*L*	2,95	470	441	365	330			162	149	124	112		
	ε			440										
BaBi		3,22	515	478	405	364			160	148	126	113		
								Mittel für Cu	160	150	136	126	110	101
								Mittel für Bi	161	149	126	113		

Aus obiger Tabelle ersieht man: Die *Lichtsummenkurven und die Kurven der erregenden Absorption* der Cu *α*- und der Bi *α*-Phosphore lassen sich *nicht nur in ihren Erregungsmaxima d, sondern auch* in ihren Grenzwellenlängen λ_G nach

1) Lichtem. Ann. d. Phys. **31**. S. 661. 1910.

2) F. Schmidt, Ann. d. Phys. **64**. S. 724. 1921.

3) a. a. O. S. 714. Über den Zusammenhang der Erregungsmaxima aus dem hellsten Nachleuchten, der Lichtsumme und des lichtelektrischen Effekts an Phosphoren vgl. II.

langen Wellen und in den Minima der Erregung min und damit *in ihrem ganzen Verlauf auf absolute Wellenlänge reduzieren.* Die absoluten Wellenlängen der *d*-Maxima folgen der von Hrn. Schmidt angegebenen *Serienformel*:

$$\nu = NZ^2_{\text{eff.}} \frac{1}{n^2} \cdot \quad ^1)$$

Die Dielektrizitätskonstanten der Strontium-Silber-Phosphore konnten nicht bestimmt werden, da nur sehr geringe Mengen, mit deren Verderben bei der Messung gerechnet werden mußte, zur Verfügung standen; doch deuten die Dauererregungsstellen auf eine Wurzel aus der Dielektrizitätskonstanten $\sqrt{D} = 2{,}9$, in Übereinstimmung mit dem von Hrn. Lenard benutzten Wert $\sqrt{D} = 2{,}96$.[2])

Mit der Kenntnis des spektralen Verlaufs der *erregenden Absorption* ε sind die bisher bekannten, aus den Maxima des hellsten Nachleuchtens gefundenen Serienzusammenhänge auf ihre *physikalisch einfachste Größe* zurückgeführt, denn Nachleuchten und Lichtsummen sind stets durch Überlagerung verschiedener Vorgänge entstandene äußere Wirkungen, hingegen ist ε eine unmittelbare Funktion des Metallatoms.

II. Lichtsummen.

Betrachtet man die Lichtsummenkurven im einzelnen, so fällt zunächst der überaus steile Abfall nach längeren Wellen auf, während nach kürzeren die Kurven langsam mit langem Schweif heruntergehen. Das Gebiet zwischen zwei *d*-Erregungsstellen ist als Überlagerung eines solchen langsamen Abfalls des ersten Maximums und eines steilen Anstiegs des nächsten Maximums anzusehen. Diese Asymmetrie der Dauererregungsstellen ist auch in den Maxima des sichtbaren Nachleuchtens beobachtet worden.[3])

Ferner ersieht man: a) Die *Maxima sind recht verschieden ausgebildet.* — Die größte Lichtsumme ergab meist d_2, auch

1) a. a. O. S. 731.

2) Lichtem. S. 17.

3) Lichtem. S. 9. Vgl. auch die Erregungsverteilung des Eosin in wässeriger Lösung in Pringsheim, „Fluoreszenz und Phosphoreszenz im Lichte der neuen Atomtheorie" S. 96. Der dort angegebenen Kurve IV liegt wohl eine falsche spektrale Energieverteilung des Nernstfadens zugrunde.

bei den Sauerstoffphosphoren. Nicht so gut ist meist d_3 ausgebildet, das bei den Wismutphosphoren ganz zu fehlen scheint. d_1 ist bei CaCu 0,3 n. und SrCu $^1/_4$ n. weniger gut, bei SrAg und den Sauerstoffphosphoren sehr schlecht entwickelt. Auffallend ist das so gut wie fehlende d_2 bei dem untersuchten SrCu n.

Die Frage nach der verschieden guten Ausbildung der Dauererregungsstellen kann nicht immer mit Absorption im Füllmaterial beantwortet werden. Denn gerade bei SrCu n. scheint das d_1-Maximum vollständig gut mitsamt dem schweifartigen Fortsatz verfolgbar, während von d_2 kaum Andeutungen vorhanden sind. Auch das Fehlen von d_3 bei den Wismutphosphoren und dessen schlechte Ausbildung bei BaCu deuten darauf, daß die verschiedenartige Ausbildung mit dem Phosphorzentrum selber in ursächlichem Zusammenhang steht. In welcher Weise, sei hier nicht weiter behandelt.[1]) Dagegen kann die schlechte Ausbildung von d_1 bei CaCu 0,3 n., SrCu $^1/_4$, SrAg β und der Sauerstoffphosphore sehr wohl durch aus dem Sichtbaren hereinragende Absorptionen im Füllmaterial erklärt werden, worauf Hr. Lenard als nächstliegender Annahme bereits 1912[1]) hingewiesen hat.

b) *Die d-Maxima der Lichtsummen sind gegenüber den d-Maxima des sichtbaren Nachleuchtens nach längeren Wellen verschoben.* — Folgende Tabelle gestattet für CaBi und SrBi einen Vergleich der absoluten Wellenlängen für die hier untersuchten Zentren langer Dauer, die lichtelektrisch gefundenen Maxima von Hrn. Göggel [2]) zusammen mit den Maxima des hellsten Nachleuchtens dieser Phosphore und die von Hrn. Schmidt[3]) angegebenen Wellenlängen des hellsten Nachleuchtens.

Die lichtelektrischen Maxima, die die Zentren kürzester Dauer umfassen, zeigen besonders bei SrBi α eine sehr weite Verschiebung nach längeren Wellen gegenüber den hauptsächlich Zentren mittlerer Dauer umfassenden Maxima des sicht-

1) Lichts. S. 20. Die von Hrn. Hirsch in einer umfangreichen Untersuchung behandelte Frage nach einem Zusammenhang der Ausbildung der *d*-Maxima mit den Herstellungsbedingungen der der Phosphore hat keine positiven Anhaltspunkte gegeben (Dissert. Heidelb. 1912).

2) K. Göggel, Ann. d. Phys. 67. S. 301. 1922.

3) Ann. d. Phys. 64. S. 725. 1921.

Tabelle VII.

Lage der Lichtsummenmaxima.

CaBi α		SrBi α		Beobachtet für
d_1 abs. $\mu\mu$	d_2 abs. $\mu\mu$	d_1 abs. $\mu\mu$	d_2 abs. $\mu\mu$	
149,8	113,8	149,3	113,4	Lichts. langer Dauer
146,8	113,8	155,3	120,2	lichtelektr. (Göggel)
147	113,5	149	113	Nachleucht. (Schmidt)
148,6	115,1	151,4	113,8	Nachleucht. (Göggel)

baren Nachleuchtens. Entsprechend fand Hr. Lenard[1]) bei CaBi α ein allmähliches Wandern von d_1 nach kürzeren Wellenlängen während fortschreitender Erregung. Daß die Maxima der Lichtsumme bei längeren Wellen liegen als die Maxima des sichtbaren Nachleuchtens, hat Hr. Lenard[2]) auch an d_1 CaBi α feststellen können und durch das sehr viel langsamere Abklingen der Zentren langer Dauer, die dadurch kaum etwas zum beobachteten Nachleuchten beitragen, gedeutet. Hier wird diese Verschiebung allgemein für alle Phosphore erwiesen.

c) Die Werte der Lichtsumme des 0,04 n-SrAg β sind bei nahe gleicher Schichtdicke stets kleiner als die des 0,1 n., aber größer als proportional der Metallmenge, was auf Bildung einer größeren Zahl Zentren langer Dauer im niedriger normalen Phosphor schließen läßt und damit den von Hrn. Lenard in „Abkl. S. 32" gezogenen Schluß bestätigt.

d) Das Verhältnis der maximalen Lichtsumme L_d zur größten gemessenen Lichtsumme, das für viele Anwendungen sehr wichtig ist, kann aus den Tabellen jederzeit angegeben werden. Es ändert sich mit der Zentrendauer derart, daß für längere Dauer die volle Lichtsumme der d-Erregungsstelle näher an L_d herankommt. Der von Hrn. Lenard öfters benutzte Wert $L_d/L_{435} = 1{,}13$[3]) für CaBi α erfährt keine für die daraus gezogenen Schlüsse in Betracht kommende Änderung.

---

1) Ausleucht. III. S. 29.
2) Lichtabs. S. 60.
3) Abs. Mess. S. 32. Lichtabs. S. 66.

III. Erregende Absorption εp und ε.

Eine Betrachtung der εp- und ε-Kurven lehrt:

a) Die Kurven werden um so steiler, je näher L an L_a heranrückt, wegen $L_a - L$ im Nenner der Gleichung

$$\varepsilon p = \frac{\mu L}{L_a - L} .$$

b) Die Absolutwerte von εp und ε sind für die α-Banden der Erdalkalisulfidphosphore von gleicher Größenordnung, für ZnCu α sind sie erheblich größer, was nur zum Teil seinen Grund in größerem Anteil an kürzeren Zentren haben kann, in der Hauptsache durch die ausgeprägte Tilgung verursacht ist. Die hier gefundenen Werte an α_1 CaBi α sind etwas kleiner als die von Hrn. Lenard aus Absorptionsmessungen bestimmten[1]) (1,2 und $1 \cdot 10^{-4}$ cm²/erg), was sich jedoch ohne weiteres durch die hier benützten Zentren langer Dauer erklärt. Dieses Kleinerwerden der erregenden Absorption mit größerer Zentrendauer[2]) kann für alle untersuchten Phosphore verfolgt werden, wenn es auch weit nicht in so starkem Maße statthat, wie der Gang der Tilgung mit der Zentrendauer.

c) Die *Maxima der wohl ausgebildeten Dauererregungsstellen steigen mit kürzeren Wellenlängen immer mehr an*, wie man an SrCu $^1/_4$ n. und ZnCu deutlich erkennt.

d) Im Gegensatz zu den εp-Kurven steigen die ε-Kurven in ihrer mittleren Höhe nach kürzeren Wellenlängen hin fortdauernd an, so daß man von der Grenzwellenlänge gegen Rot durch die Minima des Nachleuchtens mit großer Annäherung eine Gerade legen kann. Man vergleiche dazu besonders CaBi und CaCu 2 n. Dieser deutliche Hinweis auf *Überlagerung eines selektiven Effektes über einen nahezu geradlinig nach kürzeren Wellenlängen ansteigenden*, der bei den εp-Kurven nicht hervortritt, kann als guter Anhalt dafür gelten, daß der Ökonomiekoeffizient des erregenden Lichtes als das Verhältnis des emittierten Lichtquants zum erregenden Lichtquant auszusetzen ist.[3]) $p = \nu_b / \nu_e$.

---

1) Lichtabs. S. 45.
2) Ausleucht. III. S. 30.
3) Lichtabs. S. 70.

Reduzierte Kurven der erregenden Absorption.

Für die verschiedenen Kurven der erregenden Absorption entsteht die Frage, ob sie sich nicht auf eine einheitliche Relativkurve des phosphoreszenzfähigen Metallatoms zurückführen lassen. Bezogen auf ε_{d_1} als Einheit (= 10) zeigt folgende Tabelle die so gewonnenen Zahlenbeziehungen, die die Fig. 2 noch deutlicher übersehen läßt.

Tabelle VIII.

Relativwerte der erregenden Absorption.

λ abs. $\mu\mu$	CaBi ε	SrBi ε	BaBi ε	CaCu 2n. ε	CaCu 0,3n. ε	SrCu $\frac{1}{4}$ n. ε	SrCu n. ε	BaCu ε	ZnCu ε
101						37	37		
104		12	11						
106	8,5			12		16	14		
110	18	26	21	7,1		7,6		7,8	10
113	27	32	29						
115	23	15	20	7,8	9	8,5		8,6	9
120	5,3	5,5	4,8	13	13	12		11	13
125	2,8	3,2	2,5	24	20	20		25	22
126				22	(25)	(25)		23	25
130	2,8	3,3	2,4	5,1	8	10		5,0	8
135	3,1	3,6	2,8	3,8	3,5	3,4		2,8	3,5
140	3,4	4,4	4,2	5,0				6,3	5
145	6,2	6,8	6,9	7,8			7,1	7,5	7
149	10	10	10	10			9	10	8,2
150				7,8			10	9,4	10
155	1,5	1,5	0,6	0,5			2	1,1	2

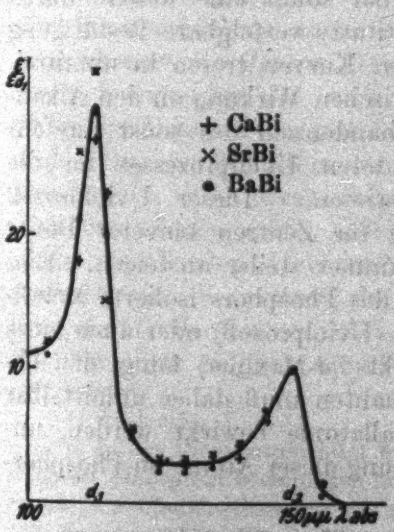


Fig. 2a. Bi.

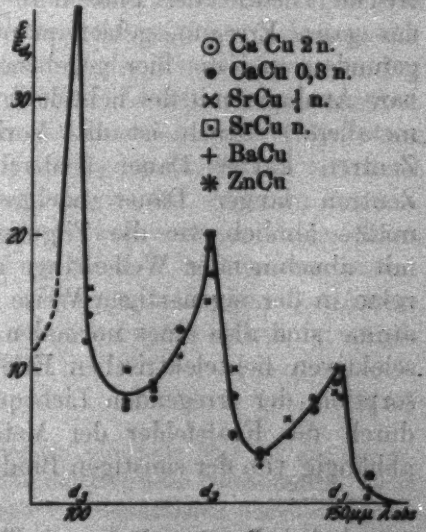


Fig. 2b. Cu.

Man erkennt, daß sich für wohlausgebildete Erregungsstellen innerhalb der Versuchsfehler Relativkurven der Metallatome tatsächlich finden lassen. Besonders die Erregungsmaxima selbst und die Gebiete im Minimum der Erregung zeigen gute Zahlenübereinstimmung. Die steilen Anstiege der Kurven hingegen weisen naturgemäß die größten Abweichungen auf, da eine geringe Verschiebung der absoluten Wellenlängen eine sehr bedeutende Größenänderung der erregenden Absorption bedingt. Da SrCu $^1/_4$ n. und CaCu 0,3 n. schlecht ausgebildetes d_1 hat, wurde in Übereinstimmung mit den ε-Werten bei den anderen Phosphoren $\varepsilon_2 = 25$ gesetzt und die weiteren Relativwerte auf d_2 bezogen. Für CaCu 2 n. und BaCu liegt d_1 bei 149 $\mu\mu$ und d_2 bei 125 $\mu\mu$. Tab. VIII und Fig. 2 führen so zu dem Schlusse: *Die Kurven der erregenden Absorption der verschiedenen Phosphore lassen sich auf charakteristische Relativkurven des phosphoreszenzfähigen Metallatoms zurückführen, unabhängig von Grundmaterial und Zusatz.*

Damit ist die Phosphoreszenzerregung auch *quantitativ als ausschließliche Wirkung des Metallatoms* nachgewiesen. Die Relativkurven der erregenden Absorption stellen den Gang des selektiven lichtelektrischen Effektes am phophoreszenzfähigen Metallatom dar, der einem normalen, schwächer ansteigenden (Ultraviolettprozeß) überlagert ist. Die lichtelektrische Theorie der Phosphore hat somit eine weitere durch das ganze Erregungsgebiet quantitativ verfolgbare Bestätigung gefunden und die hier gegebenen Kurven treten in unmittelbare Analogie mit der lichtelektrischen Wirkung an den Alkalimetallen.[1]) Auch ist das Vorhandensein des sonst nur für Zentren kurzer Dauer beobachteten Uviolprozesses für die Zentren langer Dauer nachgewiesen. Dieser Uviolprozeß müßte ähnlich wie die Tilgung für Zentren kürzerer Dauer mit abnehmender Wellenlänge immer steiler ansteigen. Einzelne in der eigenartigen Weise des Phosphors isolierte Metallatome sind also eines normalen (Uviolprozeß) oder auch eines selektiven lichtelektrischen Effekts (d-Maxima) fähig, die Absorption der erregenden Lichtquanten muß daher unmittelbar durch die Kraftfelder der Metallatome bewirkt werden, unabhängig von der sonstigen Bindung dieser Atome im Phosphor-

1) Vgl. K. Göggel, Ann. d. Phys. 67. S. 301. 1922.

zentrum bestimmter Größe. Für größere bzw. kleinere Zentren können sich die Kraftfelder des Metallatoms weiter ausbreiten bzw. werden zusammengedrängt und damit müssen sich auch die Relativkurven ändern. Obige Kurven stellen also einen bestimmten Mittelwert über Zentren langer und längster Dauer der untersuchten Phosphore dar, was wiederum eine Erklärung für manche Abweichungen der Relativwerte ergibt, wie der systematische Verlauf der Kurven für SrBi oberhalb CaBi und dieser wieder über BaBi im Minimum von d_1. Für Zentren einheitlicher Mitteldauer würde sich strenge Übereinstimmung erwarten lassen.

Durch die volle Erregung mit den monochromatischen Hg-Linien, deren Lichtsummenwerte mit denen mittels Nernstfaden erregten genau übereinstimmen, sind *neben räumlichen auch zeitliche Schwingungsänderungen im Phosphorzentrum* nachgewiesen, denn wären zeitliche Schwankungen nicht vorhanden, so würde durch monochromatisches Licht stets nur der Teil der Zentren erregbar sein, deren Erregungsschwingungsdauer in genügender Übereinstimmung mit der erregenden Wellenlänge sind[1]), während ein kontinuierliches Spektralgebiet sämtliche Zentren erregen müßte, also dessen Lichtsumme größer als die mit monochromatischem Lichte zu erwarten wäre. Damit sind *die Werte der erregenden Absorption für die verschiedenen Wellenlängen aufzufassen als die Wahrscheinlichkeit dafür, wie stark die verschiedenen in räumlichen und zeitlichen Schwingungsschwankungen begriffenen Resonatoren des Phosphorzentrums auf die Schwingungen des auftreffenden Lichtquants ansprechen*, wobei die Dauererregungsstellen als Resonanzlagen aufzufassen sind. Aus der Kenntnis der Schwingungsdauer der einzelnen Resonatoren und deren Schwankungen im Zentrum in verschiedenen Zeiten müßte sich das Verhalten dieser Resonatoren einem einfallenden Lichtquant gegenüber bestimmen lassen, wodurch eine Verwertung der ε-Kurven in Fragen des Atombaus, ferner der Lichtemission und deren Beeinflussung durch Nachbaratome möglich wäre.[2])

1) Ausleucht. I. S. 14.

2) In der Dissertation folgt hier ein Abschnitt über die aus der erregenden Absorption berechneten lichtabsorbierenden Querschnitte. Diese zeigen gute Übereinstimmung mit anderen Kenntnissen über Zentrenbau und Zentrengröße.

IV. Kurzwellige Tilgung μ.

Eine Betrachtung der Tilgungskurven lehrt zunächst:

a) Die *Verteilungskurven der kurzwelligen Tilgung* steigen *geradlinig* nach kurzen Wellenlängen zu an (außer ZnCu a, vgl. unten).

b) Die *Absolutwerte der Tilgung sind um so größer, je kleiner die Zentrendauer* des betreffenden Phosphors, wie man an den beiden Strontiumsilberphosphoren gut vergleichen kann. Die von Hrn. Lenard an CaBi a gefundenen Tilgungswerte sind entsprechend auch erheblich größer als die hier für Zentren langer Dauer gemessenen in Übereinstimmung mit der ebenfalls dort ermittelten Änderung der Tilgung mit der Zentrendauer, so daß sie sich an die hier ermittelten Werte gut anschließen.

c) Werte der *langwelligen Tilgung* wurden gemessen bei BaCu a, CaOBi a und CaOCu a. Das bei den Sauerstoffphosphoren feststellbare Maximum liegt weiter nach kurzen Wellenlängen als einem Gang der langwelligen Tilgung mit der Dielektrizitätskonstanten entspräche, wie sich ja auch bei den Wismutschwefelphosphoren kein voller Einfluß der Dielektrizitätskonstanten[2]) auf die langwelligen Tilgungsmaxima hat finden lassen.

Kurzwellige Tilgung ist lichtelektrische Wirkung am Gattungsatom.

Als Ursache der kurzwelligen Tilgung hat Hr. Lenard lichtelektrische Wirkung des auffallenden Lichtes am Gattungsatom (S, O) des Zentrums wahrscheinlich gemacht[3]), derart, daß ein Elektron lichtelektrisch vom Gattungsatom abgetrennt wird und mit einem Betrag an kinetischer Energie am Metallatom anlangt, der unterhalb dem Lichtquant der emittierten Bande bleibt; daher das Fehlen der Lichtemission. Die experimentell gefundenen geradlinigen Tilgungskurven legen nahe, daß es sich dabei um einen normalen lichtelektrischen Effekt

1) Ausleucht. II. S. 30 und Tab. VII.

2) Ausleucht. III. S. 44.

3) Ausleucht. I. S. 16 u. 17 und Ausleucht. III. S. 76—80. An der angeführten Stelle ist lichtelektrische Wirkung am Gattungsatom und voller Einfluß der Dielektrizitätskonstante auf die kurzwellige Tilgung erwartet worden auf Grund der dort entwickelten Vorstellungen, konnte aber damals nicht nachgewiesen werden.

am Gattungsatom handelt. Die Extrapolation dieser geradlinigen Kurven bis zum Schnitt mit der Abszisse müßte dann die Grenzwellenlänge dieser normalen lichtelektrischen Wirkung ergeben und diese Grenzwellenlänge müßte mit dem Gattungsatom in ursächlichem Zusammenhang stehen. Um einen solchen Zusammenhang zu erkennen, wurde zur Rückführung auf absolute Wellenlängen, wie bei den Erregungsstellen, die extrapolierte Grenzwellenlänge μG durch die Wurzel aus der Dielektrizitätskonstanten des Phosphors dividiert. Für SrAg β wurde aus den Dauererregungsmaxima und deren absoluten Wellenlängen auf eine $\sqrt{D} = 2{,}9$ geschlossen. Vgl. S. 107. Die so gefundene Bezeihung zeigt Tab. IX.

Tabelle IX.

Grenzwellenlänge der kurzwelligen Tilgung.

Phosphor	$\sqrt{D}$	μ_G $\mu\mu$	$\frac{\mu_G}{\sqrt{D}}$ $\mu\mu$
CaSBi	2,86	625	219
SrBi	2,95	660	222
BaBi	3,22	710	232
CaCu 2 n.	2,87	635	224
CaCu 0,3 n.	2,83	650	229
SrCu $^1/_4$ n.	2,98	625	217
SrCu n.	3,05	670	222
BaCu	2,94	615	209
SrAg β 0,1 n.	2,9	620	215
SrAg β 0,04 n.	2,9	615	215
		Mittel:	220
CaOCu	2,70	415	153
CaOBi	2,70	400	148
		Mittel:	150

Man ersieht unmittelbar: *Die absolute Grenzwellenlänge der kurzwelligen Tilgung ist eine sowohl für Schwefel- wie für Sauerstoffphosphore konstante Größe des Gattungsatoms, unabhängig von Zusatz und wirksamem Metall.* Sie liegt für Schwefelphosphore bei $\lambda_S = 220\,\mu\mu$, für Sauerstoffphosphore bei $\lambda_O = 150\,\mu\mu$. Es muß also im Gegensatz zur langwelligen Tilgung voller Einfluß der Dielektrizitätskonstanten des Phosphors

vorliegen[1]); die Kraftfelder der Gattungsatome müssen also auch die Umgebung des Zentrums durchsetzen. Daß λ_S größer ist als λ_O, steht in Übereinstimmung damit, daß das Schwefelatom positiver als das Sauerstoffatom.

Will man von der Grenzwellenlänge auf die zur Befreiung des Elektrons nötige Abtrennungsarbeit — in unserem Falle Abtrennungsarbeit + kinetische Energie des freien Elektrons = *Austrittsmindestenergie* —, so hat man folgendes zu erwägen: Ein Resonator schwinge im Äther mit der Frequenz ν, sein Lichtquant ist $h\nu$, in einem Medium der Dielektrizitätskonstanten D wird seine Schwingungszahl $\nu = \frac{\nu}{\sqrt{D}}$ entsprechend der Kirchhoff-Thomsonschen Formel

$$\nu = \frac{\text{const.}}{\sqrt{D}},$$

also sein Lichtquant $h\nu' = \frac{h\nu}{\sqrt{D}}$.

Trifft nun ein einfallendes Lichtquant $h\nu' = \frac{h\nu}{\sqrt{D}}$ einen solchen Resonator, so wird er im Äther zum Mitschwingen angeregt mit einer Schwingungszahl $\frac{\nu}{\sqrt{D}}$, im Dielektrikum D mit einer Schwingungszahl ν. Ein auftreffendes Lichtquant gibt bei der Tilgung seine Energie an das Elektron des Gattungsatoms ab und dieses Elektron wird sein Atom verlassen, wenn das Gattungsatom gerade auf das wirksame Lichtquant in der Resonanzlage anspricht.

Zur Abtrennung eines lichtelektrischen Elektrons im Medium der Dielektrizitätskonstanten D ist also eine im Verhältnis $\sqrt{D}$:1 kleinere Energie nötig als im Äther.

In diesem Ergebnis liegt die theoretische Deutung der Rückführung auf absolute Wellenlänge, wobei $\sqrt{D}$ nicht als Vergleichsmaß der Wellenlänge an sich auftritt, sondern als Maß der benötigten Energiebeträge, sei es zur Erregung oder zur Tilgung. Unter Annahme vollständiger Energieumsetzung folgt in unserem Falle, da die Dielektrizitätskonstante des flüssigen Sauerstoffs = 1,46 und die des Schwefels = 4 ist.

Die *lichtelektrische Austrittsmindestenergie eines Elektrons*

1) Ausleucht. III. S. 44.

vom Sauerstoff als Gattungsatom im Phosphor entspricht einem *Lichtquant der Wellenlänge* 180 $\mu\mu$;

die *lichtelektrische Austrittsmindestenergie vom Schwefel* einem *Lichtquant von* 440 $\mu\mu$.

Ob darin die Abtrennungsarbeit am Atom oder am Molekül enthalten ist, an welches das Gattungsatom gebunden ist, muß bei der innigen Bindung der Atome des Phosphorzentrums zugunsten eines mehr oder weniger großen Moleküls entschieden werden, was eine Verminderung der Austrittsmindestenergie gegenüber der am Atom zu leistenden bedeutet.

Zum Vergleich der Abtrennungsarbeit selber können aus anderweitigen Bestimmungen die Trägerbildungsspannungen an Schwefel und Sauerstoff herangezogen werden. Für O_2 im Gaszustand beträgt die Trägerbildungsspannung 9 Volt [1]) oder nach dem Quantenansatz $eV = h\nu$ umgerechnet die Energie eines Lichtquants der Wellenlänge 138 $\mu\mu$. Ob der aus der Tilgung gefundene Wert 180 $\mu\mu$ mit diesem identisch werden dürfte, muß verneint werden, da bei den Phosphoren weit größere Molekülkomplexe in Frage kommen. Aber die größenordnungsweise Übereinstimmung beider aus so verschiedenen Untersuchungen gewonnener Werte darf wohl als Bestätigung der Annahme angesehen werden, daß es sich bei der absoluten Grenzwellenlänge der kurzwelligen Tilgung tatsächlich um eine auf das Gattungsatom zu beziehende Austrittsmindestenergie handelt. Auch mag die trägerbildende Wirkung des Schumannvioletts auf reines O_2 [2]) gegenüber dem unwirksamen längerwelligen Intraquarzviolett als Beweis herangezogen werden, daß der Schwellenwert der lichtelektrischen Wirkung an Sauerstoff bei sehr kurzen Wellenlängen ($< 200\ \mu\mu$) liegt. Für den Schwefel haben sich hier vergleichbare Zahlenwerte nicht finden lassen, da weder Trägerbildungsspannung noch der Schwellenwert der lichtelektrischen Wirkung bisher einigermaßen sicher bekannt sind. Vielleicht könnte der von Hrn. Born [3]) errechnete Wert der Trägerbildungsspannung 45 ± 15 cal in Betracht kommen, der einem Schwellenwert von 450—600 $\mu\mu$ entspräche.

1) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen. S. 163. 1918.
2) P. Lenard u. C. Ramsauer, Über Wirkungen sehr kurzwelligen Lichtes auf Gase. Heidelb. Akad. Teil V. S. 23. 1912.
3) M. Born, Zeitschr. f. Physik 1. S. 253. 1920.

Während also schon die Geradlinigkeit der μ-Kurven die Annahme eines normalen lichtelektrischen Effekts bestätigte, kann der so möglich gewordene Nachweis der mindestens nahen Übereinstimmung der aus Tilgung wie aus Trägerbildungsspannung gefundenen Austrittsmindestenergie am Sauerstoff wie am Schwefel als unmittlbarer Beweis dafür angesehen werden, daß die kurzwellige Tilgung in normalen lichtelektrischem Effekt am Gattungsatom des Phosphors besteht. Zu gleicher Zeit wird der Anfangspunkt der kurzwelligen Tilgung als Schwellenwert dieser lichtelektrischen Wirkung aus Daten berechenbar, die von Phosphorbeobachtungen ganz unabhängig sind.

Die Kurven der kurzwelligen Tilgung lassen sich analytisch darstellen durch die einfache Gleichung:

$$\mu = k \frac{\nu - \nu_g}{\sqrt{D}} .$$

ν_g = extrapolierte Schwingungszahl der Grenzwellenlänge und k ein von der Zentrendauer abhängiger Faktor, der um so größer, je kürzer die Dauer. Geht man von Zentren langer Dauer zu immer kürzeren über, so müssen die Tilgungsverteilungskurven immer steiler ansteigen, die Absolutwerte immer größer werden, die Grenzwellenlänge jedoch muß als Schnittpunkt der ganzen Kurvenschar erhalten bleiben. Die Tilgungsmessungen an beiden Silberphosphoren (S. 101) lassen das Eintreffen dieser Folgerung auch sehr gut erkennen.

Tilgung an ZnCu α.

Im Gegensatz zu den stets geradlinigen Kurven der kurzwelligen Tilgung bei den Erdalkaliphosphoren zeigt der hier untersuchte ZnSCu α-Phosphor nur zuerst einen geradlinigen Anstieg bis gegen 450 $\mu\mu$, dann einen wesentlich flacheren Verlauf zwischen 390—480 $\mu\mu$, um dann wieder steiler gegen kürzere Wellenlängen anzusteigen. Ob im Gebiet um 300 $\mu\mu$ herum nochmals eine Einbuchtung der Kurve statthat, konnte mit Hilfe der Hg-Lampe nicht festgestellt werden. Der längerwellige Teil der Tilgungskurve deutet auf eine Grenzwellenlänge bei 640 $\mu\mu$, entsprechend der Dielektrizitätskonstanten 7,7. Die Tangente im Kurvenverlauf bei 440 $\mu\mu$ schneidet jedoch erst bei 950 $\mu\mu$ die Abszisse, wozu eine Dielektrizitätskonstante 18

gehörte, während nach kürzeren Wellenlängen zu wieder mit einer kleineren Dielektrizitätskonstante zu rechnen wäre.[1])

Nun haben bereits die Hrn. Gudden und Pohl[2]) für ZnCu eine Vergrößerung der Dielektrizitätskonstanten mit abnehmender Wellenlänge gefunden, die bei 480 $\mu\mu$ das Doppelte der Dielektrizitätskonstanten des unbelichteten Phosphors erreicht (von 7,2 bis gegen 15) und für kürzere Wellenlängen auch noch größer bleibt als die Dunkeldielektrizitätskonstante. *Diese Änderung der Dielektrizitätskonstanten fällt in Größe und Wellenlänge mit der aus der Tilgung geschlossenen Änderung gerade zusammen.* Es muß also hier ein ursächlicher Zusammenhang zwischen kurzwelliger Tilgung und Dielektrizitätskonstantenänderung bei Belichtung vorliegen. Eine solche Beziehung zwischen Dielektrizitätskonstanten und Tilgung, also zwischen Dielektrizitätskonstante und lichtelektrischer Wirkung läßt sich erklären aus der mit Vergrößerung der Dielektrizitätskonstanten verkleinerten elektrischen Kraft, derenthalber schon eine kleinere Energie genügt, um das Elektron vom Gattungsatom loszulösen. So können hier langwellige Lichtquanten bereits lichtelektrisch wirksam werden. Zu gleicher Zeit bestätigt sich hier auch der oben erörterte (S. 116) Zusammenhang zwischen Austrittsmindestenergie und Dielektrizitätskonstanten, also zwischen lichtelektrischen Effekt und Dielektrizitätskonstante. ZnCa zeigt an ein und demselben Präparat, was sonst nur durch Vergleich verschiedener Phosphore erschlossen werden kann. Mit Vergrößerung der Dielektrizitätskonstanten, rückt der Schwellenwert der kurzwelligen Tilgung nach längeren Wellen. Der absolute Schwellenwert des Gattungsatoms bleibt erhalten, wieder in Übereinstimmung mit der lichtelektrischen Auffassung der Tilgung.

Kurzwellige und langwellige Tilgung.

Der so zahlenmäßig durchgeführte Nachweis der kurzwelligen Tilgung als lichtelektrische Wirkung des auffallenden Lichtes am Gattungsatom des Phosphors bestätigt das Zutreffen der bereits von Hrn. Lenard durchgeführten *grund-*

1) Hr. R. Tomaschek (Ann. d. Phys. 65. S. 202. 1921) gibt als mittlere Dielektrizitätskonstante 9 an.

2) B. Gudden und R. Pohl, Zur Kenntnis der Sidotblende. Zeitschr. f. Physik. 1. 1920.

sätzlichen Trennung[1]) *zwischen langwelliger und kurzwelliger Tilgung*, derart, daß die langwellige als Resonanzerscheinung am polarisierten Paar Metallatom-Zentrenmolekül, die kurzwellige Tilgung jedoch als lichtelektrische Wirkung am Gattungsatom gedeutet wird. Für die kurzwellige Tilgung ist volle Mitwirkung der Dielektrizitätskonstanten erwiesen, während die langwellige Tilgung sich nur schwach mit der Dielektrizitätskonstanten ändert.[2]) Zwischen reiner kurzwelliger und reiner langwelliger Tilgung liegt ein Gebiet, in dem sich beide Wirkungen überlagern.

Schlußbemerkung und Zusammenfassung.

Die in vorliegender Arbeit gefundenen experimentellen Kurven der erregenden Absorption und der Tilgung als Funktionen der Wellenlängen und die daraus gezogenen Schlüsse gehen letzten Endes zurück auf die *Differentialgleichung* (I) *der Phosphorerregung*; sie ergeben daher in ihrer Übereinstimmung bei Verfolgung zweier verschiedener Wege der Anwendung der Gleichung eine gute Prüfung des Zutreffens derselben. Auch konnte hier durch Vergleich mit anderen gesicherten Untersuchungen der physikalische Sinn der genannten Kurven stets aufgezeigt und verfolgt werden, wobei sich ebenfalls kein Widerspruch mit bereits Bekanntem erkennen ließ, sondern vielmehr dieses Bekannte wesentlich erweitert, quantitativ verfeinert und dabei gleichzeitig einheitlicher in sich zusammengefaßt werden konnte. Daraus ist zu folgern: *Die Differentialgleichung* (I) *ist imstande für Zentren langer Dauer alle vorkommenden Verhältnisse der Phosphoreszenzerregung* und des ersten Abfalls der Lichtsumme *zu beschreiben*; denn in diesen Beziehungen wurde sie in Vorliegendem durchweg und eingehend beansprucht.

Die wichtigsten Ergebnisse vorliegender Arbeit seien kurz zusammengefaßt:

Experimentell: Die Verteilung der Lichtsumme, der erregenden Absorption und der Tilgung der Phosphorzentren langer Dauer mit der Wellenlänge werden auf zwei verschiedenen Wegen für eine Reihe Phosphore ermittelt. Für die

1) Ausleucht. III. S. 70.
2) Ausleucht. III. S. 44.

durch kleine erregende Absorption ausgezeichneten Sauerstoffphosphore wird ein besonderer Weg angegeben zur Ermittelung obiger Verteilungskurven.

Kathodenstrahlen erregen für Zentren langer Dauer die tilgungsfreie maximale Lichtsumme.

Die Verteilungskurven werden durch Dielektrizitätskonstantenmessungen auf absolute Wellenlängen zurückgeführt.

Theoretisch: Ausbildung, spektrale Lage und absolute Werte der Lichtsummen werden für die verschiedenen Phosphore verglichen.

Für die erregende Absorption wird ein normaler (Uviolprozeß) und ein selektiver (Dauererregungsstellen) lichtelektrischer Effekt am Metallatom des Phosphors nachgewiesen und quantitativ verfolgt.

Die Kurven der erregenden Absorption lassen sich auf nur vom Metallatom abhängige Relativkurven beider lichtelektrischer Wirkungen zurückführen.

Neben räumlichen Schwingungsdauerschwankungen der Phosphorzentren werden auch zeitliche nachgewiesen.

Die kurzwellige Tilgung wird als lichtelektrische Wirkung am Gattungsatom des Phosphors nachgewiesen. Der Schwellenwert dieser Wirkung wird ermittelt und mit anderen Untersuchungen über Abtrennungsarbeit und Austrittsmindestenergie am Gattungsatom verglichen.

Für ZnCu α wird ursächlicher Zusammenhang zwischen Tilgung und Dielektrizitätskonstantenänderung bei Belichtung nachgewiesen.

Als allgemein gültig für die lichtelektrische Wirkung wird erkannt: Zur Abtrennung eines lichtelektrischen Elektrons im Medium der Dielektrizitätskonstanten ε ist eine im Verhältnis $\sqrt{\varepsilon}:1$ kleinere Energie nötig als im Äther.

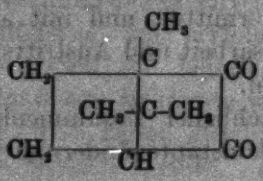
Vorliegende Arbeit wurde auf Anregung und unter Leitung von Hrn. Geheimrat Professor Dr. Lenard von Sommersemester 1920 bis Wintersemester 1921/22 ausgeführt. Für die stets rege Teilnahme und die wertvollen Ratschläge möchte ich auch an dieser Stelle Hrn. Geheimrat Lenard meinen innigsten Dank aussprechen. Ebenso bin ich auch Hrn. Dr. Tomaschek für die liebenswürdige Unterstützung zu dauerndem Dank verpflichtet.

(Eingegangen 8. Januar 1923.)

2. *Über Absorption und anomale Rotationsdispersion des Kampferchinons;* *von Nina Wedeneewa.*

(Vorgetragen in der Sitzung der Moskauer Lebedewschen Physikalischen Gesellschaft am 10. Juni 1919.)

Das optische Verhalten absorbierender aktiver Verbindungen ist bis zur letzten Zeit noch wenigen Erforschungen unterworfen worden. Es ist wohl dadurch zu erklären, daß die Wahl eines geeigneten Untersuchungsobjektes große Schwierigkeiten bietet: es sind chemisch wohldefinierte Verbindungen, eine isolierte Absorptionsbande im sichtbaren Spektrum aufweisend, selten. Nachdem ich längere Zeit eine solche Verbindung suchte, fand ich, daß Kampferchinon[1]) besser als alle bisher untersuchten Stoffe den Anforderungen des Versuches entspreche. Die Strukturformel des Kampferchinons ist



Schmelzpunkt 198°.

Die Absorptionsbande des Kampferchinons liegt im blauen und violetten Teilen des Spektrums. Andere Banden im sichtbaren Spektrum sind nicht vorhanden.

Das von Kahlbaum gelieferte und von mir durch Sublimation bei 100° gereinigte Präparat wurde in absolutem Toluol gelöst angewandt. Die Lösung enthielt 0,6918 g Kampferchinon in 200 ccm bei 17° C.

Apparate und Meßmethoden.

Alle Messungen wurden im monochromatischen Licht durchgeführt. Als Lichtquelle diente eine Wechselstrom-

1) Forster u. Thornley, Journ. Chem. Soc. London. 95. S. 942. 1909. Kampferchinon gibt leicht bei Einwirkung von aromatischen Aminen aktive Verbindungen, welche, wie Kampferchinon selbst gelb gefärbt sind.

bogenlampe mit Ca- und Sr-Kohlen. Die Lampe war horizontal aufgehängt und das Bild des horizontalen Lichtbogens auf den Spalt eines Monochromators mit konstanter Ablenkung projiziert. Die Dispersion des Apparates erlaubte die gelbe Na-Linie deutlich getrennt zu sehen.

Ich benutzte folgende Spektrallinien:

Ca 422,7, 443,5, 445,5, 452,7, 487,8, 504,2, 318,9, 616,2 $\mu\mu$.
Sr 407,8, 430,6, 433,8, 460,7, 472,2, 481,2, 496,2-8, 515,6, 533, 545,1, 551,2, 640,9 $\mu\mu$.
Na 589,5 $\mu\mu$.
Ba 493,4 $\mu\mu$.

Die Na-Linie war mit genügender Helligkeit in den Spektren des Ca- und Sr-Lichtbogens vorhanden. Ba-Kohlen wurden angefertigt, indem ich Kohlen mit einer $BaCl_2$-Lösung imprägnierte und eintrocknete.

Bei der Erkennung der Spektrallinien waren mir von großem Nutzen Bd. V und VI Kaysers Spektroskopie und der Konensche Atlas der Spektra.

Rotationsdispersion. Bei Drehungsmessungen trat das monochromatische Licht in einen Lippichschen Polarimeter mit dreiteiligem Gesichtsfelde. Wie bekannt, sind die photometrischen Bedingungen besser erfüllt, wenn die Kanten der Halbschattennikols senkrecht zum Monochromatorspalt stehen. Diese Stellung hat aber einen Nachteil, davon herrührend, daß die am Orte der Analysatorsblende entstehenden drei Bilder der Spektrallinie ihrer Länge nach gegeneinander verschoben sind. Es ragen dabei aber die Ränder der Blende verschiedener Teile der von den Halbschattennikol gelieferten Bilder hinaus.[1]) Ändert sich etwa die Intensitätsverteilung längs der Linie, so erscheinen die äußeren Teile des Gesichtsfeldes ihrer Helligkeit nach verschieden. Solche Intensitätsänderungen stören die unmittelbare Beobachtung nicht, da sie selten genug sind und es bietet keine Schwierigkeit, gleiche Helligkeit wiederherzustellen, indem man eine leichte Neigung der Polarimeterachse bewirkt. Photographische Messung mit großen Expositionszeiten wird aber in diesem Fall unmöglich, und es müssen die Nikolkanten dem Spalte parallel gestellt werden.

1) Wegen der starken Absorption konnte ich den Monochromatorspalt nicht verkürzen.

Bei photographischer Messung entfernte ich das Okular und projizierte das Bild des Polarisators auf eine photographische Platte. Ich bediente mich dabei einer langen, innen geschwärzten metallischen Röhre, welche mit einer Linse am vorderen und einer beweglichen Kassette am hinteren Ende versorgt war. Mit jeder Platte machte ich sechs Aufnahmen. Die Polarisatorbilder waren etwa $^1/_2$ cm groß. Die Expositionszeiten variierten von 1—15 Minuten.

Es wurden für jede Wellenlänge zuerst Aufnahmen bei um 0,1° verschiedenen Analysatorstellungen gemacht. Dieses erlaubt ganz deutlich das Gebiet gesuchter Stellung gleicher Helligkeit zu erkennen. Ferner machte ich Aufnahmen, indem ich den Analysator um 0,01° drehte. Für jede Wellenlänge wurden je 6 Platten — 3 für Nullstellung und 3 für Lösung — angefertigt. Die Platten legte ich auf eine von unten beleuchtete Milchglasunterlage und betrachtete sie unter etwa dreifacher Vergrößerung. Indem ich die Platte hin und her verschob und die Bilder nacheinander in das Gesichtsfeld der Lupe einrückte, wählte ich die Stellung gleicher Helligkeit, wobei ich von vornherein niemals wußte, mit welcher Platte — für Nullstellung oder für Lösung — ich zu tun hatte. Es wurden je 4 Ablesungen für jede Platte gemischt und daraus die Deutung ermittelt. Solche Ermittelung wiederholte ich 9mal.

Ganz analog wurde auch die Drehung im dem Auge zugänglichen Gebiete gemessen.

Als Beispiele führe ich die Resultate für zwei Wellenlängen an.

$\lambda = 452{,}7\ \mu\mu$ (Photographie)

$\varrho +$ 0,139°, 0,141°, 0,134°, 0,141°, 0,133°, 0,138°, 0,136°, 0,143°, 0,136°;

$\lambda = 551{,}2\ \mu\mu$ (unmittelbare Beobachtung)

$\varrho -$ 0,504°, — 0,519°, — 0,513°, — 0,512°, — 0,503°, — 0,511°, — 0,504°, — 0,503°, — 0,511°.

Der Einfluß der Elliptizität brauchte nicht berücksichtigt zu werden. Ist δ der Halbschattenwinkel, p das Amplitudenverhältnis im Analysator, φ der Winkel, denen die Hauptschnitte des Analysators und des Halbschattennikols einschließen, so hat man

$$p^2 \cos^2 \varphi = \cos^2 (\varphi + \delta)$$

oder, da $p = \cos\delta$,

$$\operatorname{tg}\varphi = 2\operatorname{ctg}\delta.$$

Werden die geradlinigen Schwingungen in zwei ähnliche Ellipsen, deren Hauptachsen in die Richtungen der geradlinigen Schwingungen fallen, verwandelt, so hat man zu schreiben

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{ctg}\delta\,(1 - b^2/a^2) + \sqrt{\operatorname{ctg}^2\delta\,(1 - b^2/a^2)^2 - b^2/a^2},$$

wo b/a das Achsenverhältnis bedeutet. Das zweite Glied des Radikanden kann vernachlässigt werden, da b/a die Größe von $2 \cdot 10^{-4}$ nicht überstieg und der Halbschattenwinkel 12^0 bis 15^0 betrug. Dann ist

$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi' = 2\operatorname{ctg}\delta\, b^2/a^2 \text{ und } \varphi - \varphi' < 0{,}0001^0.$$

Für Wellenlängen von 640,9 bis 504,2 $\mu\mu$ wurde die Lösung in einer polarimetrischen Röhre von 10,0 cm Länge untersucht, für kürzere Wellenlängen in einem kleinen mit Glasplatte bedeckten planparallelen Gefäße von 1,10 Schichtdicke. Im letzten Fall diente mir die Lösung nie länger als eine Stunde.

Elliptizität. Um die Elliptizitätsmessungen durchzuführen, wurde der Lippichsche Polarimeter in einen solchen von Brace verwandelt. Die Polarisatorröhre wurde durch eine andere mit einem Nikol ersetzt und am Orte der Polarisatorblende ein drehbares, mit den Nonien eines Teilkreises verbundenes Diaphragma eingesetzt. Hier wurde die Halbschattenplatte befestigt, indem ein anderer auf dem Rahmen des Apparates sitzender Teilkreis die Kompensatorplatte trug. Beide Platten waren mittels Kanadabalsam zwischen zwei kleinen Glasplatten ohne Doppelbrechung eingekittet und mit Wachs an die Diaphragmen geklebt. Das Lichtbündel ging ungehindert durch die Kompensatorblende und erzeugte ein Bild der Spektrallinie am Orte der Analysatorblende.

Die Phasendifferenzen Δ_1 in der Halbschattenplatte wurden nach der Methode Braces gemessen, die Phasendifferenzen Δ_2 im Kompensator nach einer am Ende dieses Artikels beschriebenen Methode. Die Größen von Δ_2 sind in Tab. 1 gegeben.[1]) Genauigkeit $\pm 5'$.

1) Über geeignete Größen der Phasendifferenzen in den Kompensatorplatten vgl. meinen Artikel in Zeitschr. f. Instrumentenkunde 43. S. 22. 1923.

Tabelle 1.

$\lambda\,\mu\mu$	Δ_2	$\lambda\,\mu\mu$	Δ_2	$\lambda\,\mu\mu$	Δ^0
533	36° 48′	487,8	40° 0′	445,5	44° 2′
504,2	38° 50′	472,2	41° 37′	433,8	45° 12′
496,2-8	39° 20′	460,7	42° 33′	430,6	45° 33′
493,4	39° 34′ [1])	452,7	43° 29′	422,7	46° 25′

Wegen der Unempfindlichkeit des Auges konnten die Messungen für $\lambda = 407{,}8\,\mu\mu$ nicht durchgeführt werden. Durch Extrapolation findet man $\Delta_2 = 48° 2'$.

Ist ε die Differenz der Ablesungen am Teilkreis für zwei benachbarte Einstellungen des Kompensators auf gleiche Helligkeit, so berechnet sich Δ_1 aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta_1}{2} = -\frac{\cos\varepsilon \sin\Delta_2}{1 - 2\cos^2\varepsilon \sin^2\frac{\Delta_2}{2}}.$$

Die Messung von ε [2]) wurde von mir vielmals wiederholt und die Genauigkeit, mit welcher ε ermittelt, bis auf 0,08° gesteigert.

Da $2\cos^2\varepsilon \sin^2\Delta^2/2$ klein gegen 1 ist, kann geschrieben werden: d'

$$d\frac{\Delta_1}{2} = -\cos\varepsilon \cos^2\frac{\Delta_1}{2}\, d\sin\Delta_2 - \sin\Delta_2 \cos\frac{\Delta_1}{2}\, d\cos\varepsilon.$$

Für die von mir gewählten Glimmerplatten kann annähernd: $\Delta_1/2 = 11°$ [3]), $\Delta_2 = 42°$, $\varepsilon = 72°$ gesetzt werden; ferner ist: $d\cos\varepsilon = 0{,}0005$, $d\sin\Delta_2 = 0{,}0014$. Es konnte also $\Delta_1/2$ mit einer Genauigkeit $d\frac{\Delta_1}{2} = 1{,}2' + 1{,}1' =$ etwa $2{,}5'$ ermittelt werden. Die Messungen bezogen sich auf vier Wellenlängen (vgl. Tab. 2).

---

1) Durch Interpolation berechnet.

2) Wie von mir gezeigt (vgl. zitierten Artikel), ist ungenaue Einstellung des Analysators sowie der Halbschattenplatte ohne Einfluß auf die Größe von ε, d. h. auch auf das Resultat. In meinen Versuchen betrug die Genauigkeit der Analysatoreinstellung etwa 0,02—0,03°, die der Halbschattenplatte etwa 3—4′.

3) Da ich keine dünnen Lösungsschichten benutzen wollte, wählte ich, wegen der starken Absorption in der Mitte der Absorptionsbande, eine Halbschattenplatte von großer Phasendifferenz. Leider sind mir die Gedanken über die veränderliche Empfindlichkeit des Braceschen Polarimeters (vgl. zitierten Artikel, S. 17) zu spät gekommen, wenn die Messung aus äußeren Gründen nicht mehr wiederholt werden konnte.

Tabelle 2.

$\lambda\,\mu\mu$	533	504,2	487,8	445,5
ε	73,53°	73,48°	73° 26.	73,02°
$\Delta_1/2$	9° 47′	10° 18′	10° 42′	11° 45′
$\frac{\Delta_2}{(\Delta_1/2)}$	3,76	3,77	3,74	3,75

Aus dem Mittelwerte $\Delta_1/2 = 3{,}755$ berechnen sich die $\Delta_1/2$ nach den Phasendifferenzen im Kompensator (Tab. 3).

Tabelle 3.

$\lambda\,\mu\mu$	504,2	496,2-8	493,4	487,8	472,2	460,7
$\Delta_1/2$	10° 20′	10° 28′	10° 32′	10° 39′	11° 5′	11° 19′
$\lambda\,\mu\mu$	452,7	445,5	430,6	422,7	407,8	
$\Delta_1/2$	11° 35′	11° 43′	12° 7′	12° 20′	12° 47′ [1]	

Wie weitere Untersuchung zeigte, waren die Glasplatten des planparallelen Gefäßes für die Lösung schwach doppelbrechend. Da es mir, infolge der Schwierigkeiten der Kriegszeiten, unmöglich war, bessere Platten zu verschaffen, blieb mir nichts übrig, als diese Doppelbrechung in Betracht zu ziehen. Da die Hauptachsen der Schwingungsellipsen, die in einer doppelbrechenden Platte von kleiner Phasendifferenz entstehen, ganz unbedeutend gegen die ursprüngliche Schwingungsrichtung geneigt sind[2]), kann man beide Glasplatten als eine bei 45° Azimut eingesetzte doppelbrechende Platte betrachten. Ist φ die von dieser verursachte Phasendifferenz, so hat man zu schreiben

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Delta_1}{2}+\varphi\right) = -\frac{\cos\varepsilon\sin\Delta_2}{1-2\cos^2\varepsilon\sin^2\frac{\Delta_2}{2}}.$$

Die Messung von φ dauerte 10 Tage lang.[3]) Für jedes λ wurde ε 4mal an verschiedenen Tagen ermittelt. Es erwies sich, daß die Doppelbrechung mit der Zeit sich nicht änderte. Tab. 4 gibt die Werte von ε, sowie die daraus berechneten Werte von $\Delta_1/2 + \varphi$ und φ.

---

1) Mit Hilfe des extrapolierten Wertes $\varepsilon_2 = 48° 2'$ berechnet.

2) Bei einer Phasendifferenz von 1° beträgt der Neigungswinkel nicht mehr als 7″.

3) Das Gefäß wurde mit Toluol gefüllt.

Tabelle 4.

$\lambda\,\mu\mu$	496,2-8	493,4	487,8	472,2	460,7
ε	72,88°7	72,87°	72,82°	72,74°	72,67°
$\frac{\Delta_1}{2}+\varphi$	10° 46′	10° 51′	10° 58′	11° 25′	11° 39′
φ	18′	19′	19′	20′	20′

$\lambda\,\mu\mu$	452,7	445,5	430,6	422,7	407,8
ε	72,59°	72,58°	75,52°	72,48°	72,52°
$\frac{\Delta_1}{2}+\varphi$	11° 54′	12° 2′	12° 26′	12° 40′	12° 59′
φ	19′	19′	19′	20′	

Das planparallele Gefäß, sei es mit Lösung oder Toluol gefällt, wurde in den Strahlengang zwischen Polarisator und Halbschattenplatte eingeführt. Für geradlinig polarisiertes Licht ist eine absorbierende aktive Verbindung einer bei 45° Azimut eingesetzten doppelbrechenden Platte von der Phasendifferenz δ äquivalent. Wir haben also

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Delta_1}{2}+\varphi+\delta\right)=-\frac{\cos\varepsilon\sin\Delta_2}{1-2\cos^2\varepsilon\sin^2\frac{\Delta_2}{2}}.$$

Die Messung von δ mußte fast im ganzen Messungsbereich photographisch verfolgt werden (von $\lambda=487{,}8\,\mu\mu$). Es ist hier alles, über photographische Drehungsmessungen früher gesagtes zu wiederholen. Expositionszeiten von 1—15 Minuten. Auf jeder Platte 8 Bilder der Halbschattenplatte bei um 0,1° voneinander verschiedenen Kompensatorazimuten. Für jede Wellenlänge je 8 Platten. Die Platten wurden von mir vielmals mit größter Sorgfalt photographiert. Schichtdauer 2,20 cm.

Absorption. Die Absorption wurde mit Hilfe des König-Martensschen Spektralphotometers gemessen, wobei ich zwei Röhren von 2,01 cm Länge benutzte, die eine mit absolutem Toluol, die andere mit Lösung gefüllt. Sind a_1 und a_2 die Analysatorazimute für zwei verschiedene Röhrenstellungen, so berechnet sich daraus der Absorptionskoeffizient:

$$k=\frac{\lg\operatorname{tg}a_2-\lg\operatorname{tg}a_1}{2{,}01\cdot\lg e}.$$

Resultate.

Tabelle 5.

Rotation. $d = 10{,}0$ cm.

$\lambda\,\mu\mu$	640,9	616,2	589,5	551,2	545,1
ϱ	− 0,210°	− 0,255°	− 0,313°	− 0,512°	− 0,568°
$\lambda\,\mu\mu$	533	518,9	515,6	504,2	
ϱ	− 0,701°	− 0,984°	− 1,068°	− 1,652°	

Tabelle 6.

$d = 1{,}10$ cm.

$\lambda\,\mu\mu$	496,2	493,4	487,8	472,2	460,7	452,7
ϱ	− 0,264°	− 0,281°	− 0,201°	− 0,004°	+ 0,085°	+ 0,138°
$\lambda\,\mu\mu$	445,5	443,5	430,6	422,7	407,8	
ϱ	+ 0,183°	+ 0,140°	+ 0,123°	+ 0,109°	+ 0,079°	

Tabelle 7.

Elliptizität. $d = 2{,}20$ cm.

$\lambda\,\mu\mu$	496,2-8	493,4	487,8	472,2	460,7
ε	72,87°	72,32°	70,29°	70,65°	71,23°
$\frac{\Delta_1}{2} + \varphi + \delta$	10° 48′	11° 11′	12° 33′	12° 45′	12° 36′
δ	2′	20′	1° 35′	1° 20′	57′
$\lambda\,\mu\mu$	452,7	445,5	430,6	422,7	407,8
ε	71,31°	71,72°	71,91°	72,24°	72,30°
$\frac{\Delta_1}{2} + \varphi + \delta$	12° 48′	12° 38′	12° 51′	12° 50′	13° 9′
δ	54′	36′	25′	10′	10′

Es entsteht eine rechte Ellipse. Die Elliptizität ist also positiv.

Tabelle 8.

Absorption.

$\lambda\,\mu\mu$	515,6	504,2	496,2-8	493,4	487,8	487,4	472,2
k	0,000	0,096	0,448	0,765	1,455	1,713	1,759
$\lambda\,\mu\mu$	467,8	460,7	452,7	445,5	430,6	422,7	407,8
k	1,759	1,565	1,486	1,212	0,718	0,522	0,251

In der nächsten Tabelle sind die Werte von ϱ und $\delta/4$ für $d = 10$ cm zusammengestellt und in Fig. 1 und 2 Rotations-, Elliptizitäts- und Absorptionskurven angegeben.

Tabelle 9.

$\lambda\,\mu\mu$	640,9	616,2	589,5	551,2	545,1	533	518,9
ϱ^0	− 0,21	− 0,26	− 0,31	− 0,51	− 0,57	− 0,70	− 0,98
$\delta/4^0$	—	—	—	—	—	—	—
$\lambda\,\mu\mu$	515,6	504,2	496,2	493,4	487,8	472,2	460,7
ϱ^0	− 1,07	− 1,65	− 2,40	− 2,55	− 1,83	− 0,04	+ 0,80
$\delta/4^0$	—	—	+ 0,04	+ 0,38	+ 1,80	+ 1,52	+ 1,08
$\lambda\,\mu\mu$	452,7	445,5	443,5	430,6	422,7	407,8	
ϱ^0	+ 1,35	+ 167,	+ 1,27	+ 1,12	0,99	0,72	
$\delta/4$	+ 1,02	+ 0,68	—	+ 0,48	+ 0,19	+ 0,19	

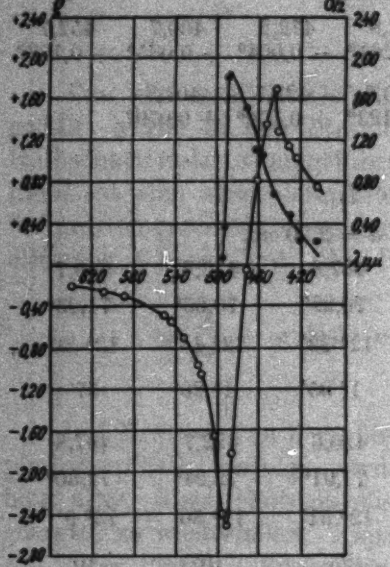


Fig. 1.

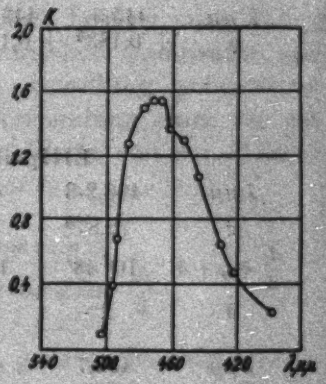


Fig. 2.

Diskussion der Resultate.

Die von mir gewonnenen Resultate erlaubten mir die Theorie der Rotationsdispersion, wie sie von P. Drude gegeben wird, einer experimentellen Prüfung zu unterziehen. Stehen die Gleichungen der Theorie in genügender Übereinstimmung mit der Erfahrung, so darf der daraus berechnete Drudesche „Aktivitätskoeffizient" f' in weiterem nicht unberücksichtigt bleiben, da er doch eine Größe darstellt, welche ein Maß bietet für die Dissymmetrie desjenigen Systems — sei es ein Teil oder die ganze Molekül —, die den Schwingungen der Dispersionselektronen ihren „aktiven" Charakter erteilt.

Die Differenzen $\nu'' - \nu'$ und $\nu'' \varkappa'' - \nu' \varkappa'$, wo ν'' und ν' bzw. $\varkappa''$ und $\varkappa'$ die Brechung bzw. Absorptionsindices der linken und rechten Wellen bedeuten, sind in der Drudeschen Theorie durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\nu'' - \nu' = \frac{1}{\pi} \sum \frac{D(\lambda^2 - \lambda_0^2)\lambda}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2 + G^2\lambda^2},$$

$$\nu''\varkappa'' - \nu'\varkappa' = \frac{1}{\pi} \sum \frac{D G \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2 + G^2\lambda^2},$$

wo

$$D = \frac{4\pi\lambda_0^2}{c^2} N e^2/m f' \quad \text{und} \quad G = \frac{k\lambda_0}{\pi c}$$

ist. Es kann also geschrieben werden

$$(1) \qquad \varrho = \frac{\pi(\nu' - \nu'')d}{\lambda} = \sum \frac{D G(\lambda_0^2 - \lambda^2)d}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2 + G^2\lambda^2}$$

und

$$(2) \qquad \delta/2 = \frac{\pi(\nu''\varkappa'' - \nu'\varkappa')d}{\lambda} = \sum \frac{D G \lambda d}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2 + G^2\lambda^2}.$$

Die Natansonsche Regel: im roten ($\lambda > \lambda_0$) Teile des Spektrums haben Drehung und Elliptizität entgegengesetzte, im violetten ($\lambda < \lambda_0$) gleiche Vorzeichen, folgt unmittelbar aus diesen Gleichungen. (Wie oben erwähnt, ist diese Regel im Falle des Kampferchinons bestätigt.)

Die mittlere Absorption ist durch Gleichung

$$2\nu^2 \varkappa = \frac{1}{\pi c} \sum \frac{N e^2/m \lambda_0 G \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2 + G^2\lambda^2}$$

gegeben. Führt man statt $\nu\varkappa$ den Absorptionskoeffizient k ein, so hat man die Gleichung

$$(3) \qquad \frac{\nu k c^2}{2} = \sum \frac{N e^2/m \lambda_0^2 G \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2 + G^2\lambda^2}.$$

Die Zahl der in Gleichung (3) enthaltenen Konstanten kann größer, als in Gleichung (1) und (2) sein, falls auch inaktive Elektronengattungen vorhanden sind.

Da der Absorptionsstreifen der Kampferchinonlösung genügend isoliert ist, lassen wir in erster Näherung das Summenzeichen in Gl. (1), (2), (3) fort. Es können dann die Konstanten leicht ausgerechnet werden.

Absorption. Setzten wir, indem wir einem von T. Krawetz[1]) vorgeschlagenen Verfahren folgen, $\lambda = \lambda_0$ in Gl. (3), so haben wir die Gleichung

1) T. Krawetz, Absorption des Lichtes in den Lösungen gefärbter Verbindungen. Dissertation Moskau 1912.

$$\frac{\nu_0 K_0 c^2}{2} = N e^2/m \frac{\lambda_0^2}{G} .$$

Da der Brechungsindex der Kampferchinonlösung im Gebiete des Absorptionsstreifens ziemlich konstant (etwa 1,5) bleibt, so kann geschrieben werden:

$$K = K_0 \frac{G^2 \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2 + G^2 \lambda^2} .$$

Eine der Abszissenachse parallele Gerade $K = \text{const.}$ schneidet die Absorptionskurve in zwei Punkten, deren Abszissen λ_1 und λ_2 folgender Gleichung genügen:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = G^2 \left(\frac{K_0}{K} - 1 \right) .$$

Es ist also

$$G = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{\frac{K_0}{K} - 1}} . \tag{4}$$

Das Absorptionsmaximum (Fig. 2) liegt bei $\lambda_0 = 470\,\mu\mu$. Zieht man eine Gerade $K = K_0/2$, so findet man $\lambda_1 = 498\,\mu\mu$, $\lambda_2 = 436\,\mu\mu$ und

$$G = 4{,}93 \cdot 10^{-5} - 4{,}36 \cdot 10^{-5} = 5{,}7 \cdot 10^{-6}.$$

Für $K > K_0/2$ fällt G etwas größer, für $K < K_0/2$ etwas kleiner aus.

Elliptizität. Ganz ähnlich erhalten wir, indem wir Gl. (2) mit λ multiplizieren:

$$G = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{\frac{(\delta\lambda)_0}{\delta\lambda} - 1}} .$$

In unserem Fall hat $\delta\lambda$ folgende Werte ($d = 10$ cm):

$\lambda\,\mu\mu$	496,2–8	493,4	487,8	472,2	460,7	452,7	445,5	430,6	422,7	407,8
$\delta\lambda \cdot 10^7$	1	13	61	50	35	32	21	14	5	4

Das Maximum ist bei $\lambda_0 = 488\,\mu\mu$ erreicht. Die Gerade

$$\delta\lambda = \frac{(\delta\lambda)_0}{2}$$

schneidet die Kurve $\delta\lambda$ in Punkten $\lambda_1 = 492\,\mu\mu$ und $\lambda_2 = 452\,\mu\mu$. Es ist also

$$G = 4{,}92 \cdot 10^{-5} - 4{,}52 \cdot 10^{-5} = 4{,}0 \cdot 10^{-6},$$

d. h. kleiner, als aus Absorptionsmessungen berechnet. Setzt man $\lambda = \lambda_0$ in Gleichung (2), so besteht die Beziehung

$$D = \frac{\delta G \lambda_0}{2d}.$$

Also, da $\lambda_0 = 4{,}88 \cdot 10^{-5}$, $G = 4{,}0 \cdot 10^{-6}$, $\delta/2 = \frac{3{,}6 \cdot \pi}{180}\, d = 10$,

$$D = 1{,}2 \cdot 10^{-12}.$$

Rotation. Sind λ_{max_1} und λ_{max_2} diejenigen Wellenlängen, welche den maximalen Werten der Drehung entsprechen, so folgt aus Gleichung (1) die Beziehung

$$(\lambda_{max}^2 - \lambda_0^2) = G^2 \lambda_0^2,$$

daher

$$\tfrac{1}{2}(\lambda_{max_1} + \lambda_{max_2}) = \lambda_0^2,$$
$$\tfrac{1}{2}(\lambda_{max_1} - \lambda_{max_2}) = G\lambda_0.$$

Die Rotationsmaxima der Kampferchinonlösung liegen bei $\lambda_{max_1} = 498{,}4\,\mu\mu$ und $\lambda_{max_2} = 445{,}5\,\mu\mu$. Die Rechnung gibt

$$\lambda_0 = 4{,}70 \cdot 10^{-5} \qquad G = 4{,}8 \cdot 10^{-6}.$$

Trägt man $\pm G\lambda_0$ statt $\lambda^2 - \lambda_0^2$ in Gleichung (1), so erhält man:

$$\varrho_{max} = \pm \frac{D\lambda_0 d}{G\lambda_0^2 + G\lambda^2_{max}},$$

daher

$$\frac{1}{\varrho_{max_1}} - \frac{1}{\varrho_{max_2}} = \frac{2G\lambda_0}{Dd} + \frac{G}{D\lambda_0 d}(\lambda^2_{max_1} + \lambda^2_{max_2}) = \frac{4G\lambda_0}{Dd}$$

und

$$D = \frac{4G\lambda_0 \varrho_{max_1}\varrho_{max_2}}{(\varrho_{max_1} - \varrho_{max_2})d}. \tag{5}$$

Es ist in unserem Fall:

$$G = 4{,}8 \cdot 10^{-6}, \quad \lambda_0 = 4{,}70 \cdot 10^{-5}, \quad \varrho_{max_1} = -\frac{2{,}55\,\pi}{180},$$
$$\varrho_{max_2} = +\frac{1{,}66\,\pi}{180}\, d = 10;$$

aus Gleichung (5) berechnet sich:

$$D = 1{,}6 \cdot 10^{-12}.$$

Geht man auf die Bedeutung von D zurück, so erhält man, da

$$D = \frac{4\pi N e^2/m\,\lambda_0^2 f}{c^2}$$

und andererseits

$$K_0 = \frac{2Ne^2/m\,\lambda_0^3}{G\,\nu_0\,c^2}$$

ist, den Wert des Aktivitätskoeffizienten

$$f' = \frac{D}{2\pi K_0\, G\,\nu_0}.$$

Hieraus berechnet sich für Kampferchinon, indem man $D = \frac{1{,}2+1{,}6}{2}\cdot 10^{-6} = 1{,}4\cdot 10^{-6}$, $G = 4{,}5\cdot 10^{-6}$, $K_0 = 1{,}76$, $\nu_0 = 1{,}5$ setzt

$$f' = -1{,}7\cdot 10^{-8}.$$

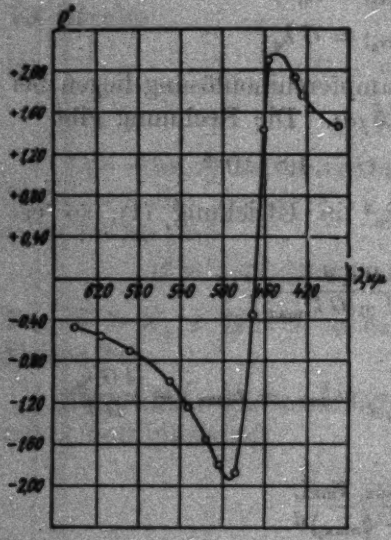


Fig. 3.

Es stellt sich jedoch die Frage, inwieweit man berechtigt ist diese unter vereinfachender Voraussetzung ausgerechnete Größe als Drudeschen Aktivitätskoeffizienten zu deuten? Die Kurven des Kampferchinons weichen von den theoretischen ab. Die theoretische Rotationsdispersionskurve mit den Konstanten $D = 1{,}6\cdot 10^{-12}$, $G = 4{,}8\cdot 10^{-6}$, $\lambda_0 = 470\,\mu\mu$ ist in der Fig. 3 wiedergegeben. Diese Kurve, welche dieselbe Lage und Differenz der Rotationsmaxima, wie diejenige des Kampferchinons hat, fällt mit der letzteren in anderen Punkten gar nicht überein.

Ich versuchte die experimentellen Kurven in eine Reihe von Kurven theoretischer Gestalt zu zerlegen. Das wollte mir aber nicht gelingen; ich konnte nur nachweisen, daß der steile Abfall der Absorptions- und Elliptizitätskurven im Gebiete größerer Wellenlängen durch eine Anzahl von engen ($G = 0{,}8\cdot 10^{-8}$) Absorptionsstreifen verursacht sein könnte. Darauf versuchte ich Kurven herzustellen, die einen mit denen des Kampferchinons gemeinen Charakter aufweisen, z. B. Rotationskurven mit weit voneinander liegenden Rotations-

maxima. Diesmal hatte ich mehr Erfolg, wie es z. B. Figg. 4 und 5 zeigen. Es ist eine große Ähnlichkeit dieser Kurven mit denen des Kampferchinons nicht zu verkennen. Im Gebiete größerer Wellenlängen fällt die Rotationskurve (Fig. 5)

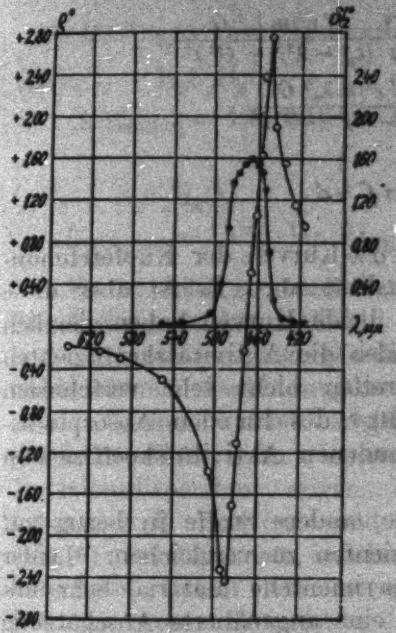


Fig. 4.

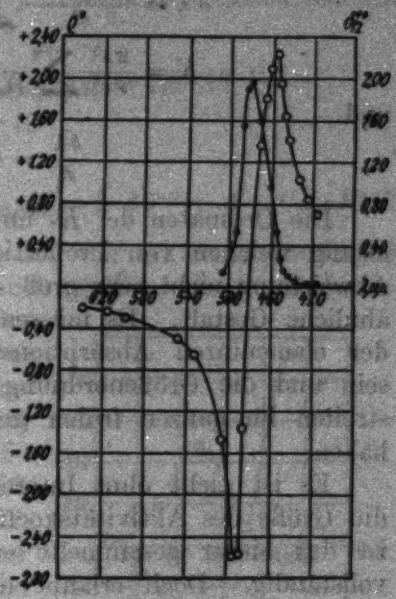


Fig. 5.

mit der Kurve des Kampferchinons fast vollständig überein. Die Kurven (Fig. 4) sind durch Summation von je 8 theoretischen gewonnen, wobei ich die Eigenwellenlängen λ_0 um je $4\,\mu\mu$ voneinander verschieden wählte ($488\,\mu\mu$, $484\,\mu\mu$ usw. bis $460\,\mu\mu$) und für alle Streifen $D = 7{,}2 \cdot 10^{-13}$, $G = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ setzte ($d = 10$ cm). Die Kurven in der Fig. 5 unterscheiden sich von derjenigen in der Fig. 4 nur durch die Werte der Konstanten D: es ist nämlich für die 4 ersten Absorptionsstreifen ($\lambda_0 = 488$ bis $472\,\mu\mu$) $D = 1{,}1 \cdot 10^{-13}$, für die 4 letzten $D = 5{,}5 \cdot 10^{-14}$ gesetzt.

Die nahe Verwandtschaft der von mir berechneten Kurven mit derjenigen des Kampferchinons erlaubt die Behauptung auszusprechen, daß auch der Kampferchinons-Absorptionsstreifen aus einer Anzahl enger Streifen zusammengesetzt ist. Macht man die Voraussetzung, daß der Aktivitätskoeffizient

für verschiedene die Absorption bewirkende Elektronengattungen derselbe ist, so müssen — Brechungsindex als konstant angenommen — die Ordinaten der $\delta\lambda$-Kurve denen der Absorptionskurve proportional sein. Denn es kann geschrieben werden:

$$\delta\lambda = \frac{8\pi f' d\lambda^2}{c^2} \sum \frac{N e^2/m \lambda_0^2 G}{(\lambda_0^2 - \lambda^2)^2 + G^2\lambda^2},$$

$$K = \frac{2\lambda^2}{\nu c^2} \sum \frac{N e^2/m \lambda_0^2 G}{(\lambda_0^2 - \lambda^2)^2 + G^2\lambda^2}$$

und

$$\frac{\delta\lambda}{K} = 4\pi f' \nu d.$$

Die Ordinaten der K- und $\delta\lambda$-Kurven der Kupferchinonlösung weichen von Proportionalität ab. Es ist aber diese Abweichung nicht sehr groß — beide Kurven haben ziemlich ähnliche Gestalt. Es müssen also die Aktivitätskoeffizienten der elementaren Absorptionsstreifen nicht sehr verschieden sein und die Größenordnung 10^{-8} des für den Absorptionsstreifen im ganzen früher gefundenen Aktivitätskoeffizienten haben.

Es ist nicht ohne Interesse, andere Stoffe in bezug auf die Größe des Aktivitätskoeffizienten zu vergleichen. Leider ist das bisher gesammelte experimentelle Material sehr unvollständig. Doch erlaubt es eine angenäherte Abschätzung der Aktivitätskoeffizientenwerte zu machen. Die Resultate führe ich in aller Kürze an. Es wurden von mir folgende Werte der Aktivitätskoeffizienten berechnet.

Messungen von Tschugaeff:[1])

1-phenyl-2-o-tolyl-3-d-bornylimidoxanthid

$$f' = 1{,}0 \cdot 10^{-8};$$

1-phenyl-2-p-tolyl-d-bornylimidoxanthid

$$f' = 0{,}9 \cdot 10^{-8};$$

1-2-di-phenyl-fenchyl-imidoxanthid

$$f' = 1{,}1 \cdot 10^{-8};$$

1-2-di-phenyl-menthyl-imidoxanthid

$$f' = 1{,}8 \cdot 10^{-8}.$$

1) Tschugaeff, Zeitschr. f. phys. Chem. 79. S. 475, 476, 478 und 479. 1912.

Messungen von Bruhat:[1]) 1-2-di-phenyl-d-bornyl-imid-oxanthid

$$D_{(\text{Rotation})} = 1{,}5 \cdot 10^{-12};\quad D_{(\text{Elliptizität})} = 1{,}8 \cdot 10^{-12};$$
$$f' = 1{,}2 \cdot 10^{-8}.$$

Messungen von Olmstead.[2]) Komplexe Weinsäuresalzen.

$K_2Cr_2O_7 + K_2C_4H_4O_2$

$$D_{(\text{Rotation})} = 1{,}5 \cdot 10^{-11};\quad D_{(\text{Elliptizität})} = 1{,}3 \cdot 10^{-11};$$
$$f' = 1 \cdot 10^{-7}.$$

$CrO_3 + K_2C_4H_4O_2$

$$D_{(\text{Rotation})} = 1 \cdot 10^{-11};\quad D_{(\text{Elliptizität})} = 1 \cdot 10^{-11};\quad f' = 0{,}9 \cdot 10^{-7}.$$

Es ist hier zu bemerken, daß der Aktivitätskoeffizient der Weinsäuresalze vielleicht auch größer als $1 \cdot 10^{-7}$ sein kann, denn in den Lösungen dieser Salze können Verbindungen vorhanden sein, welche entgegengesetzten Gang der anomalen Rotationsdispersion zeigen. So gehören z. B. Kurven I und II[3]) (Fig. 6) zwei Lösungen, welche ich anfertigte, indem ich zu einer Lösung von Weinsäure und $Cr_2(SO_4)_3$ eine Lösung von NaOH beimengte. (Die Lösung II war an Alkali reicher.) Es fallen die Stellen der Rotationsmaxima beider Lösungen überein, doch hat die Drehung entgegengesetzte Vorzeichen. Diese merkwürdige Erscheinung könnte wohl dadurch erklärt werden, daß das Cr-Atom nicht nur in die Carboxyl, sondern auch in die Hydroxylgruppe der Weinsäuremolekel eintreten könne. Die Lösung müßte dann den zweiten Fall darstellen. Inwieweit solche Vermutung als begründet anzusehen ist, zeigt folgender Versuch. Ich löste frisch ausgefälltes $Cr(OH)_3$ in Lösungen von:

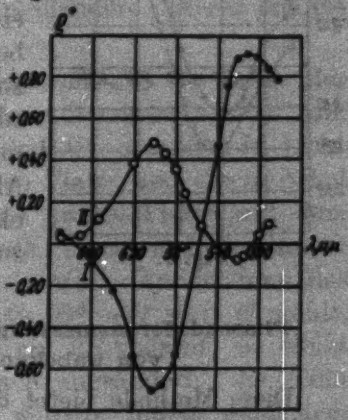


Fig. 6.

1) Bruhat, Ann. Ch. et Phys. [9]. 3. S. 237 u. 417. 1915.
2) Olmstead, Phys. Rev. 35. S, 31. 1912.
3) Die Messungen beanspruchen keine große Genauigkeit.

1. Weinsäure,
2. saurem weinsauren Natron,
3. neutralem weinsauren Kali.

Es war zu erwarten, daß die ersten zwei Lösungen eine der Kurve I (Fig. 6) ähnliche Rotationsdispersion aufweisen würden, im Falle des neutralen Salzes könnte man dagegen eine Verbindung erwarten, welche in ihrem optischen Verhalten der Lösung II (Fig. 6) nahestehen würde. Dieses ist auch durch den Versuch bestätigt worden, was Fig. 7 zeigt. Chemisch betrachtet bedeutet der Übergang von einer Verbindung vom Typus I (Fig. 6) zu einer solchen vom Typus II eine Wanderung des die Absorption bewirkenden Atoms von der einen zu der anderen Ecke des C-Tetraeders. Diese Wanderung ist also mit einem Vorzeichenwechsel des Aktivitätskoeffizienten verbunden, ohne die Eigenwellenlängen merklich zu beeinflussen.

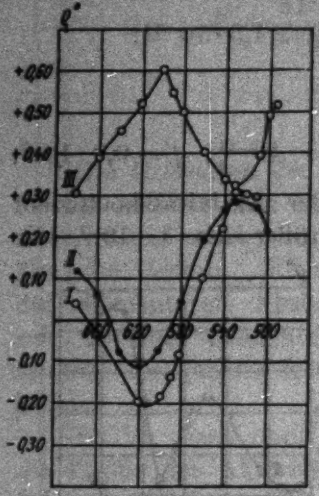


Fig. 7.

Phasendifferenzmessung mit Hilfe einer Glimmerplatte von unbekannter Phasendifferenz.

Diese Methode bietet den Vorteil großer Einfachheit. Es bezeichne (Fig. 8):

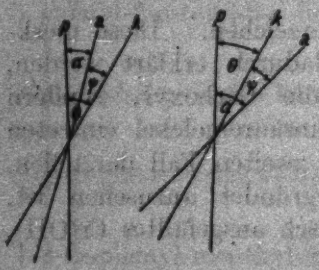


Fig. 8.

P die Schwingungsrichtung im Polarisator,
K die Schwingungsrichtung in einer doppelbrechenden Platte,
a die Hauptachse der Schwingungsellipse.

Das Azimut Θ der Platte kann kleiner oder größer als der Neigungswinkel α der Hauptachse a gegen P sein. Diese zwei Fälle wollen wir durch das Vorzeichen des Winkels $(K, a) = \psi$ unterscheiden. Wählen wir es als positiv für $\alpha < \Theta$, so ist in beiden Fällen

$\psi = \Theta - a$, und die bekannte Gleichung, welche ψ und Θ mit der Phasendifferenz δ in der Platte verbindet, kann folgenderweise geschrieben werden:

$$\operatorname{tg} 2(\Theta - a) = \operatorname{tg} \Theta \cos \delta.$$

Die Messung des zu einem bestimmten Azimute Θ gehörenden Neigungswinkels a erlaubt also die Phasendifferenz δ leicht zu ermitteln. Diese Messung bietet keine Schwierigkeit, wenn man folgendes in Betracht zieht.

Ändert man Θ von 0 bis 90°, so entstehen — wie leicht einzusehen — bei komplementären (Θ^0 und $90^0 - \Theta$) Azimuten solche Schwingungsellipsen, welche gleiches Achsenverhältnis und Vorzeichen, aber verschiedene Lage der Hauptachsen haben. Es sind diese um die Winkel a und $-a$ gegen P geneigt und bilden den Winkel $2a$ miteinander. Dieses erlaubt a einfach zu messen.

Es sei die doppelbrechende Platte, die auf die Größe der von ihr verursachten Phasendifferenz untersucht werden soll, bei Θ^0-Azimut eingesetzt und das aus ihr austretende Licht mit Hilfe einer irgendwelchen anderen Platte und einem Nikol ausgelöscht. Verbindet man nun die zweite Platte mit dem Nikol fest, so erhält man dadurch einen auf bestimmte Schwingungsellipse eingestellten Analysator. Ändert man das Azimut der ersten Platte, indem man $90^0 - \Theta$ statt Θ wählt, so ist damit die Schwingungsellipse um $2a$ gedreht, sie bleibt aber ihrer Form und Vorzeichen nach ungeändert. Es kann also das Licht nochmals erlöscht werden, indem man dem Analysator eine Drehung erteilt, die den Wert von $2a$ ergibt.

Man kann auch die kompensierende Platte von vornherein mit dem Nikol fest verbinden und durch gleichzeitige Drehung des Analysators und der untersuchten Platte zwei Einstellungen auf volle Dunkelheit aufsuchen. Es ist dann die Drehung der Platte

$$\psi = 90 - 2\Theta,$$

die Drehung des Analysators

$$\varepsilon = 2a$$

und

$$\cos \delta = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} (\varphi + \varepsilon)}$$

Diese Methode ist zur Messung von Phasendifferenzen, die $\pi/2$ nahe sind, besonders gut geeignet. So erlaubt sie z. B. recht genau diejenige Wellenlänge zu ermitteln, für die eine doppelbrechende Platte eine $\lambda/4$-Platte ist. Auch kann die Methode zu Dichroismusmessungen verwendet werden. Hat man mit einer dichroitischen Platte zu tun, so sind die zwei Azimute, deren gleiche Schwingungsellipsen entsprechen, nicht mehr komplementär. Bezeichnet man mit Θ und Θ' diese Azimute, mit k_1 und k_2 die zwei Absorptionskoeffizienten, mit d die Dicke der Platte, so besteht folgende Gleichung:

$$\frac{e^{-\frac{K_2}{2}d}\cos\Theta}{e^{-\frac{K_2}{2}d}\sin\Theta} = \frac{e^{-\frac{K_1}{2}d}\sin\Theta'}{e^{-\frac{K_1}{2}d}\cos\Theta'}.$$

Sind Θ und Θ' ermittelt, so ist damit

$$K_2 - K_1 = \frac{\lg\Theta + \lg\Theta'}{d \cdot \lg e}$$

gegeben.

Zusammenfassung.

1. Es ist eine Messung der Rotation, der Elliptizität und der Absorption einer Kampferchinonlösung im Gebiete der Absorptionsbande durchgeführt worden.

2. Die gewonnenen Resultate sind vom Standpunkte der Drudeschen Theorie diskutiert worden und der Aktivitätskoeffizient berechnet.

3. Es ist eine Methode zur Phasendifferenz- und Dichroismusmessung angegeben.

Zum Schlusse spreche ich Hrn. Prof. A. Eichenwald für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für die gütige Überlassung der Instrumente und sein stets bereitwilliges Entgegenkommen in jeder meiner Arbeit betreffenden Angelegenheit meinen herzlichen Dank aus.

Moskau 1919.

(Eingegangen 23. Februar 1923.)

3. *Über den kugelsymmetrischen Vakuumvorgang in der Einsteinschen Gravitationstheorie;* von *W. Alexandrow.*

In einer Arbeit in diesen Annalen[1]) ist vom Verfasser u. a. das Gravitationsfeld eines *punktförmigen Wellensenders* in Analogie mit der Hertzschen Methode, gemäß der Einsteinschen Näherungslösung, bestimmt und dann auf den Fall der *Kugelsymmetrie* spezialisiert worden. Seither hat der Verfasser den *kugelsymmetrischen Vakuumvorgang* in der Einsteinschen Gravitationstheorie *streng* untersucht und ist zu dem (vielleicht physikalisch vorauszusehenden) negativen Ergebnis gelangt, daß dieser Vorgang wesentlich *statisch* ist; daß also gemäß der Einsteinschen Theorie *kein besonderes Feld einer „pulsierenden" oder stationär sich ausdehnenden Kugel* existiert (auch die in der erwähnten Arbeit bestimmte spezielle Lösung ist in Wahrheit statisch). Der Nachweis dieser Tatsache soll hier entwickelt werden; in mathematischer Hinsicht ist darin der Beweis des *Unitätssatzes* enthalten, daß die einzigen *kugelsymmetrischen Lösungen* der Einsteinschen Gravitationsgleichungen *statisch* sind.

§ 1. Die Vereinfachung der Wirkungsfunktion im allgemeinen kugelsymmetrischen Fall.

1. Ist ein Gravitationsvorgang im Vakuum kugelsymmetrisch, so muß ein Koordinatensystem existieren, in welchem die metrische Fundamentalform folgende Gestalt hat:

$$ds^2 = f^2 dt^2 - 2q\,dt(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3) - \{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + l(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2\};$$

hier sind f, q und l Funktionen von $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ und t (Zeit).[2]) Wie man sich überzeugen kann, wird diese Form

1) W. Alexandrow, Ann. d. Phys. 65. S. 675. 1921.

2) Daß der Faktor von $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ durch Änderung der Radialskala zu 1 gemacht werden kann, hat zuerst Weyl („Zur Gravi-

durch beliebige Zeittransformationen $t' = \theta(r, t)$ *erhalten.* Man könnte also dies dazu benutzen, um zunächst *den Koeffizienten* q *zu* 0 zu machen, so daß die Differentialform nur noch zwei Funktionen f^2 und l von r und t enthalten würde. *Das Wirkungsprinzip reicht* dann aber zum Nachweis *nicht aus.*[1]) Will man aber direkt die Einsteinschen Gleichungen benutzen, so stößt man auf *viel kompliziertere* Gleichungen *zweiter Ordnung* (das Variationsprinzip liefert *Kombinationen erster Ordnung*), so daß die Rechnung *keineswegs einfacher* wird; das *Wirkungsprinzip* liefert eben beim geschickten Variieren *besonders glückliche Kombinationen* (*erster Ordnung*) der Einsteinschen Gleichungen (vgl. darüber § 3). Außerdem scheint mir der hier eingeschlagene Weg *methodisch interessanter* und vielleicht für *Untersuchungen über nichtstatische Felder* allgemein von Nutzen zu sein.

2. Wir entschließen uns also für das Wirkungsprinzip. Es sollen dann allgemein folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} h^2 = 1 + lr^2, \\ e^2 = qr; \end{cases}$$

und außerdem

$$\text{(1a)} \qquad f^2 = x, \quad h^2 = y, \quad e^2 = z.$$

Führt man die Rechnung für $x_1 = r$, $x_2 = x_3 = 0$ aus, so hat die Komponententabelle des metrischen Fundamentaltensors die Gestalt:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} x & -z & 0 & 0 \\ -z & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{cases};$$

und für die kontravarianten Komponenten:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{cases} \frac{y}{g} & -\frac{z}{g} & 0 & 0 \\ -\frac{z}{g} & -\frac{x}{g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{cases}$$

tationstheorie". Ann. d. Phys. 54. S. 180. 1917) zur Vereinfachung der Schwarzschildschen Lösung ausgenutzt.

1) Vgl. darüber die demnächst erscheinende fünfte Auflage von Weyls „Raum, Zeit, Materie".

mit

$$g = xy + z^2. \tag{2}$$

Unter den „geschweiften" Christoffelschen Symbolen sind nur die folgenden (für $x_1 = r$, $x_2 = x_3 = 0$) $\neq 0$:

$$\text{(3)}\quad \begin{cases} \left\{\begin{smallmatrix}2&2\\0\end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix}3&3\\0\end{smallmatrix}\right\} = -\frac{x}{gr}, \\ \left\{\begin{smallmatrix}2&2\\1\end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix}3&3\\1\end{smallmatrix}\right\} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{x}{g}\right), \\ \left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0\end{smallmatrix}\right\} = \frac{1}{2g}\left(y\frac{\partial x}{\partial r} + z\frac{\partial y}{\partial t}\right), \\ \left\{\begin{smallmatrix}0&1\\1\end{smallmatrix}\right\} = \frac{1}{2g}\left(x\frac{\partial y}{\partial t} - z\frac{\partial x}{\partial r}\right), \\ \left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0\end{smallmatrix}\right\} = \frac{1}{2g}\left(y\frac{\partial x}{\partial t} + z\frac{\partial x}{\partial r} + 2z\frac{\partial z}{\partial t}\right), \\ \left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1\end{smallmatrix}\right\} = \frac{1}{2g}\left(x\frac{\partial x}{\partial r} - z\frac{\partial x}{\partial t} + 2x\frac{\partial z}{\partial t}\right), \\ \left\{\begin{smallmatrix}1&1\\0\end{smallmatrix}\right\} = \frac{1}{2g}\left(y\frac{\partial y}{\partial t} + z\frac{\partial y}{\partial r} - 2y\frac{\partial z}{\partial r}\right), \\ \left\{\begin{smallmatrix}1&1\\1\end{smallmatrix}\right\} = \frac{1}{2g}\left(x\frac{\partial y}{\partial r} - z\frac{\partial y}{\partial t} + 2z\frac{\partial z}{\partial r}\right). \end{cases}$$

3. Setzt man

$$dx = r^2\, d\Omega\, dr\, dt,$$

so kann man im Wirkungsintegral

$$\int\int \mathfrak{G}\, dx$$

nur

$$\int\int \mathfrak{G} r^2\, dr\, dt$$

behalten, mit

$$-\frac{2}{\sqrt{g}}\mathfrak{G} = g^{\alpha\beta}\left|\left\{\begin{smallmatrix}\lambda&\gamma\\\gamma\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\alpha&\beta\\\lambda\end{smallmatrix}\right\} - \left\{\begin{smallmatrix}\lambda&\beta\\\gamma\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\alpha&\gamma\\\lambda\end{smallmatrix}\right\}\right.$$

(allgemein sollen die griechischen Buchstaben die Werte 0, 1, 2, 3; die lateinischen dagegen nur 1, 2, 3 durchlaufen).

Wir beachten zunächst, daß *nur für*

$$\alpha = \beta \text{ und } \alpha, \beta = 0, 1 \text{ oder } 1, 0$$

der Wert von $g^{\alpha\beta} \neq 0$ ist. Dann reduziert sich der Ausdruck auf

$$g^{\alpha\alpha}\left|\left\{\begin{smallmatrix}\lambda&\gamma\\\gamma\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\alpha&\alpha\\\lambda\end{smallmatrix}\right\} - \left\{\begin{smallmatrix}\lambda&\alpha\\\gamma\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\alpha&\gamma\\\lambda\end{smallmatrix}\right\} + 2g^{01}\left|\left\{\begin{smallmatrix}\lambda&\gamma\\\gamma\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\\lambda\end{smallmatrix}\right\} - \left\{\begin{smallmatrix}\lambda&0\\\gamma\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\gamma&1\\\lambda\end{smallmatrix}\right\}\right.,$$

Jetzt benutzen wir die Tatsache, daß nur solche Symbole nicht verschwinden, in welchen *unten 0 oder 1* steht; und unter diesen enthalten nur $\left\{\begin{smallmatrix}\alpha & \alpha\\ 0\end{smallmatrix}\right\}$ und $\left\{\begin{smallmatrix}\alpha & \alpha\\ 1\end{smallmatrix}\right\}$ Indizes > 1. Es ergibt sich dann, nach Entwicklung und Zerstörung der Glieder:

$$(4)\quad \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{g}}\mathfrak{G} = \frac{1}{g}\left(\left\{\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0\end{smallmatrix}\right\} - \left\{\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1\end{smallmatrix}\right\}\right)\left(y\left\{\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 1\end{smallmatrix}\right\} - x\left\{\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}\right) \\ \qquad + \frac{1}{g}\left(\left\{\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1\end{smallmatrix}\right\} - \left\{\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0\end{smallmatrix}\right\}\right)\left(y\left\{\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 1\end{smallmatrix}\right\} - x\left\{\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0\end{smallmatrix}\right\}\right) \\ \qquad - 2\left(\left\{\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0\end{smallmatrix}\right\} + \left\{\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1\end{smallmatrix}\right\}\right)\left\{\begin{smallmatrix}2 & 2\\ 0\end{smallmatrix}\right\} \\ \qquad - 2\left(\left\{\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0\end{smallmatrix}\right\} + \left\{\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1\end{smallmatrix}\right\}\right)\left\{\begin{smallmatrix}2 & 2\\ 1\end{smallmatrix}\right\} \\ \qquad - \frac{2x}{g}\left(\left\{\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0\end{smallmatrix}\right\} - \left\{\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 1\end{smallmatrix}\right\}\right). \end{cases}$$

4. Wir ersetzen hier die geschweiften Symbole durch die gefundenen Ausdrücke (3). Es sondern sich sofort die dritten und vierten Zeilen aus, als

$$-\frac{2}{\sqrt{g}}\left\{\frac{1}{r}\left(1-\frac{x}{g}\right)\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial r} - \frac{x}{gr}\,\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}\right\},$$

was zum Wirkungsintegral folgenden Beitrag liefert, der die *Differentialquotienten* der Potentiale nur *in erster Potenz* enthält, also *beim Variieren auf Differentialausdrücke erster Ordnung* führt:

$$(\mathrm{I})\qquad \iint r\left(1-\frac{x}{g}\right)\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial r}\,dr\,dt - \frac{1}{2}\iint \frac{rx}{g^{3/2}}\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dr\,dt.$$

Andere Glieder enthalten *Produkte von je zwei Differentialquotienten.* Gehen wir aber die nicht verschwindenden Koeffizienten durch, so sehen wir, daß diese Glieder sich von selbst *zu Funktionaldeterminanten vereinigen,* und zum Wirkungsintegral noch den Restbeitrag von folgender Form abgeben:

$$(\mathrm{II})\qquad -\frac{1}{4}\iint \frac{r^2}{g^{3/2}}\left[x\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,t)} + y\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(r,t)} + z\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)}\right]dr\,dt.$$

Von diesem Ausdruck würden wir beim Variieren *Differentialausdrücke zweiter Ordnung erwarten;* daß dem *nicht so* ist (also Ausdrücke nur von erster Ordnung herauskommen), zeigt folgende Untersuchung.

5. Das Integral (II) hat eine interessante Gestalt. Wir erkennen nämlich *formal das Flächenintegral der Normal-*

komponente eines Vektors im Raume x, y, z. Es transformieren sich zwar die Komponenten g_x, g_y, g_z von

$$\mathfrak{g} \left| \frac{x}{g^{3/2}}, \quad \frac{y}{g^{3/2}}, \quad \frac{z}{g^{3/2}} \right. \quad \text{mit} \quad g = xy + z^2$$

nicht wie die eines Vektors gegenüber Orthogonalsubstitutionen von x, y, z; aber *für mathematische Untersuchungen*, namentlich *die Anwendung der Sätze von Gauss und Stokes* wird das ohne Belang sein, so daß wir formal einen Vektor $\mathfrak{g}$ mit diesen Komponenten einführen können, indem wir im *bestimmten* Koordinatensystem x, y, z operieren. Bezeichnenderweise *verschwindet die Divergenz* dieses Vektors; denn es ist:

$$\operatorname{div} \mathfrak{g} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = \frac{3}{g^{3/2}} - 3\,\frac{xy + z^2}{g^{5/2}}$$
$$= \frac{3}{g^{3/2}} - \frac{3}{g^{3/2}} = 0.$$

Deshalb ist $\mathfrak{g}$ *die Rotation eines anderen Vektors*, eines Vektorpotentials $\mathfrak{f}$

$$\mathfrak{g} = \operatorname{rot} \mathfrak{f}, \tag{5}$$

und zwar findet man für $\mathfrak{f}$ ohne weiteres:

$$\mathfrak{f} \left| \frac{z}{x\sqrt{g}}, \quad -\frac{z}{y\sqrt{g}}, \quad 0. \right. \tag{5a}$$

Den Beitrag (II) zum Wirkungsintegral kann man also, bis auf den Faktor $-\frac{1}{4}$, so schreiben:

$$\int r^2 \operatorname{rot}_n \mathfrak{f}\, do. \tag{6}$$

Wäre nun *der Parameter r^2 nicht da*, so würde *nach dem Stokesschen Satze* aus diesem Integral *ein Kurvenintegral über die Grenze des Weltgebietes* hervorgehen, so daß seine *Variation verschwinden* würde. Es stört aber noch hier der Parameter r^2 als Faktor. Um ihn loszuwerden, müssen wir *den Stokesschen Satz* in dem Sinne *verallgemeinern*, daß in den Integralen *auch die Darstellungsparameter u, v* der Fläche auftreten dürfen. Es läßt sich nämlich leicht nach der gewöhnlichen Methode (der Zurückführung auf den „ebenen" Satz von Gauss) die Formel ableiten:

$$(7)\quad \begin{cases} \iint \varphi(u,v)\,\mathrm{rot}_n\,\mathfrak{a}\,do = \oint \varphi(u,v)(\mathfrak{a},d\mathfrak{r}) \\ \qquad - \iint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\mathfrak{a},\mathfrak{r}_v) - \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\mathfrak{a},\mathfrak{r}_u)\right) du\,dv \end{cases}$$

($\mathfrak{r}$ Fahrstrahlvektor der Begrenzungskurve).

Wenden wir diese Formel auf (6) an, wobei die Parameter r, t sind, so erhalten wir:

$$\int r^2\,\mathrm{rot}_n\,\mathfrak{f}\,do = \oint r^2(\mathfrak{f},d\mathfrak{r}) - 2\iint r(\mathfrak{f},\mathfrak{r}_t)\,dr\,dt.$$

Nun ist das *Kurvenintegral über die Grenze des Weltgebietes* erstreckt, also beim Variieren:

$$\delta \oint r^2(\mathfrak{f},d\mathfrak{r}) = 0.$$

Nach (5a) wird also aus dem Beitrag (II):

$$(\mathrm{II\,a})\qquad \frac{1}{2}\iint \frac{r\,x}{g^{1/2}}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) dr\,dt.$$

Die *Produkte* der Differentialquotienten sind *verschwunden*, so daß wir sicher auf solche *Kombinationen der Einsteinschen Gleichungen* geführt werden, die *von erster* (*statt zweiter*) *Ordnung* sind.

6. In dem durch (I) und (IIa) dargestellten Wirkungsintegral können wir x, y, z unabhängig voneinander *variieren* (vgl. § 3). Doch erhält man dadurch noch *nicht die einfachsten Kombinationen* der Einsteinschen Gleichungen.

Das Wirkungsintegral läßt sich *noch mehr vereinfachen*. Setzen wir:

$$(8)\quad \varphi = \sqrt{g},\quad u = \frac{x}{g},\quad w = \frac{z}{\sqrt{g}},\quad \psi = -\frac{w}{u} = -\frac{z}{u\sqrt{g}},$$

so wird aus dem Wirkungsintegral, wegen

$$y = \frac{1-w^2}{u},$$

$$\iint r(1-u)\frac{\partial \varphi}{\partial r}\,dr\,dt + \frac{1}{2}\iint r\,w\frac{\partial \ln u}{\partial t}\,dr\,dt$$
$$- \frac{1}{2}\iint r\,w\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln\frac{1-w^2}{u}\right) dr\,dt,$$

d. h.

$$\iint r(1-u)\frac{\partial \varphi}{\partial r}\,dr\,dt - \iint r\,\psi\frac{\partial u}{\partial t}\,dr\,dt$$
$$- \frac{1}{2}\iint r\,w\frac{\partial \ln(1-w^2)}{\partial t}\,dr\,dt.$$

Die *Variation des letzten Integrals* ist aber unter allen Umständen $= 0$; denn es ist

$$\delta \iint r w \frac{\partial \ln(1-w^2)}{\partial t}\, dr\, dt = -\iint \delta w \cdot r \frac{1}{1-w^2} \frac{\partial w^2}{\partial t}\, dr\, dt - \iint r w \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2w\,\partial w}{1-w^2}\right) dr\, dt,$$

und bis auf einen am Rande des Weltgebietes verschwindenden Teil:

$$= -\iint \delta w \cdot r \frac{1}{1-w^2} \frac{\partial w^2}{\partial t}\, dr\, dt + \iint r \frac{\partial w}{\partial t} \frac{2w}{1-w^2} \delta w\, dr\, dt$$

$$= \iint \delta w \cdot r \left(\frac{1}{1-w^2} \frac{\partial w^2}{\partial t} - \frac{1}{1-w^2} \frac{\partial w^2}{\partial t}\right) dr\, dt = 0.$$

Das *Wirkungsintegral reduziert sich* also *endgültig* auf:

$$\text{(III)} \qquad \boxed{\iint r(1-u) \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, dr\, dt - \iint r \psi \frac{\partial u}{\partial t}\, dr\, dt.}$$

Hier dürfen φ, ψ *und* u *unabhängig voneinander variiert* werden; und die *gesuchten Potentiale* werden *durch diese Funktionen* wie folgt dargestellt:

$$\text{(IIIa)} \qquad \begin{cases} x = f^2 = u\varphi^2, \\ y = h^2 = \dfrac{1}{u} - u\psi^2, \\ z = e^2 = -u\varphi\psi. \end{cases}$$

§ 2. Das kugelsymmetrische Gravitationsfeld im Vakuum.

1. Variieren wir ψ, so ergibt sich:

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial(ur)}{\partial t} = 0;$$

die Variation von φ liefert ferner:

$$\text{(10)} \qquad \frac{\partial(ur)}{\partial r} = 1.$$

Die *zwei Gleichungen* werden also *zur vollständigen Bestimmung von* u verbraucht; u hat danach den *bekannten Wert*:

$$\text{(11)} \qquad u = 1 - \frac{2m}{r}.$$

Variieren wir nun u, so ergibt sich *eine Beziehung zwischen* φ *und* ψ, und zwar:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \,. \tag{12}$$

φ und ψ genügen also einer *linearen* „Superpositionsgleichung", und die Lösung des Problems ist in diesen *quadratisch*. Die Gleichung (12) sagt aber nichts anderes aus, als daß φ *und* ψ *Gradientkomponenten* einer Funktion $\theta(r,t)$ sind, also:

$$\varphi = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \psi = \frac{\partial \theta}{\partial r} \,. \tag{13}$$

Nach (IIIa) erhalten wir also als *Lösung des kugelsymmetrischen Vakuumproblems*:

$$\text{(IV)} \qquad \boxed{\begin{aligned} f^2 &= u\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2, \\ h^2 &= \frac{1}{u} - u\left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)^2, \\ e^2 &= -u\frac{\partial \theta}{\partial t}\frac{\partial \theta}{\partial r}, \end{aligned}}$$

mit

$$\boxed{u = 1 - \frac{2m}{r} \,.}$$

Hier ist $\theta(r,t)$ eine *beliebige* Funktion von (r,t) (ein „nicht lineares Potential").

2. Betrachtet man aber diese Lösung näher, so erweist sie sich als *statisch*. Probieren wir z. B. die geodätische Nullinie $ds^2 = 0$ zu bestimmen, so erhalten wir:

$$\frac{dr}{d\theta} = u = 1 - \frac{2m}{r},$$

und dies legt nahe, daß, wenn man θ *als das Zeitmaß* nimmt, die Lösung die *Schwarzschildsche Form* bekommt. Und in der Tat haben wir für die metrische Fundamentalform nach (IV):

$$\begin{aligned} ds^2 = u\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 dt^2 + 2u\frac{\partial \theta}{\partial t}\,dt\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \theta}{\partial x_3}dx_3\right) \\ + u\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \theta}{\partial x_3}dx_3\right)^2 \\ - \left[(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{\frac{1}{u} - 1}{r^2}(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2\right], \end{aligned}$$

das heißt

$$ds^2 = u\,d\theta^2 - \left[(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{\frac{1}{u} - 1}{r^2}(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2\right],$$

wo

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial t}dt + \frac{\partial\theta}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\theta}{\partial x_3}dx_3$$

das vollständige Differential von $\theta(r, t)$ ist. Durch die *Zeittransformation*

$$t' = \theta(r, t)$$

geht unsere Lösung *in die Schwarzschildsche* über, ist also *in Wahrheit* (nach Definition) *statisch.* Es ist somit *in Wirklichkeit kein Ausbreitungsvorgang* von Gravitationswellen da; nur die künstliche Einführung variabler Zeitflächen

$$\theta(r, t) = t' = \text{const}$$

erweckt den Eindruck, als ob Wellen hindurchschlagen würden. Es *erzeugt* eben auch *eine „pulsierende" oder stationär sich ausdehnende Kugel* kein besonderes, sondern *nur das einfache statische Feld.*

3. Von der strengen gelangen wir zur *approximativen* Lösung, indem wir

$$\theta = t + \varepsilon H \qquad (\varepsilon \text{ und } m \text{ klein!})$$

setzen; man hat dann aus (IV):

$$(14)\quad \begin{cases} f^2 = 1 - \dfrac{2m}{r} + 2\varepsilon\dfrac{\partial H}{\partial t}, \\ h^2 = 1 + \dfrac{2m}{r}, \\ -c^2 = \varepsilon\dfrac{\partial H}{\partial r}, \end{cases}$$

wo H eine *beliebige* Funktion von r, t ist. Nimmt man speziell

$$H = -\frac{e^{j\nu(t-r)}}{r}$$

an, so erhält man die spezialisierte Lösung meiner früheren Arbeit[1]), wobei H die darin eingeführte *Hertzsche Funktion* ist (das statische Feld ist dort weggelassen worden). *Die spezielle kugelsymmetrische Lösung ist also in Wahrheit ebenfalls*

1) a. a. O. S. 680.

statisch. Daß die Funktion H *dort nicht beliebig* ist, sondern der optischen Gleichung genügt, kommt daher, daß dort das bekannte *besondere Koordinatensystem* benutzt wird, in welchem die Einsteinsche Lösung gilt, und zwar auf Grund der Potentialnormierung $\frac{\partial \psi_i^a}{\partial x_a} = 0$, die in unserem Fall so geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial \psi_0^0}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \psi_0^1) = 0. \tag{15}$$

Nun ist nach (14):

$$\psi_0^0 = -1 - \frac{2m}{r} + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial t},$$

$$\psi_0^1 = -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial r},$$

also in (15) eingesetzt:

$$\varepsilon\left[\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial H}{\partial r}\right)\right] = 0.$$

§ 3. Nachtrag über die Benutzung der Einsteinschen Gleichungen.

1. Variiert man im Wirkungsintegral (I) und (II s) x, y, z, so erhält man weniger einfache, interessante Gleichungen, ebenfalls Kombinationen erster Ordnung von Einsteinschen Differentialgleichungen:

$$\text{(16)} \quad \begin{cases} \text{(a)} & \left\{\begin{smallmatrix}0&0\\1\end{smallmatrix}\right\} = \frac{x}{2r}\left(1 - \frac{x}{g}\right) = \frac{x}{2}\left\{\begin{smallmatrix}2&2\\1\end{smallmatrix}\right\}, \\ \text{(b)} & \left\{\begin{smallmatrix}1&1\\1\end{smallmatrix}\right\} = -\frac{y}{2r}\left(1 - \frac{x}{g}\right) = -\frac{y}{2}\left\{\begin{smallmatrix}2&2\\1\end{smallmatrix}\right\}, \\ \text{(c)} & \left\{\begin{smallmatrix}0&1\\1\end{smallmatrix}\right\} = -\frac{z}{2r}\left(1 - \frac{x}{g}\right) = -\frac{z}{2}\left\{\begin{smallmatrix}2&2\\1\end{smallmatrix}\right\}. \end{cases}$$

Sie führen diejenigen unter den unten mit 1 besetzten Symbolen (3) § 1, die die *Differentialquotienten* enthalten, *auf dasjenige* $\left\{\begin{smallmatrix}2&2\\1\end{smallmatrix}\right\}$, *das nur Potentiale selbst* enthält. Die Gleichungen (9), (10), (12) § 2 sind *Kombinationen* der Gleichungen (16), und zwar liefert die Elimination von $\left\{\begin{smallmatrix}2&2\\1\end{smallmatrix}\right\}$

aus (b) und (c): $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{x}{g}\frac{\partial g}{\partial r}$;

aus (a) und (c): $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g}{x}\right) = 0$ (Gleichung 9);

$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{x}{g}\frac{\partial g}{\partial r}$ in (c) eingesetzt, liefert hernach:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r x}{g}\right) = 1 \quad \text{(Gleichung 10)};$$

unter Benutzung der Gleichung (9) hat man schließlich:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{x}{g}\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x^2}{x}\right) = -\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x^2}{g}\right),$$

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{u\sqrt{g}}\right) \quad \text{(Gleichung 12)}.$$

Man sieht, daß es einige Mühe kostet, die richtigen Kombinationen herauszuschälen.

2. Noch *komplizierter* wird es mit den *Einsteinschen Gleichungen.* Hier erhält man Differentialgleichungen *zweiter Ordnung*, während das *Variationsprinzip Kombinationen* dieser Gleichungen liefert, die *von erster Ordnung* sind.

Unter den Einsteinschen Gleichungen

$$0 = R_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left\{\begin{matrix}\alpha & \beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{\begin{matrix}\alpha & \gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\lambda & \gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\alpha & \beta\\ \lambda\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\lambda & \beta\\ \gamma\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\alpha & \gamma\\ \lambda\end{matrix}\right\}$$

sind die meisten identisch erfüllt. Nur die den Indizespaaren 0 0, 0 1, 1 1, 2 2 entsprechenden sind Bestimmungsgleichungen. Diese haben die Gestalt:

$$0\,0 \;\Big|\; \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0\end{matrix}\right\}\right) + \frac{1}{r^2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sqrt{g}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 1\end{matrix}\right\}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}\right) - \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0\end{matrix}\right\}^2 - \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1\end{matrix}\right\}^2 - 2\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0\end{matrix}\right\} = 0,$$

$$0\,1 \;\Big|\; \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0\end{matrix}\right\}\right) + \frac{1}{r^2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sqrt{g}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1\end{matrix}\right\}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}\right) - \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0\end{matrix}\right\} = 0,$$

$$2\,2 \left| \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g}\begin{Bmatrix}2&2\\0\end{Bmatrix}\right) + \frac{1}{r^2\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sqrt{g}\begin{Bmatrix}2&2\\1\end{Bmatrix}\right) - \frac{1}{r\sqrt{g}} \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial r} = 0,\right.$$

$$1\,1 \left| \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g}\begin{Bmatrix}1&1\\0\end{Bmatrix}\right) + \frac{1}{r^2\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sqrt{g}\begin{Bmatrix}1&1\\1\end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial r}\right) - \begin{Bmatrix}1&1\\1\end{Bmatrix}^2 - \begin{Bmatrix}1&0\\0\end{Bmatrix}^2 - 2\begin{Bmatrix}1&1\\0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}0&1\\1\end{Bmatrix} = 0.\right.$$

Setzt man hier die Werte (3) § 1 der geschweiften Symbole ein, so mag man ersehen, welch ein kompliziertes System von nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung da entsteht, *auch wenn man dort $z = 0$ setzt*, und welche Schwierigkeit es bieten würde, das einfache System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, welches das Wirkungsprinzip lieferte, als Kombinationen dieser Gleichungen herauszupräparieren. Demgegenüber scheint mir *die Behandlung* von § 1 *auf Grund des verallgemeinerten Stokesschen Satzes von großer Planmäßigkeit* und Natürlichkeit.

3. Benutzt man die durch das Variationsprinzip gewonnenen Resultate 1 (16) § 3, die die Feldkomponenten als Funktionen der Potentiale geben, so könnte man verifizieren, daß in der Gleichung 0 0 teilweise die Gleichung $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial t}$, teilweise die Bestimmung von u steckt. Auch in 2 2 sind diese Beziehungen verborgen. Komplizierter ist der Bau von 0 1; da ist z. B. $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{z}{g} \frac{\partial g}{\partial r}$ außer dem erwähnten mitenthalten. Die Gleichung 1 1 ist die komplizierteste, und es bietet noch Schwierigkeit, sie auch unter Benutzung von (16) direkt nachzuprüfen.

(Eingegangen 26. Februar 1923.)

4. *Über die elektrische Polarisation des Dielektrikums;* *von Georg Jacoby.*

Bekanntlich führt die Elektronentheorie die Polarisation des Dielektrikums auf die Verschiebung der an den Atomen gebundenen Elektronen, der sogenannten Polarisationselektronen, zurück. Um diese der elektrischen Feldstärke proportionale Verschiebung zu erklären, nimmt man an, daß im elektrischen Felde auf dieselben quasielastische Kräfte wirken, d. h. Kräfte, welche der Abweichung der Polarisationselektronen aus der neutralen Lage proportional sind. In folgendem soll versucht werden, das Wesen dieser quasielastischen Kräfte auf Grund der neuen Atomvorstellung näher zu beleuchten.

Wir betrachten ein Elektron, welches auf einer Bohrschen Kreisbahn mit dem Radius a um eine positive Kernladung von der Stärke Ze mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Ist kein äußeres elektrisches Feld vorhanden, so halten die Zentrifugalkraft des kreisenden Elektrons und die Coulombsche Anziehungskraft zwischen Elektron und Kern einander das Gleichgewicht. Besteht ein elektrisches Feld, so wird im allgemeinen das Elektron auf der Schale verbleiben, welcher die Kreisbahn des Elektrons angehört. Zum Verlassen der Elektronenschale ist nämlich nach der Bohrschen Theorie die Zuführung oder Abgabe eines Energiequantums erforderlich. Es kann an zwei Möglichkeiten gedacht werden. Erstens: das elektrische Feld deformiert die Schale. Zweitens: das elektrische Feld orientiert das Elektrons anders auf der unveränderten Schale. Da die zweite Möglichkeit auf die anfangs erwähnte Proportinalität zwischen Feldstärke und Verschiebung führt, so soll diese hier weiter verfolgt werden.

Den Vektor der Stärke des äußeren elektrischen Feldes $\mathfrak{E}_a$ zerlegen wir in eine Komponente $\mathfrak{E}_a'$ senkrecht zu der Bahnebene und in eine Komponente $\mathfrak{E}_a''$ in der Bahnebene. Befassen

wir uns zunächst mit der letzteren. In Richtung der Verbindungslinie von Elektron und Kern ergibt $\mathfrak{E}_a''$ eine Kraft, welche dem Cosinus des von der Verbindungslinie und der Feldrichtung gebildeten Winkels proportional ist. Der zeitliche Mittelwert dieser Kraft ist gleich Null. Wir brauchen daher für das auf der Kugelschale verschobene Elektron eine von $\mathfrak{E}_a''$ herrührende Kraft nicht zu berücksichtigen, da wir das makroskopische Feld betrachten wollen.

Die senkrecht zu der Bahnebene liegende Komponente $\mathfrak{E}_a'$ hingegen bewirkt eine Verschiebung der Elektronenbahn gegen den Kern entgegengesetzt der Richtung des Vektors $\mathfrak{E}_a'$. In der nebenstehenden Fig. 1 ist die Elektronenschale angedeutet. Die nicht verschobene Elektronenbahn ist ein größter Kreis, welcher in der Figur als eine durch A gehende Ellipse erscheint. Die verschobene Bahn ist ein durch A' gehender Parallelkreis. Die Verschiebung ist $\overline{OO'}$ und sei als Vektor durch $\mathfrak{s}'$ gekennzeichnet. Der Betrag der Coulombschen Anziehungskraft zwischen Elektron und Kern bleibt während der Verschiebung konstant. Er lautet

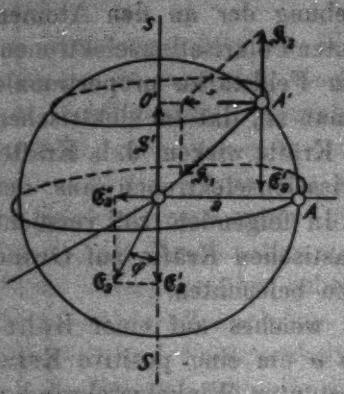


Fig. 1.

$$(1) \qquad |\mathfrak{K}_1| = \frac{Ze^2}{a^2}.$$

Das elektrische Feld wirkt mit einer Kraft

$$(2) \qquad \mathfrak{K}_2 = -e\,\mathfrak{E}_a'$$

auf das Elektron. Die Elektronenbahn wird solange verschoben, bis die Resultierende $\mathfrak{K}$ der Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in die Ebene der Elektronenbahn fällt. Es folgt dann

$$\mathfrak{s}' = \frac{a}{|\mathfrak{K}_1|}\mathfrak{K}_2.$$

Mit den Ausdrücken (1) und (2) wird

$$\mathfrak{s}' = -\frac{a^3}{Ze}\mathfrak{E}_a'.$$

Um die Abschirmung der Kernladung durch die entgegengesetzte Ladung der übrigen Elektronen zu berücksichtigen,

setzen wir statt der wirklichen Kernladung Ze eine verminderte, nämlich die effektive Kernladung $Z_{\text{eff.}}e$. Wir schreiben daher den Ausdruck für die Verschiebung

$$\mathfrak{s}' = -\frac{a^3}{Z_{\text{eff.}}e}\mathfrak{E}_a', \tag{3}$$

Die Größen a, $Z_{\text{eff.}}$ und e sind Atomkonstanten. Der Vektor $\mathfrak{s}'$ ist dem Vektor $\mathfrak{E}_a'$ proportional, also

$$\mathfrak{s}' = -k\mathfrak{E}_a', \tag{3a}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\frac{a^3}{Z_{\text{eff.}}e} = k. \tag{3b}$$

Wir wollen nun untersuchen, ob der elektrischen Polarisation des Dielektrikums der soeben gefundene Vektor $\mathfrak{s}'$ zugrunde gelegt werden kann. Setzen wir ein isotropes Dielektrikum voraus, so hat der Vektor der elektrischen Polarisation dieselbe Richtung wie der Vektor der Stärke des unzerlegten elektrischen Feldes. Wir haben demnach nur die Komponente von $\mathfrak{s}'$, welche dem Vektor $\mathfrak{E}_a$ entgegengesetzt gerichtet ist, in Rechnung zu setzen. Was die zum Vektor $\mathfrak{E}_a$ senkrechten Komponenten von $\mathfrak{s}'$ der einzelnen Atome betrifft, so heben sich diese in der Gesamtwirkung auf. Bezeichnet, vgl. Figur, φ den Winkel zwischen dem der Verschiebung abgewendeten Teile der Achse 88 und dem Vektor $\mathfrak{E}_a$, so ist

$$|\mathfrak{E}_a'| = |\mathfrak{E}_a| \cos\varphi.$$

Es werden für φ alle möglichen Werte zwischen 0 und $\pi/2$ vorkommen. Wir führen daher für die dem Vektor $\mathfrak{E}_a$ entgegengesetzt gerichtete Komponente von $\mathfrak{s}'$ einen mittleren Vektor $\mathfrak{s}$ ein. Der Betrag desselben ist

$$|\mathfrak{s}| = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} |\mathfrak{s}'| \cos\varphi \, d\varphi$$

oder

$$\mathfrak{s} = -\frac{1}{2}k\mathfrak{E}_a. \tag{4}$$

Der Betrag der elektrischen Polarisation ist gleich der Menge der an dem Dielektrikum gebundenen Elektrizität, welche sich auf der Flächeneinheit der an das Metall grenzenden

Fläche des Dielektrikums ansammelt, wenn wir an einen Kondensator denken. Betrachten wir zunächst ein Dielektrikum mit nur einer Art von Atomen. Die auf die Raumeinheit bezogene Anzahl der Atome sei N. Die innerste Elektronenschale vom Radius a_1 sei mit q_1 Elektronen, die folgende vom Radius a_2 mit q_2 Elektronen usw., die äußerste vom Radius a_n mit q_n Elektronen besetzt. Dann ist die auf die Flächeneinheit der Grenzfläche des Dielektrikums bezogene Ladung

$$(q_1 |s_1| + q_2 |s_2| + \ldots + q_n |s_n|) e N.$$

Setzen wir

$$h_i = \frac{\varkappa_i}{e},$$

wobei also

$$\varkappa_i = \frac{a_i^3}{Z_i e \pi}$$

ist, so erhalten wir mittels des Ausdruckes (4) für die elektrische Polarisation

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} q_i \varkappa_i N \mathfrak{E}_a.$$

Enthält das Dielektrikum m verschiedene Atome, so gilt

$$(5) \quad \mathfrak{P} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} (q_{i1} \varkappa_{i1} N_1 + q_{i2} \varkappa_{i2} N_2 + \ldots + q_{im} \varkappa_{im} N_m) \mathfrak{E}_a.$$

Schreiben wir für den Summenausdruck die Größe K, so entsteht

$$(5a) \quad \mathfrak{P} = \frac{1}{2} K \mathfrak{E}_a.$$

Wir dürfen den Vektor $\mathfrak{E}_a$ nicht dem Vektor $\mathfrak{E}$ der Stärke des elektrischen Feldes gleichsetzen, welches der Potentialdifferenz eines Kondensators entspricht. Jedes Atom befindet sich nämlich noch in einem zweiten elektrischen Felde, welches von den übrigen polarisierten Atomen herrührt. Wir setzen

$$(6) \quad \mathfrak{E}_a = \mathfrak{E} + 4\pi \left(\frac{1}{3} + s\right) \mathfrak{P},$$

wobei s eine Konstante ist.[1]) Die Ausdrücke (5a) und (6) ergeben

$$(7) \quad \mathfrak{P} = \frac{K}{2\left[1 - 2\pi K \left(\frac{1}{3} + s\right)\right]} \mathfrak{E}.$$

1) Vgl. Abraham, Theorie der Elektrizität, II. Bd. 3. Aufl. S. 249.

Weiter folgt für die Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon = 1 + \frac{2\pi K}{1 - 2\pi K\left(\frac{1}{3} + s\right)}, \tag{8}$$

wobei wir früher

$$K = \sum_{i=1}^{i=n} (q_{i1}\, \varkappa_{i1}\, N_1 + q_{i2}\, \varkappa_{i2}\, N_2 + \ldots + q_{im}\, \varkappa_{im}\, N_m) \tag{9}$$

gesetzt haben.

Wir wollen nun eine Betrachtung der Dielektrizitätskonstanten ε des Schwefels und des Wassers anschließen. Für Schwefel haben Messungen ε von 2 bis 4 ergeben. Was die Besetzung der einzelnen Elektronenschalen betrifft, so gehen wir von dem Atomaufbau aus, auf den das periodische System der Elemente hindeutet. Hiernach stellen wir uns ein Schwefelatom bestehend aus einer Kernladung von 16 Elementareinheiten mit 3 Elektronenschalen vor, auf welche sich 16 Elektronen verteilen. Die innerste Schale (mit Index 1 bezeichnet) enthält 2 Elektronen, die folgende (mit Index 2 bezeichnet) 8 Elektronen und die äußerste (mit Index 3 bezeichnet) 6 Elektronen. Jedes Elektron steht unter dem Einfluß einer effektiven Kernladung, deren Wert sich von Schale zu Schale ändert. Es gilt

$$Z_{\text{eff.}} = Z - p - s_q,$$

wobei p die Anzahl der Elektronen ist, welche dem Kern näher liegen als das betrachtete Elektron und s_q eine Zahl, welche die Wirkung der übrigen auf gleicher Schale befindlichen Elektronen berücksichtigt.[1]) Der Schalenradius in cm errechnet sich zu

$$a_n = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m e^2 Z_{\text{eff.}}},$$

wobei n die „Quantenzahl" der Schale bedeutet, welche sich mit der oben angeführten Indexbezeichnung deckt, ferner h das Plancksche Wirkungsquantum und m die Masse des Elektrons. Die für unsere Betrachtung erforderlichen Daten sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

---

1) Vgl. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 3. Aufl., S. 89 usw.

n	q	$Z_{\text{eff.}}$	a_n	$\varkappa_n$	$q_n \varkappa_n$
1	2	15,75	$0{,}083 \cdot 10^{-8}$	$0{,}0023 \cdot 10^{-27}$	$0{,}0046 \cdot 10^{-27}$
2	8	11,20	$0{,}189 \cdot 10^{-8}$	$0{,}60 \cdot 10^{-27}$	$4{,}8 \cdot 10^{-27}$
3	6	4,17	$1{,}15 \cdot 10^{-8}$	$365{,}0 \cdot 10^{-27}$	$2190 \cdot 10^{-27}$

Wir ermitteln nun die Anzahl N der Atome in 1 ccm Schwefel. Das spezifische Gewicht des Schwefels beträgt 2,0 g cm^{-3} und das Atomgewicht 32,06, wenn wir das Atomgewicht des Wasserstoffes 1,008 setzen. Da das Wasserstoffatom $1{,}649 \cdot 10^{-24}$ g wiegt, so ist

$$N = \frac{2{,}0}{1{,}649 \cdot 10^{-24} \cdot \frac{32{,}06}{1{,}008}} = 3{,}81 \cdot 10^{22}.$$

Weiter folgt

$$K = (0{,}0046 + 4{,}8 + 2190) \cdot 10^{-27} \cdot 3{,}81 \cdot 10^{22} = 8{,}36 \cdot 10^{-2}.$$

Wir stellen zunächst fest, daß der Einfluß der Elektronen der beiden inneren Schalen verschwindend ist. Dies deckt sich mit der bisher üblichen Ansicht, daß nur die äußeren Elektronen praktisch die Polarisation ausmachen. Wir könnten nun mit Hilfe des Ausdruckes (8) die Dielektrizitätskonstante ausrechnen, wenn uns die Größe s bekannt wäre. In dem Ausdruck (6) gibt $4\pi s \mathfrak{P}$ die Feldstärke am Orte eines betrachteten Atomes an, welche von den benachbarten polarisierten Atomen herrührt, während die übrigen weiter entfernt liegenden Atome den Beitrag $\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}$ liefern. Da wir die Größe s nicht kennen, so bleibt uns nichts anderes übrig, als dieselbe aus dem bekannten Werte der Dielektrizitätskonstanten zu errechnen, und nachzusehen, ob $4\pi s \mathfrak{P}$ einen „wahrscheinlichen" Vergleich mit $\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}$ aushält. Für $\varepsilon = 2{,}0$ ergibt sich $s = 0{,}59$, ein Wert, welchen wir, verglichen mit $\frac{1}{3}$, wohl nicht als unwahrscheinlich zu bezeichnen brauchen.

Beim Schwefel werden nun aber auch höhere Werte für ε und zwar bis 4,0 gemessen. Wir könnten dies damit erklären, daß s auch höhere Werte annehmen kann. Für $\varepsilon = 4{,}0$ ergibt sich $s = 1{,}26$. Auch daran kann man denken, daß die Polarisationselektronen sich nicht auf der dritten Schale, sondern weiter nach außen, und zwar auf der vierten Schale befinden. Dies brauchte nur bei einem Teil der Atome der

Fall zu sein. Kommt für sämtliche Atome die Elektronenbesetzung der vierten Schale in Betracht, so verlangt $\varepsilon = 4{,}0$ den Wert $s = -\frac{1}{3}$.

Bildet der Schwefel ein Kristallgitter, so sind die Atome Ionen. Haben die negativen Ionen eine vollbesetzte äußere Schale, so ist die Zahl der Polarisationselektronen 8, bei den positiven Ionen hingegen 4. Die effektive Kernladung ist bei den negativen Ionen $3{,}20\,e$ und die der positiven Ionen $5{,}04\,e$. Der Mittelwert ist $4{,}12\,e$. Er weicht von dem früher benutzten Wert $4{,}17\,e$ nur wenig ab, so daß wir für das Kristallgitter unsere Rechnung nicht abzuändern brauchen.

Gehen wir über zur Dielektrizitätskonstanten des Wassers. Wir wollen uns das Wassermolekül als ein Sauerstoffatom vorstellen, bei welchem die sonst 6 Elektronen enthaltende äußere Schale durch die beiden Wasserstoffelektronen zu einer Achterschale ergänzt worden ist, und welchem zwei Wasserstoffkerne angelagert sind. Im elektrischen Felde werden die 8 Elektronen der äußeren Sauerstoffschale[1]) gegen den Sauerstoffkern verschoben. Die beiden Wasserstoffkerne stellen sich so ein, wie es der Verschiebung des Wasserstoffelektrons gegen den Wasserstoffkern entsprechen würde. Rechnerisch lösen wir die Aufgabe, indem wir die Verschiebung von 6 Elektronen gegen den Sauerstoffkern und zweimal die Verschiebung von einem Elektron gegen einen Wasserstoffkern betrachten. Es ergeben sich folgende Daten:

	m	n	q	$Z_{\text{eff.}}$	a_n	x_{nm}	N_m	$q_m x_{nm} N_m$
O	1	2	6	3,2[2])	$0{,}665 \cdot 10^{-8}$	$0{,}092 \cdot 10^{-24}$	$3{,}38 \cdot 10^{23}$	$1{,}87 \cdot 10^{-2}$
H	2	1	1	1	$0{,}531 \cdot 10^{-8}$	$0{,}150 \cdot 10^{-24}$	$6{,}76 \cdot 10^{23}$	$1{,}01 \cdot 10^{-2}$

$$K = (1{,}87 + 1{,}01) \cdot 10^{-2} = 2{,}88 \cdot 10^{-2}$$

Für $\varepsilon = 80$ findet sich $s = 5{,}18$. M. Planck nimmt an, daß bei Flüssigkeiten infolge regelloser Änderungen in der Gruppierung der Moleküle s gleich Null gesetzt werden darf. Unser Wert 5,18 ist demnach viel zu hoch.

Wir wollen für das Wassermolekül noch einen zweiten Fall durchrechnen. Das Sauerstoffatom sei wie im ersten

---

1) Von den Elektronen der innersten Schale sehen wir ab, da sie für die Polarisation kaum in Betracht kommen.

2) Gerechnet für $q = 8$.

Falle beschaffen; dasselbe gelte auch von der Anlagerung des einen Wasserstoffkernes. Der zweite Wasserstoffkern sei weiter vom Sauerstoffatom entfernt, als es beim ersten Wasserstoffkern der Fall ist, und sei dem Radius der zweiten Wasserstoffschale entsprechend angelagert. Wir erhalten:

	m	n	q	$Z_{\text{eff.}}$	a_m	x_{nm}	N_m	$q_{nm} x_{nm} N_m$
O	1	2	6	3,2	$0{,}665 \cdot 10^{-8}$	$0{,}092 \cdot 10^{-24}$	$3{,}38 \cdot 10^{32}$	$1{,}87 \cdot 10^{-2}$
H	2	1	1	1	$0{,}531 \cdot 10^{-8}$	$0{,}150 \cdot 10^{-24}$	$3{,}38 \cdot 10^{32}$	$0{,}51 \cdot 10^{-2}$
H	3	2	1	1	$2{,}12 \cdot 10^{-8}$	$9{,}53 \cdot 10^{-24}$	$3{,}38 \cdot 10^{32}$	$32{,}20 \cdot 10^{-2}$

$$K = (1{,}87 + 0{,}51 + 32{,}20) \cdot 10^{-2} = 34{,}57 \cdot 10^{-2}$$

Für $\varepsilon = 80$ erhalten wir $s = 0{,}11$, d. i. ein Wert, welcher zwar größer als Null ist, aber welcher gegenüber $\frac{1}{9}$ als klein bezeichnet werden darf. Das nach dem zweiten Fall aufgebaute Wassermolekül läßt eine Erklärung der Dissoziation nach der Gleichung

$$H_2O = H^+ + OH^-$$

zu. Es wird nur ein Wasserstoffkern leicht abspaltbar sein, und zwar der, welcher entsprechend der zweiten Wasserstoffschale angelagert ist.

(Eingegangen 15. März 1923.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1923. № 19.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 72.

1. *Über die Druckabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von Schwefelkohlenstoff, Benzol, Hexan und Luft;*

von F. Waibel.

1. Einleitung.

Messungen über die Änderungen der Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten mit wachsendem Druck liegen im wesentlichen vor von Ortway[1]) über eine Reihe organischer Flüssigkeiten und von Falckenberg[2]) über Wasser, Äthyl- und Methylalkohol und Aceton. Die früheren Versuche von Röntgen[3]) und Ratz[4]) waren mehr qualitativer Art. Die Geringfügigkeit des Druckeinflusses erfordert zu seiner Untersuchung eine Methode mit sehr großer Empfindlichkeit, wenn man genauere Werte bekommen will. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung von Schwefelkohlenstoff, Hexan, Benzol und im Anschluß daran als Kontrolle mit Luft mit Hilfe einer hierfür ausgearbeiteten empfindlichen Resonanzmethode. Dieselbe arbeitet mit niederfrequenten Schwingungen einer Glühkathodenröhre als Generator und mit einem für diesen Zweck eigens gebauten Resonanz-Vibrationsgalvanometer als Resonanz anzeigendes Instrument. Auf die Verwendungsmöglichkeit des Vibrationsgalvanometers als sehr empfindliches frequenzmessendes Instrument besonders zur Messung sehr kleiner Kapazitäts- und Selbstinduktionsänderungen unter Verwendung zweier hochfrequenter Schwingungskreise hat schon W. Hammer[5]) in einer vorläufigen Mitteilung hingewiesen.

1) R. Ortway, Ann. d. Phys. 36. S. 1—24. 1911.
2) G. Falckenberg, Ann. d. Phys. 61. S. 145—166. 1920.
3) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 52. S. 593—603. 1894.
4) F. Ratz, Zeitschr. f. phys. Chem. 19. S. 94—111. 1896.
5) W. Hammer, S. a. Ber. d. Naturf. Ges. Freiburg/Breisg. 1920.

2. Meßanordnung. (Fig. 1.)

Bei der hier durchgeführten Methode arbeitet die Röhre direkt auf den Meßkreis. Als Schwingungserzeuger diente eine Seddig-Verstärkerröhre in der bekannten Spartransformatorenschaltung. Als Anodenspannung diente eine 72 Volt Akkumulatorenbatterie ($A\,B$), die Heizung besorgte eine 10 Volt Batterie ($H\,B$) mit entsprechendem Vorschaltwiderstand aus Manganindraht. Vor dem Gitter lag ein hoher Widerstand von 30000 Ω aus Mannit-Borsäurelösung mit parallel geschaltetem Kondensator zwecks größerer Konstanz der Frequenz. Als Schwingspule (L) diente eine Telephondrossel von etwa 70 Henry Selbstinduktion mit unterteiltem Eisenkern. $C\,f$ bedeutet den Druckkondensator zur Aufnahme der dielektrischen Flüssigkeit, $C\,m$ ein ihm dauernd parallel geschalteter Meßkondensator, der sehr fein veränderlich war, und mit dem die im Druckkondensator auftretenden Kapazitätsänderungen kompensiert und absolut gemessen wurden. Mit Hilfe der Wippe (W) konnte Druck- und Meßkondensator ausgeschaltet und dafür gleichzeitig ein Drehkondensator $C\,D$ der Spule L parallel geschaltet werden. Die eine Seite der Kondensatoren und der Spule waren dauernd geerdet. Die Spule L bildete so mit Druck- und Meßkondensator den Meßkreis, mit dem Drehkondensator verbunden dagegen einen zweiten unveränderlich bleibenden Vergleichskreis, der weiterhin als Normalkreis bezeichnet werde. Zwischen Anodenbatterie und Erdungsstelle lag das Resonanz-Vibrationsgalvanometer $V\,G$. Die Apparatur lag gut isoliert in einem geerdeten Blechgehäuse mit Ausnahme derjenigen Teile, die von sich aus schon völlig metallisch geschützt waren gegen elektrostatische Einflüsse infolge ihrer Konstruktion.

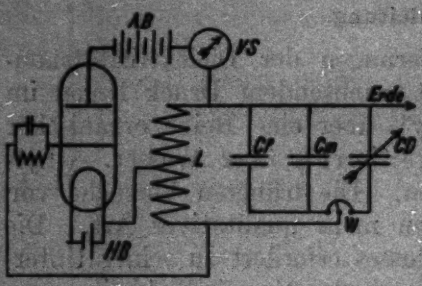


Fig. 1.

3. Druckkondensator. (Fig. 2.)

Der Druckkondensator war als Zylinderkondensator mit einigen Abänderungen nach dem in der Phys. Techn. Reichs-

anstalt als Normale dienenden Modell konstruiert.[1]) Er bestand aus drei 25 cm langen konzentrischen Messingzylindern von 1 mm Wandstärke und 2 mm freien Abstand zwischen den Wänden. Der äußere Zylinder mit 74 mm Durchmesser und innere mit 62 mm Durchmesser diente als die eine Belegung; der mittlere mit 68 mm Durchmesser als zweite Belegung. Die 3 Zylinder wurden in richtigem Abstand gehalten durch je zwei Bügel an den beiden Enden, die mit passenden Einkerbungen in die Ränder der Zylinder eingriffen. Zwischen dem inneren Bügel *Bi*, der den mittleren Zylinder faßt, und dem äußeren Bügel *Ba*, der in den inneren und äußeren Zylinder greift, lag eine genau passend zugeschliffene Porzellanscheibe *P*. Das Ganze wurde stramm zusammengehalten durch eine zentral durchführende 8 mm dicke Stange, so daß durch zwei am Ende der Stange befindliche Muttern die äußeren Bügel *Ba* fest gegen die darunter befindlichen Porzellanscheiben *P* und die unteren Bügel *Bi* und damit gegen die Zylinder in Achsenrichtung drückten. Der Hohlraum im inneren Zylinder wurde nachträglich ausgefüllt mit einem massiven Aluminiumzylinder, um möglichst wenig Ballastflüssigkeit zu haben.

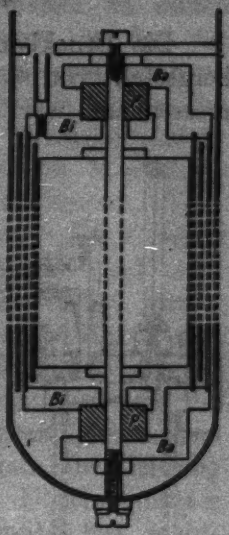


Fig. 2.

Das Ganze steckte in einem Messingzylinder mit unten angeschweißter Kupferkalotte, unten durch eine Schraube befestigt, oben verhinderten eine genau abgedrehte und aufgeschraubte Deckplatte aus Messing, ferner an der Außenwand des dritten Zylinders angelötete Keile seitliches Wackeln in der Hülle. Der äußerste Zylinder diente gleichzeitig als Behälter für die Flüssigkeit und als elektrostatischer Schutz zwecks völliger Konstanz der Kapazität. Die elektrische Zuführung erfolgte zur äußeren Belegung durch den überall metallisch anliegenden äußeren Zylinder, zur inneren Belegung, den mittleren Zylinder, durch ein auf den inneren Bügel *Bi* oben aufgelötetes Messingröhrchen mit Quecksilberfüllung. Der ganze Kondensator war

1) E. Giebe, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 29. S. 269 u. 301. 1909.

vernickelt. Durch diese Konstruktion ist eine große Stabilität und Konstanz der Kapazität erreicht, außerdem ist die Verwendung eines festen Dielektrikums zur Trennung der beiden Belegungen auf ein Mindestmaß beschränkt, so daß dessen Einfluß auf die Messungen nur eine sehr kleine Korrektion erforderten für die Berechnung der Dielektrizitätskonstanten.

4. Druckvorrichtung. (Fig. 3.)

Die Druckbombe war aus einem Stück Mannesmannrohr hergestellt von 6,5 mm Wandstärke und 8 cm innerem Durchmesser und war unten halbkugelig zugeschweißt; oben trug sie einen 2 cm dicken und 16 cm breiten Flansch mit einem darauf passenden ebenso dicken Deckel. Das innere Lumen war um ganz wenig größer als der in ihr montierte Druckkondensator. Der Deckel wurde vermittelst 8 starker Schrauben aufgeschraubt. Zum Zwecke der Abdichtung war in den Deckel eine 1 cm breite kreisförmige Rinne eingeschnitten, die mit einem Ring aus Vulkanfiber ausgelegt war und auf den stegartigen inneren Rand der Bombe drückte. Der Deckel trug 3 Durchbohrungen mit hierzu passenden Bolzen für die elektrische Zuführung, das Manometer und die Druckleitung. Der Bolzen für die elektrische Zuführung war mit einer nach oben sich konisch verengenden Bohrung versehen. In diese wurde ein passendes, dickwandiges konisches Glasrohr eingekittet, das zu beiden Seiten etwas aus dem Bolzen herausragte, unten um etwa 1 cm, um eine sichere Isolation zu erreichen. Den Hohlraum des Glaskonus füllte ein entsprechend dünner Messingkonus aus, durch Kittung darin festgehalten. Als Kitt wurde Rollermasse und Schellack angewandt. Den Messingkonus führte nach beiden Seiten ein 1,5 mm dicker

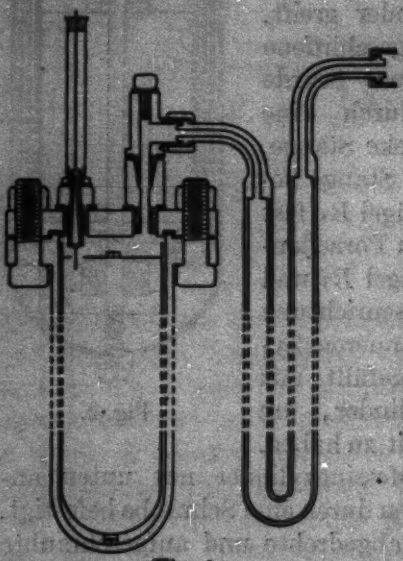


Fig. 3.

Kupferdraht fort. Das untere Ende des Drahtes führte in das mit Quecksilber gefüllte Zuleitungsröhrchen des Kondensators bei aufgesetztem Deckel, das obere Ende war etwa 14 cm lang und mit einem unten wasserdicht verschraubten Messingrohr umgeben und mit Hartgummipfropfen darin befestigt. Es erwies sich nämlich bei den Messungen als notwendig, die ganze Bombe einschließlich Deckel unter Wasser zu setzen wegen sonst auftretender Temperaturstörungen, so daß für gute Isolation der elektrischen Zuführung dementsprechend Sorge getragen werden mußte. Auf dem zweiten Bolzen des Deckels war das Manometer befestigt, ein Präzisionsmetallmanometer von Schäffer und Budenberg in Magdeburg für Drucke bis 500 kg Gewicht pro Quadratzentimeter. Dasselbe erlaubte zufolge seines langen Zeigers auf $^1/_{10}$ kg Gewicht genau bequem abzulesen. Geeicht wurde dasselbe mit einer im Institut vorhandenen Differentialdruckwage derselben Firma. Der 3. Bolzen trug ein für die Einfüllung der Flüssigkeit und die Zuleitung des Druckes abgeändertes Ventil einer Draeger-Bombe. Die Stopfvorrichtung war herausgenommen und die Bohrung erweitert. Nach Einfüllen der Flüssigkeit konnte oben die Öffnung durch eine Schraube mit Vulkan-Fiberdichtung fest verschlossen werden. Seitlich war mit Überfangmutter ein U-förmig gebogenes Stahlrohr angeschraubt mit rechtwinklig umgebogenen Enden von etwa 40 cm Schenkellänge und 14 mm lichter Weite. Dasselbe diente als Sperrohr und war nicht ganz zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt. An den etwas längeren äußeren Schenkel war ein Draegerventil befestigt, das die Verbindung herstellte mit einer großen Flasche mit Preßluft von etwa 150 Atm. Druck. Durch das Ventil konnte beliebig Luft ein- und ausgelassen und so die Flüssigkeit in der Bombe unter Druck gesetzt und entspannt werden. Der Bedarf an Druckluft ist dabei infolge des geringen Raumes über dem Quecksilber ein denkbar kleinster. Für gutes Abdichten muß dann natürlich um so mehr Sorge getragen werden.

5. Meßkondensator. (Fig. 4.)

Der Meßkondensator diente, wie schon bemerkt, zur Kompensation der durch Druckänderung im Flüssigkeitskondensator erfolgten Kapazitätsänderung. Zu diesem Zwecke mußte er sehr fein und meßbar verstellbar sein und genügende

Konstanz besitzen. Am geeignetsten erwies sich ein verschiebbarer Zylinderkondensator. Auf dem zentralen, dickwandigen Messingrohr 1 von 8 mm Außendurchmesser läßt sich ein zweites Rohr 2 von 14 mm Durchmesser in ein drittes Rohr 3 präzise hineinführen. Der innere Durchmesser von Rohr 3 ist 22 mm. Rohr 1 und 2 bilden die eine äußere variable Belegung, Rohr 3 die andere innere Belegung dieses

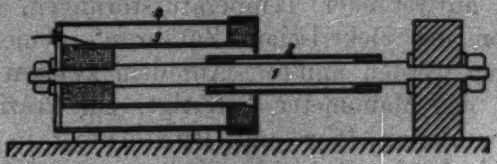


Fig. 4.

variablen Kondensators. Zylinder 3 ist umgeben von einem vierten Messingrohr 4, das als elektrostatischer Schutz für die innere Belegung und zur Befestigung von Rohr 3 dient. Dieses äußere Rohr ist am rechten Ende durch einen eingelöteten Boden und am linken durch einen aufgesteckten Deckel verschlossen, der gerade so viel ausgebohrt ist in der Mitte, daß der Zylinder 2 hindurchgeschoben werden kann. Das Rohr 3 ist durch zwei Hartgummiringe mit Rohr 4 und 1 fest verbunden und isoliert. Das zentrale Rohr 1 ist an einem Ende durch eine Schraube am Boden vom Zylinder 4, am anderen Ende an einem Holzstück befestigt. Das Ganze ist auf einem Brettstück montiert. Die Zuführung zur inneren Belegung 3 erfolgt durch einen kleinen Hartgummipfropfen im Boden vom Schutzrohr 4 hindurch. Die Größe der Verschiebung von Rohr 2 wird an einer dem herausragenden Teil der zentralen Stange entlang führenden Millimeterskala abgelesen. Die Länge des herausragenden Teils von Rohr 1, d. h. die größtmöglichste Verschiebung, ist 19,5 cm, die Länge der übrigen Rohre 21 cm. Die Kapazitätsänderung pro Zentimeter Verschiebung berechnet sich zu etwa 0,6 cm. Über die experimentelle Bestimmung der Verschiebungswerte werden weiter unten nähere Angaben gemacht.

6. Vibrationsgalvanometer. (Fig. 5 u. 6.)

Das für den vorliegenden Zweck konstruierte Vibrationsgalvanometer ist ein Nadelinstrument nach dem Typ des von Tinsley zuerst veröffentlichten Instrumentes mit magne-

tischer Direktionskraft. Abgesehen von den übrigen Konstruktionseinzelheiten unterscheidet es sich von diesen hauptsächlich durch Anwendung der elektromagnetischen Abstimmung, wie sie in dem Schering-Schmidtschen Instrument zum ersten Male zur Anwendung kam. Die Benützung eines beliebig erregbaren Elektromagneten zur Erzeugung des Richtfeldes erlaubt vom Orte des Beobachters aus eine rasche und sichere Einstellung auf Resonanz, zugleich verfügt man über einen sehr großen Frequenzbereich, besonders auch über höhere Frequenzen, wie sie hier benötigt werden. Das Galvanometer von Schering-Schmidt ist auf möglichst große Energieempfindlichkeit mit absichtlich groß gehaltener Dämpfung gebaut, während das hier benutzte Instrument auf möglichst große Resonanzempfindlichkeit, also mit möglichst geringer Dämpfung gebaut wurde. Energie stand in hinreichender Größe zur Verfügung. Versuche führten schließlich zu folgender Konstruktion. Das magnetische Richtfeld wurde erzeugt durch einen Hufeisenelektromagneten. Die Wicklung bestand aus 2 Spulen von 8 cm Länge mit je etwa 1000 Windungen eines 0,8 mm dicken emaillierten Kupferdrahtes. Die aus den Spulen herausragenden Schenkelenden waren etwas verdickt und mit einer Querbohrung von 1 cm Durchmesser versehen. In diesen lassen sich zwei Polschuhe aus Rundeisen vermittelst Schraube gegeneinander bewegen zwischen 7 und 25 mm gegenseitigem Abstand. Das Verschieben der Polschuhe ermöglicht einmal die Herstellung der verschiedensten Feldstärken und damit Frequenzen zwischen großen Bereichen und zweitens eine genaue Symmetriestellung des schwingenden Systems zwischen den beiden Polschuhen, was bei hohen Feldstärken zur Vermeidung einer einseitigen Anziehung der Nadel unbedingt notwendig war. Auf den beiden Magnetschenkeln ruht ein Aufbau aus Messing mit Brücke zur Aufnahme der

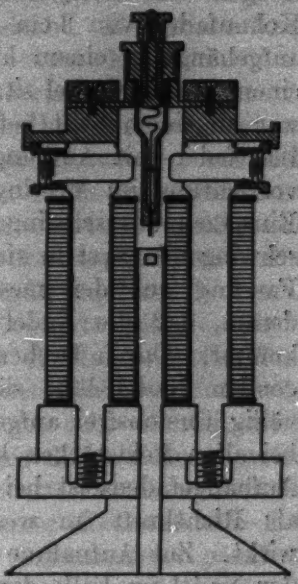


Fig. 5.

Vorrichtung, die das schwingende System enthält. Das schwingende System besteht aus einem stark unterteiltem Weicheisenplättchen. Dasselbe ist zusammengesetzt aus 14 Stück Weicheisendrähtchen von 0,2 mm Dicke und 3 mm Länge. Diese waren in 2 Lagen von je 7 Stück zu einem Plättchen mit Schellack zusammengeklebt. Mitten durch führte der Aufhängefaden, ein Quarzfaden von $^1/_{100}$ mm Dicke oder dünner Kokonfaden von 3 cm Länge. Das schwingende System war aufgehängt in einem kleinen Turm aus Hartgummi, der auf einem Messingsockel sitzt. Das eine Ende des Aufhängefadens war an einem Stift befestigt, das andere an einer Blattfeder. Blattfeder mit Aufhängefaden kann vermittelst einer Spannvorrichtung im Messingsockel beliebig gespannt werden nach Einsetzen des schwingenden Systems. Das Gehäuse für das schwingende System sitzt drehbar um die Fadenachse in einer Fassung auf der messingenen Brücke der Magnetschenkel derart, daß die Nadel genau in die Mitte des Magnetfeldes kommt. Durch Drehen des ganzen Gehäuses mit der schwingenden Nadel läßt sich erreichen, daß der Aufhängefaden völlig torsionsfrei aufgehängt ist, und die Nullage der Nadel bei allen Feldstärken konstant bleibt. Die Torsionskraft des Aufhängefadens ist bei ihrer geringen Dicke sehr klein, so daß als Richtkraft im wesentlichen nur die magnetische Kraft wirkt. Zur Aufnahme des Wechselstromes und Beeinflussung der Nadel im Falle der Resonanz des Wechselstromes mit der Eigenfrequenz der Nadel dienen zwei Spulen aus je etwa 2000 Windungen 0,1 mm dicken seidenumsponnenen Kupferdrahtes. Sie sind auf Hartgummi gewickelt und haben eine Bohrung von 1 cm Weite in der Mitte zur Durchlassung des Lichtes; sie sind 1 cm breit und haben 22 mm Durchmesser. Sie sind vor und hinter den beiden Magnetpolen aufgestellt, so daß ihre Achsen senkrecht zum Magnetfeld mitten durch die abzulenkende Nadel gehen. Sie lassen sich auf 2 Stegen unterhalb der Pole beliebig der Nadel nähern und sich von ihr entfernen. Dadurch kann man den Ausschlag der schwingenden Nadel einen beliebig passenden Betrag geben. Die zwei Stege sind auf einer Messingsäule befestigt, die unten durch das Magnetgestell führt und gleichzeitig durch eine Schraube unten das ganze Instrument auf einem eisernen Dreifuß festhält. Die Spulenenden liegen an Klemmen, die auf 2 Hart-

gummistücken auf der Messingbrücke des Magnetgestells befestigt sind, und erlauben, die Spulen nach Belieben parallel oder hintereinander zu schalten oder einzeln zu benützen zur gleichzeitigen Prüfung von zwei Wechselströmen durch Schwebungsbeobachtung.

Die parallel geschalteten Gleichstromspulen des Magneten werden gespeist durch eine Akkumulatorenbatterie von 10 Volt mit Vorschaltwiderstand aus Manganindraht. Bei Anwendung höherer Spannung und Einschalten eines Manganinwiderstandes machen sich die Widerstandsänderungen in den Stromspulen durch Erwärmen weniger bemerkbar. Auf Konstanz des Stromes mußte größte Sorgfalt gelegt werden bei den hohen Ansprüchen an die Konstanz der Frequenz, mindestens 10^{-5} genau. Zur feinen Einregulierung des Instrumentes auf die Frequenz des zu prüfenden Wechselstroms diente ein Gleitdraht aus 0,5 mm dickem Manganindraht. Derselbe besaß zwei etwa 1 cm auseinanderliegende Kontakte aus Neusilberblech, so daß bei Versagen des einen Kontaktes beim Verschieben der Strom und damit die Frequenz sich nur unwesentlich änderte. Das war für die Messungen sehr wichtig, denn wenn der Strom bei auf Resonanz eingestelltem Galvanometer für einen Moment plötzlich stark geändert oder unterbrochen wurde, wie es bei Verwendung nur einer Kontaktstelle des Gleitdrahtes leicht vorkommt, lief das Galvanometer gänzlich aus der Resonanzstellung heraus und war auch nach Behebung einer solchen nur momentanen Störung nicht wieder bei derselben Stromstärke in die alte Resonanzlage zu bringen infolge Hysteresiserscheinungen im Eisen. In diesem Falle mußte immer wieder neu einreguliert werden, ein Umstand, der natürlich die Messungen außerordentlich erschwert hätte und daher beseitigt wurde auf die angegebene Art durch Verwendung zweier Kontakte.

Die Ablesung am Galvanometer war objektiv. Die Nadel trug ein kleines Spiegelchen aus versilbertem Deckglas von 2 qmm Größe. Eine 2 Volt Taschenlampenglühbirne lieferte mit einem ausgeblendeten Stück ihres W-förmigen Glühfadens ein sehr helles und scharfes Bild auf einer feinkörnigen Mattscheibe mit 2 mm Teilung, so daß auch im hellerleuchteten Zimmer mit 50—100 cm Skalenabstand das zu einem Band ausgezogene Bild des Glühfadens beobachtet werden konnte.

Über die Schwingungseigenschaften des Instrumentes sollen noch einige Angaben gemacht werden. Provisorische Versuche wurden gemacht von den tiefsten überhaupt noch hörbaren Frequenzen bis zur Frequenz 1200. Die Druckversuche selbst bewegten sich in dem Bereiche von 500—800 Perioden. Seine volle Brauchbarkeit zeigt das Instrument jedenfalls zwischen 100 und 800 Perioden. Für die Frequenzen 500 bis 800 Perioden benötigte die Magnetwicklung einen Strom von 0,8—0,5 Amp. in jeder der beiden parallel geschalteten Spulen, für die Frequenz 1200 etwa 1 Amp. bei einem Polabstand von etwa 15 mm, das ergibt also 300—500 Amperewindungen für den Bereich 500—800 Perioden bei nur geringer Erwärmung der Wicklung und relativ großem Polabstand. Durch Erhöhung der Strombelastung auf über 2 Amp. und Annähern der Pole auf etwa 7—8 mm läßt sich der Frequenzbereich noch sehr stark nach oben erweitern. Da in dieser Arbeit derartig hohe Frequenzen nicht benötigt wurden, sind eingehende Versuche darüber nicht gemacht worden. Natürlich können bei Frequenzen von über 1000 nicht mehr die hohen Ansprüche an Resonanzempfindlichkeit und Frequenzkonstanz gemacht werden, wie sie hier verlangt wurden. Bei größerer Annäherung der Magnetpole braucht man auch mehr Energie in den Wechselstromspulen, da ein Teil der magnetischen Kraftlinien des Wechselfeldes von den Polschuhen aufgenommen wird, und dieser Betrag bei größerer Annäherung mehr und mehr wächst.

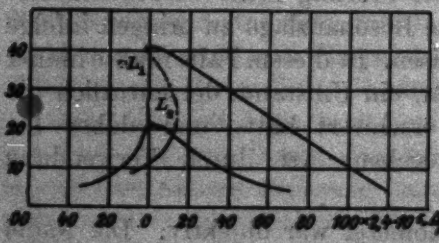


Fig. 6.

Für Frequenzen über 1000 erweisen sich kleinere Nadeln von 2 mm als sehr vorteilhaft. Resonanzkurven wurden zwischen 400 und 800 Perioden aufgenommen. Sie stimmen im wesentlichen alle miteinander überein. Das Charakteristische sollen die beiden für die Frequenz 517 pro Sekunde aufgenommenen Resonanzkurven zeigen (Fig. 6), für zwei verschieden große Resonanzamplituden unter sonst genau gleichen Bedingungen.

Die eine gibt die Resonanzkurve für einen einseitigen maximalen Ausschlag von etwa 40 Skalenteilen bei einem

Skalenabstand von 50 cm vom Spiegel. Beiden gemeinsam ist der stark asymmetrische Verlauf; die Asymmetrie wird bei der größeren Amplitude im Resonanzpunkte sogar zur Labilität. Es ergibt sich bei der Aufnahme der Resonanzkurve bei größeren Amplituden folgendes interessante Bild. Nähert man sich mit dem aufgedrückten Wechselstrom von der Seite höherer Frequenz der Resonanzlage, so wächst im mittleren Teil der Kurve die Bildverbreiterung proportional mit der Frequenzerniedrigung. Im Resonanzpunkt selbst besitzt die Kurve ein etwas breiteres abgeflachtes Stück. Erniedrigt man die Frequenz noch ein wenig weiter, so sinkt unmittelbar hinter dem Resonanzpunkt der ganze Ausschlag auf einen kleinen Betrag zusammen, von etwa 41 Skalenteilen auf 11 Skalenteile; weitere Frequenzerniedrigung bewirkt ein weiteres Sinken des Ausschlages ungefähr in dem Maße wie auf dem ansteigenden Ast der Kurve. Erhöht man aber vom Ausschlag 11 an die Frequenz wieder, so wächst der Ausschlag sehr rapide an, viel stärker als auf dem anderen Zweig der Kurve, bei einem Ausschlage von 23 Skalenteilen ist ein zweiter labiler Punkt erreicht, das Lichtband dehnt sich von selbst auseinander und nimmt eine Breite an, wie sie der Höhe der Resonanzkurve auf dem anderen Zweig entspricht bei dieser Frequenz. Und damit befindet man sich wieder auf dem anderen Zweig der Resonanzkurve. Das Stück zwischen L_1 und L_2 ist experimentell nicht zu verwirklichen. Für einen kleinen Frequenzbereich ist also der Ausschlag zweideutig; jedoch ist immer klar zu erkennen, auf welchem Ast der Kurve man sich befindet. Der Weg von dem einen Ast zum anderen führt immer über den Resonanzpunkt, auch wenn man die Frequenz plötzlich sehr stark ändert. In der zweiten Resonanzkurve für die um die Hälfte kleinere Amplitude fehlt der labile Teil vollständig, dagegen ist an dieser Stelle die Kurve sehr steil. Die Labilitätserscheinungen bei größeren Amplituden treten in ähnlicher Weise auch bei höheren und tieferen Frequenzen auf. Die Hauptursache dürfte hauptsächlich die mit der Amplitude rasch anwachsende Dämpfung und dadurch eintretende Erniedrigung der Eigenfrequenz der Nadel sein. Untersuchungen über diesen Gegenstand werden noch gemacht. Die bei der Untersuchung der Resonanzkurven notwendige Bestimmung der Frequenzänderungen geschah mit Hilfe des

Meßkondensators. Z. B. wurde bei der Aufzeichnung der beiden obigen Resonanzkurven für 169 mm Verschiebung am Meßkondensator eine Frequenzänderung von 2,10 pro Sekunde mit der C^2-Gabel durch Zählen der Schwebungen bestimmt; daraus ergibt sich für 1 mm Verschiebung eine relative Frequenzänderung

$$\frac{dn}{n} = \frac{2{,}10}{517 \cdot 169} = 2{,}4 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$$

Aus den entsprechenden Verschiebungen vom Resonanzpunkt aus nach beiden Seiten wurden für die verschiedenen Punkte der Resonanzkurve die Frequenzänderungen nach obigem Wert berechnet. Aus diesen Messungen soll nur noch hervorgehoben werden der Wert der Resonanzbreite, d. i. diejenige relative Frequenzänderung, welche die Resonanzamplitude auf die Hälfte reduziert, da sie besonders wichtig ist. Für die größere Amplitude ergab sich die Resonanzbreite zu $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ auf dem rechten Zweige der Kurve nach den höheren Frequenzen hin, auf dem linken ist sie zufolge der Labilität undefiniert. Für die kleinere Amplitude ergab sie sich auf der Seite höherer Frequenz zu $7 \cdot 10^{-4}$, auf der Seite niederer Frequenz zu $2{,}5 \cdot 10^{-4}$. Die Resonanzempfindlichkeit ist also bei kleinerer Amplitude beträchtlich größer und hier wiederum auf dem linken Ast etwa dreimal so groß als auf dem rechten Ast. Arbeitet man mit der kleinen Amplitude bei einem Skalenabstand von 1 m Entfernung und einer Resonanzamplitude von 40 Skalenteilen, so beträgt also auf dem rechten Ast die relative Frequenzänderung für 20 Skalenteile vom Resonanzpunkt aus $7 \cdot 10^{-4}$, auf dem linken Ast nur $2{,}5 \cdot 10^{-4}$. Liest man auf $^1/_{10}$ Skalenteil, also hier auf 0,2 mm genau ab, was bequem zu leisten ist, so lassen sich auf dem rechten Zweig noch relative Frequenzänderungen von $3{,}5 \cdot 10^{-6}$ und auf dem linken Kurvenzweig solche von $1{,}2 \cdot 10^{-6}$ noch gut bestimmen. Man sieht, die Resonanzempfindlichkeit des Instrumentes ist eine außerordentlich große. Die Anwendung desselben dürfte überall da von großem Nutzen sein, wo es sich um den Nachweis sehr geringer Frequenzänderungen handelt, wie bei der Messung sehr kleiner Kapazitäts- und Selbstinduktionsänderungen in elektrischen Schwingungskreisen.

7. Gang der Messungen.

Vor jeder Füllung wurde die Druckbombe mit dem Flüssigkeitskondensator luftleer gepumpt; nach Einfüllen der

Flüssigkeit wurde sie einen Tag unter Druck gesetzt, und gleichzeitig an den Druckkondensator eine Gleichspannung von 220 Volt angelegt zur Verbesserung der Isolation. Die ganze Bombe wurde bis etwa 2 cm unterhalb der Einfüllöffnung einschließlich des U-förmigen Sperr-Rohres unter Wasser gesetzt in einen mit Bleiblech ausgeschlagenen Holzbottich. Letzterer befand sich seinerseits in einer großen Kiste rings mit Werg fest umpackt und oben durch einen Holzdeckel und einer Watteschicht gut zugedeckt. So ließ sich die Temperatur innerhalb einer Meßreihe vollkommen konstant halten, wenigstens bis auf $^1/_{50}{}^0$ genau. Während der Messungen, besonders nach den Druckänderungen, wurde das Wasser öfters umgerührt.

Vor Beginn der Messungen wurden Vibrationsgalvanometer und Schwingungskreis jeweils etwa 1—2 Stunden vorher in Betrieb gesetzt, um stabile Verhältnisse zu bekommen. Während dessen brachte man Meßkreis, Normalkreis und Vibrationsgalvanometer in gegenseitige Resonanz durch Einstellen des Galvanometers auf den Meßkreis und Drehen am Drehkondensator auf die Frequenz des Meßkreises. Besaßen dann Meß- und Normalkreis bis auf etwa 1 Skalenteil Unterschied am Galvanometer dieselbe Frequenz, d. h. dieselbe Kapazität, so ging man mit dem Vibrationsgalvanometer bis auf etwa 2—3 Skalenteile unterhalb der vollen Resonanz mit dem Normalkreis heran, die Wippe wurde sofort auf den Meßkreis umgelegt und durch Verschieben des Meßkondensators auf denselben Ausschlag eingestellt. Durch wiederholtes abwechselndes Umlegen der Wippe von Normalkreis auf Meßkreis wurde dann eine Zeitlang beobachtet, ob die Kapazität beider Kreise gleichblieb, und darauf gesehen, daß der Meßkreis nach Abschalten des Normalkreises immer denselben Ausschlag am Galvanometer bewirkte, wie der Normalkreis. Hatten sich dann die Verhältnisse, insbesondere die Temperaturen an verschiedenen Orten, stabilisiert, was gewöhnlich nach etwa einer Stunde eintrat, blieb also der Meßkreis und Normalkreis dauernd sich gleich, so wurde mit den Druckmessungen begonnen. Diese Art des Einstellens unter Benützung eines zweiten Kreises, eines unveränderlichen Normalkreises, gewährt den Vorteil, daß man von einer Frequenzänderung des Galvanometers und von den in der Glühröhre während der längeren

Versuchsdauer erfolgten Veränderungen vollkommen unabhängig ist. Es wurde stets auf der weniger empfindlichen Seite der Resonanzkurve gearbeitet, einmal der größeren Stabilität halber, und zweitens, weil die beiden Schwingungskreise beim Umlegen der Wippe momentan eine höhere Frequenz besaßen, also von dieser Seite in die Resonanzlage des Galvanometers hineinschwingen. Beim Arbeiten auf diesem Zweig erfolgte also die Einstellung rascher. Dieser Umstand war schon deshalb wichtig, weil die Frequenz des Wechselstromes sich langsam, aber ganz regelmäßig von selbst erhöhte, also eine rasche Einstellung beider Kreise notwendig war.

Hatte man sich auf die oben beschriebene Art längere Zeit von der notwendigen Konstanz der Kapazität in Meß- und Normalkreis überzeugt, so wurde die Bombe unter den maximal angewandten Druck von 120—130 kg/qcm angesetzt und von hier aus rückwärts der Druck in Intervallen von 20 zu 20 kg vermindert bis auf 1 kg herab. Nach jeder Druckänderung wurde das Wasserbad wiederholt durchgerührt, und es wurde gewartet, bis sich die in der Versuchsflüssigkeit durch die Kompression bzw. Dilatation auftretenden Temperaturstörungen wieder ausgleichen konnten. Die Versuche zeigten, daß hierzu $^1/_4$ Stunde bei den Druckänderungen von 20 kg und $^1/_2$—$^3/_4$ Stunden bei der auf einmal stattfindenden Kompression von 1 kg auf 120 kg vollauf genügten. Durch die großen Metallmassen im Kondensator und der Bombe wurde die Kompressionswärme sehr rasch nach außen geleitet, zumal die Schichtdicke des Dielektrikums nirgends größer als 2 mm war, abgesehen von der etwa 1 cm tiefen Schicht unmittelbar unter dem Deckel der Bombe außerhalb des Kondensators. Dann war der Wasserwert des Dielektrikums sehr klein gegen den der Metallmassen und der Wassermenge im Bottich. Um die Temperaturänderung im Druckkondensator nicht unnötig zu steigern, und sie möglichst rasch zum Ausgleich zu bringen, wurde auch das tote Volumen im inneren Zylinder beseitigt, indem dasselbe nachträglich mit einem massiven Aluminiumzylinder aufgefüllt wurde, wie schon oben erwähnt wurde. Frühere Versuche erwiesen die Notwendigkeit dieser Maßnahme. Durch die infolge der Druckerhöhung bewirkte Veränderung der Dielektrizitätskonstanten wurde die Resonanz zwischen Meßkreis und Normalkreis gestört. Zur Kompensation

der im Druckkondensator auftretenden Kapazitätsänderung mußte der Meßkondensator jeweils dem Druck entsprechend um bestimmte Beträge verschoben werden gegenüber der Ausgangsstellung beim Druck von 1 kg. Durch die Rückkehr in die Ausgangsstellung hatte man eine Kontrolle darüber, in welchem Maße etwa während einer mehrstündigen Versuchsreihe Störungen aufgetreten waren. Die dabei beobachteten kleinen Verschiebungen des Nullpunktes wurden auf die ganze Meßreihe verteilt. Bei jedem Wert des Druckes einer einzelnen Meßreihe wurden am Galvanometer mindestens 4, bei den Endwerten 1 und 120 kg/qcm mindestens 6 Einstellungen vorgenommen. Die in den unten folgenden Tabellen angeführten Verschiebungen stellen also innerhalb einer Meßreihe das arithmetische Mittel von mindestens 4—6 Einzelbeobachtungen dar. Die Berechnung der durch Druckeinwirkung erfolgten Änderung der Dielektrizitätskonstanten geschah nach der bekannten Beziehung

$$\Delta C = \Delta \varepsilon \cdot C_0$$

wo ΔC die zunächst in Skalenteilen am Meßkondensator abgelesenen Kapazitätsänderungen im Druckkondensator und C_0 die Kapazität des mit Luft gefüllten Druckkondensators bedeutet abzüglich der Kapazität der Zuleitung durch den Deckel, d. h der Teile, in denen die Kraftlinien nach der Füllung nicht durch die Flüssigkeit gehen. Wie die Gleichung

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta C}{C_0}$$

zeigt, müssen für die Berechnung von ε die Kapazitätsänderungen ΔC und die Kapazität C_0 nicht absolut gemessen, sondern nur miteinander verglichen werden. Das geschah durch Vermittelung eines dritten Kondensators, eines Normal-Zylinderkondensators von der Bauweise des Flüssigkeitskondensators, dessen Kapazität übrigens durch Eichung in der Physik. Techn. Reichsanstalt bekannt war, nach folgenden Methoden.

8. Eichung des Meßkondensators.

Die Kapazitätsänderung für die höchstmögliche Verschiebung am Meßkondensator war aus seinen Dimensionen zu ungefähr 10 cm elektrostatischer Einheiten bekannt. Die experimentelle Bestimmung erfolgte nach einer Schwebungs-

methode. In dem Meßkreis wurde der Druckkondensator ersetzt durch einen mit Kreisteilung versehenen Drehkondensator und in den Röhrenkreis hinter das Vibrationsgalvanometer ein hochohmiges Telefon eingeschaltet. Mit Hilfe des Drehkondensators wurde einmal auf Schwebungsfreiheit mit einer G^2-Normalstimmgabel, zweitens durch Kapazitätsvermehrung um den Betrag k auf Schwebungsfreiheit mit der C^2-Normalgabel eingestellt, wobei der Meßkondensator die mittlere Stellung einnahm. Führte man nun das Schieberohr des Meßkondensators zwischen zwei festen Anschlägen an den beiden Enden der Millimeterskala hin und her, so traten nach beiden Seiten von der Mitte aus Schwebungen auf. Durch Abzählen der Schwebungen (mit Stoppuhr) in den beiden Endstellungen, die 168,8 mm auseinanderlagen, erhält man in ihrer arithmetischen Summe die Frequenzänderung für die maximale Verschiebung. Man bekommt dann entsprechend diesen drei aufeinanderfolgenden Versuchen folgende drei Beziehungen für die Bestimmung der durch die maximale Verschiebung hervorgebrachten Kapazitätsänderung ΔC:

$$\omega_1^2 \cdot L \cdot C = 1\,,$$
$$\omega_2^2 \cdot L\,(C + k) = 1\,,$$
$$(\omega_2 - \Delta\omega)^2 \cdot L\,(C + k + \Delta C) = 1\,,$$

wo ω_1, ω_2 die Kreisfrequenzen für die Frequenzen $\nu_1 = 775{,}1$ und $\nu_2 = 517{,}3$, C die Gesamtkapazität bei der Frequenz ν_1 und k die Zusatzkapazität bedeutet, welche die Frequenz von ν_1 auf ν_2 herabsetzt. Aus den beiden ersten Gleichungen läßt sich L eliminieren und das unbekannte C durch k ausdrücken:

$$C = 0{,}8082 \cdot k.$$

Dieser Wert, in die dritte Gleichung eingesetzt, ergibt die Größe ΔC für eine Verschiebung von 168,8 mm, ausgedrückt durch die Zusatzkapazität k zunächst:

$$\Delta C = 1{,}803_2 \cdot k \cdot \frac{2\nu_2 \cdot \Delta\nu - \Delta\nu^2}{(\nu_2 - \Delta\nu)^2}$$
$$= 1{,}803_2 \cdot k \cdot \frac{2\Delta\nu}{\nu^2}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\nu_2\Delta\nu - \Delta\nu^2}{(\nu_2 - \Delta\nu)^2}\right).$$

Der zweite Summand der Klammergröße stellt eine kleine Korrektionsgröße dar zufolge nicht strenger Proportionalität von ΔC und $\Delta\nu$. Er hat auch für zeitlich auseinander liegende

Versuche, bei denen die $\Delta\nu$ um 1 Proz. differieren, je nach den Betriebsbedingungen der Röhre, denselben Wert. Die Zusatzkapazität k und damit auch $\Delta\nu$ ist etwas von den Betriebsbedingungen der Röhre abhängig und hat, wie man aus der unten folgenden Tabelle ersieht, für die zu verschiedenen Zeiten ausgeführten Versuche etwas verschiedene Werte. k ergibt sich zunächst in Graden des Drehkondensators. Für unsere Zwecke hätte man nun eigentlich nur notwendig gehabt, die Kapazität des Druckkondensators durch einen einfachen Resonanzversuch mit Hilfe des Vibrationsgalvanometers ebenfalls in Gradwerten des Drehkondensators zu bestimmen unter Berücksichtigung einer etwaigen Nichtproportionalität der Teilung, dann wäre der notwendige Vergleich des Meßkondensators mit dem Druckkondensator schon durchgeführt. Mit Rücksicht jedoch auf einen weiteren Kontrollversuch, einer eventuell zeitlichen Inkonstanz des Drehkondensators und dem Umstand, daß der Druckkondensator bei wiederholtem Auseinandernehmen und Neuzusammensetzen und eventuellen Reparaturen eine Kapazitätsänderung erleiden konnte, wurde die Zusatzkapazität k sowohl wie die Kapazität des Druckkondensators durch Vergleich mit einer Kapazitätsnormale von $831{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mu F$ umgerechnet in Werten dieser Normale N. Zu diesem Zwecke wurde der Drehkondensator mit Hilfe des Vibrationsgalvanometers in verschiedenen Intervallen seiner Skala in Werten der Normale N durchgeeicht durch entsprechendes An- und Ausschalten des Normalkondensators und bzw. Rückwärts- und Vorwärtsdrehen des Drehkondensators in verschiedenen Ausgangsstellungen desselben. Zur Kontrolle des Wertes k wurde bei einer Versuchsreihe beim Übergang von der Frequenz ν_1 auf ν_2 nicht der Drehkondensator benützt, sondern die Normale selbst. Die Normale war um etwa 4° zu groß, und daher wurde der Drehkondensator nur zum Ausgleich dieses kleinen Unterschiedes herangezogen. Die Resultate waren dieselben innerhalb der Meßfehler.

Die Bestimmung der Frequenzänderung $\Delta\nu$ beim Hin- und Herschieben am Meßkondensator ging folgendermaßen von statten. Der Meßkondensator wurde ungefähr auf die Mitte seiner Skala eingestellt und hintereinander die Einstellung auf die Frequenz ν_1 und ν_2 gemacht. Darauf wurde das Schieberohr abwechselnd in die beiden Endlagen gebracht

und jeweils die Schwebungen mit der Stoppuhr gezählt. So wurden vier bis fünf Wertepaare bestimmt, dann wurde wieder zur Frequenz ν_1 zurückgegangen, von Neuem auf ν_2 eingestellt und die Schwebungsversuche wiederholt usw. Um sich von einer beobachteten langsamen, regelmäßigen Frequenzerhöhung des Schwingungskreises unabhängig zu machen, wurden bei der Berechnung von $\Delta\nu$ innerhalb jeder so erhaltenen Gruppe aus 4—5 Paaren von Schwebungszahlen je drei aufeinanderfolgende Schwebungszahlen zusammengenommen und aus der ersten und dritten, die sich auf dieselbe Lage des Meßkondensators beziehen, das arithmetische Mittel genommen. Die Summe der beiden Schwebungszahlen für die beiden Endlagen ergibt dann die richtige Frequenzänderung $\Delta\nu$ unabhängig von der spontanen langsamen Frequenzänderung. Man erhält so aus jeder Gruppe von 4—5 Paaren von Schwebungszählungen 6—8 Werte. Aus ihrem arithmetischen Mittel und dem dazu gehörigen Wert der Zusatzkapazität wurde das ΔC für die Verschiebung von 168,8 mm berechnet und als *ein* Wert in die folgende Tabelle I eingetragen. Ergaben zeitlich aufeinanderfolgende Versuchsreihen dasselbe k innerhalb der Meßfehler, so wurden die dazu beobachteten $\Delta\nu$ ebenfalls zu einem arithmetischen Mittel zusammengenommen und der Versuchswert von ΔC mit entsprechendem Gewicht belegt bei der Bildung des Mittelwertes. Die folgende Tabelle ergibt eine Übersicht über die Versuchsreihen.

Tabelle I.

Versuchsreihe	$\Delta\nu$/sec	k/N	$\frac{\Delta C \cdot 10^3}{N}$
1—3	2,221	0,917	14,29
4	2,185	0,935	14,33
5	2,196	0,930	14,29
6—10	2,216	0,9205	14,31
11—12	2,208	0,925	14,33
13—15	2,200	0,927	14,30
16—17	2,189	0,930	14,29

Als Mittel aus diesen Werten erhält man

$$\Delta C = 14{,}305 \cdot 10^{-3} \cdot N$$

für 168,8 mm Verschiebung am Meßkondensator. Daraus ergibt sich für

$$1\text{ mm}: 8{,}474 \cdot 10^{-5} \cdot N.$$

Auf einen etwaigen Kaliberfehler wurde der Meßkondensator nach der soeben beschriebenen Schwebungsmethode geprüft bei der Frequenz 651,8 der E^2-Gabel und zwar in Teilintervallen von 70 : 70 mm von 20—90, 70—140, 120—190 mm der Millimeterskala. Aus je 8 Schwebungsbestimmungen ergaben sich als Mittel der Frequenzänderungen $\Delta\nu$ für die drei Teilintervalle folgende Werte:

$$= 2{,}304 \text{ in } 20-90 \text{ mm}$$
$$2{,}295 \text{ „ } 70-140 \text{ mm}$$
$$2{,}300 \text{ „ } 120-190 \text{ mm}$$

Wie man sieht, liegen die Abweichungen der $\Delta\nu$ vom Mittelwert mit etwa 2 Promille ganz innerhalb der Meßfehler. Der Meßkondensator besitzt keinen Kaliberfehler.

9. Eichung des Druckkondensators.

Die Kapazität des Druckkondensators wurde nach zwei Methoden mit der des Normalkondensators N verglichen. Das eine Mal geschah das nach der Resonanzmethode unter Anwendung des Vibrationsgalvanometers mit Hilfe des Drehkondensators, der, wie oben beim Meßkondensator schon erwähnt, vermittelst des Normalkondensators durchgeeicht war, wobei auf nicht strenge Proportionalität der Skala geachtet war. Aus diesen Versuchen ergab sich als Mittel

$$C_{\text{Druck}} = \frac{38{,}8}{61{,}7} \cdot N = 0{,}629 \cdot N.$$

Zweitens wurde oben beschriebene Schwebungsmethode in vereinfachter Form angewandt. Die Spule des Schwingungskreises wurde in gleicher Schaltung ersetzt durch eine solche kleinerer Induktivität, so daß man durch Parallelschalten einer Kapazität von 0,03 μF eines Glimmer-Normalsatzes von Siemens & Halske sehr nahe an die Frequenz der C^2-Gabel kam. Stellt man nun mit dem parallel geschalteten Drehkondensator auf Schwebungsfreiheit mit der C^2-Gabel ein, und schaltet dann die relativ kleinen Kapazitäten des Druckkondensators und der Normale abwechselnd dazu, so entstehen Schwebungen $\Delta\nu_1$ und $\Delta\nu_2$, und es besteht die Beziehung

$$\frac{C_{\text{Druck}}}{\text{Normale}} = \frac{\Delta\nu_1}{\Delta\nu_2} \cdot \frac{1 + \frac{\frac{1}{4}\nu\,\Delta\nu_1 - \Delta\nu_1^2}{(\nu - \Delta\nu_1)^2}}{1 + \frac{\frac{1}{4}\nu\,\Delta\nu_2 - \Delta\nu_2^2}{(\nu - \Delta\nu_2)^2}}.$$

welche die Kapazität des Druckkondensators direkt mit der des Normalkondensators zu vergleichen gestattet. Der letzte Faktor auf der rechten Seite ergibt sich analog wie beim Meßkondensator als Folge der nicht strengen Proportionalität zwischen ΔC und $\Delta \nu$. Er ist nahe $= 1$ und für alle Versuche konstant. Aus $\Delta \nu_1 \approx 3{,}7$, $\Delta \nu_2 \approx 5{,}8$, $\nu = 517{,}3$ berechnet er sich zu 0,9937.

Der Schwingungskreis wurde derart eingestellt, daß vor und nach dem Zuschalten einer der beiden Kondensatoren die Schwebungszahl ungefähr dieselbe war, also vor Zuschalten die Wechselstromfrequenz ungefähr um denselben Betrag höher war als die Stimmgabelfrequenz, wie nach dem Zuschalten darunter. Die Normale wurde dann abwechselnd zu- und abgeschaltet, dann der Drehkondensator, dann wieder die Normale usw., und jeweils wurden so etwa 4—6 zusammengehörige Wertepaare der Schwebungszahlen bestimmt, und aus ihnen 6—10 Werte für die Frequenzänderungen $\Delta \nu_1$, $\Delta \nu$ berechnet nach der Methode, wie sie unter der Eichung des Meßkondensators schon beschrieben wurde. Als Mittel aus diesen Beobachtungen erhielt man:

$$C_{\text{Druck}} = 0{,}629 \cdot N$$

mit einem Fehler von $1{,}5 \cdot 10^{-3}$. Dieser Wert stimmt mit dem vorhin erhaltenen von 0,629 vollständig überein.

In dieser Größe steckt noch die Kapazität der Zuleitung durch den Deckel der Bombe und der Anteil der Isolation. Diese Werte müssen bei der Berechnung der Dielektrizitätskonstanten für die verschiedenen Drucke vom Gesamtwert subtrahiert werden, da nur diejenigen Kraftlinien in Betracht kommen, die durch die Flüssigkeit gehen. Die Kapazität der Zuleitung wurde gesondert bestimmt durch Vergleich mit der Kapazitätsänderung des Meßkondensators für eine Verschiebung von 168,8 mm, die oben bestimmt wurde. Hierzu diente wieder die Schwebungsmethode, nach der Druck- und Normalkondensator miteinander verglichen wurden. Der Deckel der Bombe wurde abgenommen, die frühere Spule mit großer Selbstinduktion wieder in den Schwingungskreis gelegt, der Siemenskondensator entfernt, und nun mit Meßkondensator und der Zuleitung durch den Deckel genau so verfahren wie vorhin mit dem Normalkondensator und dem Druckkondensator;

nur daß eben für das An- und Abschalten der Normalen das Hin- und Herschieben am Meßkondensator erfolgte. Als Mittel ergaben sich für die einzelnen Versuchsreihen die Werte

$$\frac{\text{Elektrische Zuführung}}{\text{Kapazität durch 168,8 mm Verschiebung}} = 2{,}08,\quad 2{,}06,\quad 2{,}08.$$

Berücksichtigt man den früher berechneten Wert für den Meßkondensator, so ergibt sich als Mittel

$$\begin{aligned}\text{Elektrische Zuführung} &= 2{,}07 \cdot 14{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot N \\ &= 29{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot N\end{aligned}$$

Der Kapazitätsanteil der Isolation wurde rechnerisch und experimentell zu $3 \cdot 10^{-3} N$ bestimmt. Zur experimentellen Bestimmung wurde der Druckkondensator auseinandergenommen, das eine Bügelpaar mit Porzellanscheibe und der zentralen Stange gesondert aufgebaut in ihrer ursprünglichen Anordnung im Kondensator und durch Resonanzmessung mit Hilfe des geeichten Meßkondensators und Vibrationsgalvanometers die Kapazitätsänderung ΔC bestimmt, wenn das Porzellanstück entfernt bzw. wieder in die alte Lage zurückgebracht wurde. Wenn die Dielektrizitätskonstante von Porzellan zu 6 angenommen wird, so ist ΔC ungefähr $= {}^5/_6$ des Kapazitätsanteiles des Porzellanstückes, also beträgt die Korrektion für die beiden gleichartigen Porzellanstücke des Kondensators $2 \cdot {}^6/_5 \cdot \Delta C$, was $3 \cdot 10^{-3} \cdot N$ ergab.

Bringt man die Summe beider Werte $(29{,}6 + 3) \cdot 10^{-3}) \cdot N = 32{,}6 \cdot 10^{-3} N$ als Korrektion am Gesamtwert des Druckkondensators in Abzug, so erhält man für die Berechung der Dielektrizitätskonstanten den Wert

$$\underline{C_0 = 0{,}596 \cdot N.}$$

Nach unserer früheren Gleichung

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta C}{C_0}$$

berechnet sich also die Änderung der Dielektrizitätskonstanten durch Druckerhöhung, wenn zu ihrer Kompensation eine Verschiebung des Meßkondensators um n-Millimeter notwendig ist, zu

$$\Delta \varepsilon = \frac{8{,}47 \cdot 10^{-5}}{0{,}596} = \underline{14{,}22 \cdot 10^{-5} \cdot n.}$$

Nach dieser Formel sind die $\Delta \varepsilon$ in den nachstehenden Tabellen berechnet worden.

10. Meßergebnisse.

Untersucht wurden der Reihenfolge nach Schwefelkohlenstoff, Hexan und Benzol. Chloroform wurde ebenfalls versucht, aber mangels genügender Isolation wieder aufgegeben. Die Flüssigkeiten wurden alle puriss. von Kahlbaum bezogen und sind nachträglich noch sorgfältig gereinigt worden. Nach jedem Wechsel wurde der Druckkondensator völlig auseinandergenommen und von allem Flüssigkeitsspuren gesäubert. Durch das Neuzusammensetzen änderte sich, wie Versuche zeigten, die Kapazität nicht innerhalb der Meßgrenzen. Zur Kontrolle wurden Messungen mit Luft angeschlossen, deren Resultate ebenfalls beigefügt werden sollen.

a) Schwefelkohlenstoff.

Die Tabelle II gibt eine Übersicht über die bei den einzelnen Meßreihen beobachteten Werte der Verschiebungen S am Meßkondensator in Millimeter und die daraus berechneten Werte $\Delta\,\varepsilon$.

Tabelle II.

kg/cm² Druckerhöhung	0	20	40	60	80	100	130
1.	0	27,3	54,5	80,7	107,3	131,5	—
2.	0	26,7	54,7	81,0	107,8	133,5	169,7
3.	0	26,8	53,3	80,7	108,5	132,9	170,6
4.	0	26,4	53,0	80,3	106,3	131,4	166,3
5.	0	27,1	53,4	80,6	106,8	132,3	167,1
6.	0	27,6	54,4	80,2	105,0	129,8	168,3
7.	0	27,6	53,7	80,2	106,3	131,2	169,4
8.	0	26,9	53,7	80,6	106,7	131,2	167,3
9.	0	27,5	54,2	80,7	106,4	131,1	168,3
10.	0	26,9	53,6	79,4	104,5	129,5	166,6
Mittel:	0	27,1	53,85	80,44	106,56	131,44	168,10
$\Delta\,\varepsilon \cdot 10^3$	0	3,86	7,66	11,44	15,15	18,69	23,90
$\Delta\,\varepsilon \cdot 10^3$ korr.	0	3,88	7,70	11,49	15,22	18,78	24,01

An den zunächst aus den Verschiebungen S am Meßkondensator erhaltenen Werten $\Delta\,\varepsilon$ ist noch eine Korrektion anzubringen wegen der Deformation des Kondensators durch die Druckerhöhung. Der Einfluß derselben wurde rechnerisch

ermittelt. Die Kapazität des Zylinderkondensators berechnet sich nach der Formel

$$C = \frac{l}{2 \cdot \log\text{nat} \frac{R_a}{R_i}};$$

l = Zylinderlänge, R_a, R_i = Radius der äußeren bzw. inneren Belegung. Bei der Deformation bleibt wegen der Erhaltung der Ähnlichkeit bei allseitigem Druck das Verhältnis R_a/R_i konstant. Ist K die Kompressibilität von Messing, so beträgt die relative Änderung von l bei Druckerhöhung um p kg/Gew., also auch die relative Kapazitätsänderung des Druckkondensators, $^1/_3 K \cdot p$. Die bei den Messungen beobachtete Kapazitätsänderung ΔC setzt sich daher aus folgenden beiden Teilen zusammen:

$$\Delta C = \Delta\varepsilon \cdot C_0 - \tfrac{1}{3} K \cdot p \cdot C_0 = C_0 (\Delta\varepsilon - \tfrac{1}{3} K \cdot p\,\varepsilon).$$

Daraus ergibt sich die wirkliche Erhöhung der Dielektrizitätskonstanten, die mit $\Delta\varepsilon$ korr. bezeichnet werde, zu

$$\Delta\varepsilon \text{ korr.} = \frac{\Delta C}{C_0} + \tfrac{1}{3} K \cdot \varepsilon p.$$

Beobachtet und als scheinbarer Wert für $\Delta\varepsilon$ wurde eingetragen $\Delta C/C_0$. Die beobachteten Werte sind also noch um den Betrag $^1/_3 \cdot \varepsilon K \cdot p$ zu erhöhen.

$$K = 1{,}0 \cdot 10^{-6},\ \varepsilon = 2{,}6.$$

Für die Korrektion ergibt sich folgende Tabelle:

Druckerhöhung in kg	20	40	60	80	100	130
Korrektion $\cdot 10^5$	0,02	0,04	0,05	0,07	0,09	0,11

Die Deformationskorrektion liegt nahe an der Grenze der Versuchsgenauigkeit. In der Tab. II gibt die unterste Zeile die korrigierten Werte $\Delta\varepsilon$ wieder.

Sucht man den so gefundenen Werten von $\Delta\varepsilon$ durch eine quadratische Funktion gerecht zu werden von der Gestalt

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \alpha p + \beta p^2),$$

so erhält man nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für die Konstanten α, β folgende Werte:

$$\alpha = 7{,}47 \cdot 10^{-5},\quad \beta = -\,3{,}64 \cdot 10^{-8}.$$

Für den mittleren Druckkoeffizienten γ zwischen 0 und 180 kg Druckerhöhung erhält man

$$\gamma = \frac{\Delta\,\varepsilon_{180}}{\varepsilon_0 \cdot 180} = 6{,}98 \cdot 10^{-5}.$$

$\varepsilon_0 = 2{,}644$ bei der Versuchstemperatur 13° C. Der Verlauf der ε/p-Kurve wurde nach der Tab. III in Fig. 7 eingetragen. Die Kurve weicht von der Linearität nur wenig ab. Ortway erhielt für sein erstes Druckintervall für 100 kg Druckerhöhung $\Delta\,\varepsilon = 18{,}85 \cdot 10^{-3}$ gegen meinen beobachteten Wert von 18,78. Die Abweichung beträgt etwa 4 pro Mille und liegt innerhalb der Genauigkeitsgrenze von Ortways Messungen.

Tabelle III.

Druckerhöh. in kg	20	40	60	80	100	180
$\Delta\,\varepsilon \cdot 10^3$ beob. . .	3,88	7,70	11,49	15,22	18,78	24,01
$\Delta\,\varepsilon \cdot 10^3$ ber. . . .	3,91	7,75	11,50	15,19	18,79	24,05

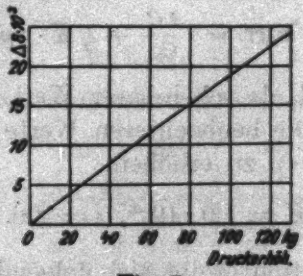


Fig. 7.

Eine Prüfung der Clausius-Mosottischen Formel war bei allen drei hier untersuchten Flüssigkeiten unmöglich, da der Kompressibilitätskoeffizient nicht genügend bekannt ist für die verschiedenen Drucke.

b) Hexan.

Die Verschiebungen und die daraus berechneten $\Delta\,\varepsilon$-Werte sind wieder in einer Tab. IV zusammengestellt. Die Deformationskorrektion wurde wie bei Schwefelkohlenstoff berechnet; über sie gibt folgende Tabelle Aufschluß.

Druckerhöhung in kg	20	40	60	80	100	120
Korrektion $\cdot 10^3$ . . .	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08

Tabelle IV.

Druckerhöhung in kg	0	20	40	60	80	100	120
1.	0	21,1	41,6	63,9	84,4	103,6	122,5
2.	0	23,1	44,4	65,4	85,0	103,7	121,3
3.	0	21,8	44,1	66,1	85,6	103,8	119,9
4.	0	23,2	44,3	65,6	85,5	104,8	124,5
5.	0	21,9	44,9	65,1	84,0	103,7	121,2
6.	0	22,1	42,9	63,6	83,5	103,3	120,7
7.	0	22,4	44,2	63,3	83,1	102,1	120,3
8.	0	21,6	42,7	63,6	83,9	102,9	120,8
9.	0	22,1	42,9	63,6	84,0	102,6	120,9
10.	0	21,3	43,3	65,3	83,4	102,1	120,0
Mittel:	0	22,1	43,5	64,5	84,2	103,3	121,2
$\Delta\,\varepsilon \cdot 10^3$	0	3,14	6,19	9,18	11,98	14,69	17,24
$\Delta\,\varepsilon \cdot 10^3$ korr.	0	3,15	6,21	9,22	12,03	14,75	17,32

Für die Darstellung der $\varepsilon - p$-Kurve durch eine quadratische Formel

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \alpha p + \beta p^2)$$

ergeben sich für α, β die Werte:

$$\alpha = 8{,}61 \cdot 10^{-5}, \quad \beta = -7{,}81 \cdot 10^{-8}.$$

Für den mittleren Druckkoeffizienten zwischen 0 und 120 kg Gewicht Druckerhöhung findet man

$$\gamma = \frac{\Delta\,\varepsilon_{120}}{\varepsilon_0 \cdot 120} = 7{,}66_5 \cdot 10^{-5}.$$

$\varepsilon_0 = 1{,}883$ bei der Versuchstemperatur 14° C. In Tab. V sind die nach der Formel berechneten Werte von $\Delta\,\varepsilon$ und die beobachteten einander gegenübergestellt. Die Fig. 8 gibt ein Bild über den Verlauf der Kurve.

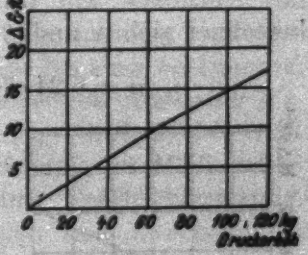


Fig. 8.

Tabelle V.

Druckerhöh. in kg	20	40	60	80	100	120
$\Delta\,\varepsilon \cdot 10^3$ beob. . .	3,15	6,21	9,22	12,03	14,75	17,32
$\Delta\,\varepsilon \cdot 10^3$ ber. . .	3,18	6,25	9,20	12,03	14,74	17,33

c) Benzol.

Tabelle VI.

Druckerhöhung in kg	0	20	40	60	80	100	120
1.	0	20,4	39,6	58,1	76,4	93,8	110,2
2.	0	19,1	38,3	57,0	75,1	92,6	109,0
3.	3	19,1	39,0	57,0	74,8	92,0	108,9
4.	0	19,2	38,3	56,5	75,1	92,3	109,0
5.	0	19,5	39,0	57,5	75,2	92,4	108,6
6.	0	18,6	38,3	56,6	74,8	91,6	107,5
7.	0	19,4	38,6	57,3	75,3	92,5	108,5
8.	0	19,6	38,8	57,2	75,0	91,8	107,9
9.	0	19,8	39,2	57,1	75,8	93,2	110,0
10.	0	19,4	38,6	57,4	75,4	92,3	108,6
Mittel:	0	19,4	38,8	57,1	75,3	92,45	108,8
$\Delta\,\varepsilon \cdot 10^3$	0	2,75	5,51	8,12	10,71	13,15	15,48
$\Delta\,\varepsilon \cdot 10^3$ korr.	0	2,77	5,54	8,17	10,77	13,23	15,57

Für die Deformationskorrektion erhält man nachstehende Werte:

Druckerhöhung in kg	20	40	60	80	100	120
Korrektion $\cdot 10^3$ . . .	0,02	0,03	0,05	0,06	0,08	0,09

Bei Bildung des quadratischen Ausdruckes

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \alpha p + \beta p^2)$$

berechnet sich α und β zu:

$$\alpha = 6{,}24 \cdot 10^{-5}, \quad \beta = -0{,}468 \cdot 10^{-7}.$$

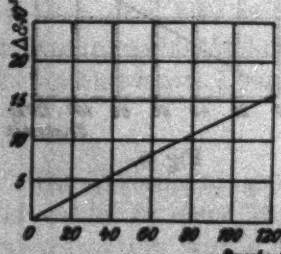


Fig. 9.

Für den mittleren Druckkoeffizienten γ zwischen 0 und 120 kg Gewicht erhält man

$$\gamma = \frac{\Delta\,\varepsilon_{120}}{\varepsilon_0 \cdot 120} = 5{,}66_5 \cdot 10^{-5}.$$

$\varepsilon_0 = 2{,}291$ bei 14,8° C Versuchstemperatur.

Mit den berechneten Werten α und β erhält man Tab. VII, die der Fig. 9 zugrunde liegt.

Tabelle VII.

Druckerhöh. in kg	0	20	40	60	80	100	120
$\Delta\varepsilon \cdot 10^3$ beob.	0	2,77	5,54	8,17	10,77	13,23	15,57
$\Delta\varepsilon \cdot 10^3$ ber.	0	2,81	5,54	8,19	10,75	13,22	15,61

Ortway erhielt für 100 kg Druckerhöhung $\Delta\varepsilon = 13{,}45 \cdot 10^{-3}$ gegen 13,22 meiner Messungen. Der Wert Ortways liegt um 1,7 Proz. höher, eine Abweichung, die an der Genauigkeitsgrenze der Ortwayschen Messungen liegt.

d) Luft.

Der Anschluß der Messungen mit den Flüssigkeiten an solche mit Luft empfiehlt sich aus folgenden Gründen. Einmal wird dadurch eine Nachprüfung der ganzen Apparatur möglich, die etwaige systematische Fehler, verursacht durch Konstruktionsfehler des Druckkondensators, falsche Eichung des Druck- und Meßkondensators, durch Fehler der Druckbestimmung und dergleichen leicht aufdecken würde. Dann aber werden die Beobachtungen mit Flüssigkeiten dadurch zu Vergleichsmessungen; setzt man die Druckabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten der Luft als bekannt voraus, so entfällt damit die Aufgabe der Eichung des Meßkondensators und des Druckkondensators sowie der Bestimmung des Anteils der Isolation und elektrischen Zuführung an der Kapazität des Druckkondensators. Es fällt also die Kenntnis von 4 Größen weg, deren experimentelle Bestimmung teilweise eine erhebliche Genauigkeit erfordert. Die bei einer bestimmten Druckerhöhung P in der Flüssigkeit auftretende Änderung $\Delta\varepsilon_p$ ist dann einfach gleich der Änderung $\Delta\varepsilon_{p_0}$ für Luft bei einer Druckerhöhung p_0, die dieselbe Verschiebung am Meßkondensator erfordert. Auf diesen Vorteil einer Vergleichsmessung, die vielleicht für weitere Beobachtungen sehr zweckdienlich ist, mußte hier allerdings verzichtet werden, weil die Druckabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten der Luft nicht sicher genug festgestellt war. Es liegen zwar über diesen Gegenstand im wesentlichen zwei Arbeiten vor, die eine von Tangl[1]), die andere von Occhialni-Bodaren.[2]) Ihre Ver-

1) K. Tangl, Ann. d. Phys. **26**. S. 59. 1908.
2) A. Occhialni u. E. Bodaren, Ann. d. Phys. **42**. S. 67. 1913.

suchsergebnisse weichen aber um gut 1,5 Proz. voneinder ab, so daß es mir der Mühe wert schien, die Druckabhängigkeit von ε für Luft mit genau derselben Meßanordnung, wie sie für die Flüssigkeiten benützt wurde, neu zu bestimmen. Ein Vergleich mit den Messungen von Tangl und von Occhialni-Bodaren ergibt dann sowohl weiteren Aufschluß über die Druckabhängigkeit von ε als auch ein Urteil über die Richtigkeit der Versuchsergebnisse bezüglich der Flüssigkeiten. Die angestellten Beobachtungen erstrecken sich auf Druckerhöhungen bis zu 40 kg Gewicht in Intervallen von 10 zu 10 kg. Die benützte Luft wurde einer Druckflasche entnommen, die zu $^2/_3$ mit Chlorcalcium und Natronkalk angefüllt war. Sie lagerte in derselben mindestens 2 Stunden lang, bei manchen Versuchen sogar 12 Stunden, ehe sie in die Druckbombe mit dem Kondensator eingeleitet wurde. Sie kann daher als genügend wasser- und kohlensäurefrei angesehen werden. Um den Einfluß eines etwaigen Wassergehaltes zu prüfen, wurden auch Versuche angestellt, bei denen die mit Chlorcalcium und Natronkalk gefüllte Preßluftflasche kurze Zeit vor und während des Überleitens der Luft in einem Gemisch von fester Kohlensäure und Äther stand, so daß also die Luft quantitativ von Wasser befreit war. Die Meßergebnisse waren dieselben wie nach der ersten Trocknungsweise. Die Deformationskorrektion berechnet sich bei 40 kg Druckerhöhung zu $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ und ist nicht mehr zu berücksichtigen. Die Resultate sind in Tab. VIII zusammengestellt.

Tabelle VIII.

Druckerhöh. in kg	0	10	20	30	40
1.	0	38,1	76,0	115,1	154,2
2.	0	37,3	75,4	114,7	153,1
3.	0	37,8	76,3	115,3	154,4
4.	0	37,6	75,8	115,5	154,5
5.	0	37,7	75,8	115,0	154,2
6.	0	37,8	76,3	115,5	154,7
7.	0	38,0	76,7	115,0	155,0
8.	0	37,1	75,4	115,0	153,1
9.	0	37,5	76,2	115,9	153,5
10.	0	37,7	76,0	115,3	154,0
Mittel:	0	37,7	76,0	115,2	154,1
$\Delta\,\varepsilon \cdot 10^3$	0	5,36	10,80	16,38	21,91

Mit den so beobachteten Werten für $\Delta\,\varepsilon$ wurde in die Berechnung des Ausdrucks $\varepsilon - 1/d$ und der Clausius-Mossottischen Größe $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d}$ eingegangen.

Tabelle IX.

Druck in kg	Dichte	ε	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d}\cdot 10^7$	$\frac{\varepsilon-1}{d}\cdot 10^6$
11	10,17	1,00594	1943	584
21	19,48	1,01138	1940	584
31	28,85	1,01696	1952	589
41	38,25	1,02249	1945	588

Die den Meßdrucken 11, 21, 31, 41 kg Gewicht bei einer Temperatur von 14° C entsprechenden Dichten d bezogen auf 0° und Atmosphärendruck wurden nach den Beobachtungen von Holborn und Schultze[1]) und L. Holborn und J. Otto[2]) berechnet, wobei für den Ausdehnungskoeffizienten der Luft die Angaben derselben Forscher für Sauerstoff und Stickstoff zugrunde gelegt wurden. Wie man sieht, besitzt der Clausius-Mossottische Ausdruck eine erhebliche Konstanz und zeigt keinerlei Gang. Dagegen wächst $\varepsilon - 1/d$ mit zunehmender Dichte. Nimmt man für die Clausius-Mossottische Konstante das arithmetische Mittel und bewertet dabei die Beobachtungen bei den Drucken 11, 21, 31, 41 kg Gewicht entsprechend ihrer relativen Genauigkeit bzw. 1, 2, 3, 4fach, so erhält man:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d} = 1946\cdot 10^{-7}.$$

Die maximale Abweichung beträgt 3 Promille. Berechnet man mit diesem Wert die Dielektrizitätskonstante für die Dichte 1 (0° C, 1 Atmosphäre), so erhält man

$$\varepsilon_1 = 1{,}000584$$

in Übereinstimmung mit dem aus dem Ausdruck $\varepsilon - 1/d$ hervorgehenden Wert für die beiden ersten Druckintervalle.

1) L. Holborn u. H. Schultze, Ann. d. Phys. 47. S. 1089. 1915.
2) L. Holborn u. J. Otto, Zeitschr. f. Phys. 10. S. 367. 1922.

Occhialni-Bodaren erhielten nach einer elektrometrischen Methode für

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{d}$$

den Wert 1950 mit einer maximalen Abweichung von 5 pro Mille in dem Druckbereich von 1—350 Atm. Daraus berechnen sie durch Extrapolation die Dielektrizitätskonstante bei 0° und 1 Atm. zu 1,000585 in vollkommener Übereinstimmung mit meinen Messungen. Sie haben dabei die Dichten direkt bestimmt nach dem umgekehrten Mac Leod-Prinzip. Übereinstimmend mit den obigen Werten sind auch die Beobachtungen von Klemenčič mit 1,000586 für $d = 1$. Dagegen erhielten Boltzmann den Wert 1,000590 und Tangl durch Extrapolation aus Druckversuchen bis zu 100 Atm. den Wert 1,000576. Die Messungen Tangls sind nach der Nernst-Philipschen Differentialmethode ausgeführt, die auch Ortway für seine Flüssigkeitsversuche benützte. Sie zeigen einen Gang des Clausius-Mossottischen Ausdruckes von $1926 \cdot 10^{-7}$ bei 1 Atm. bis 1898 bei 100 Atm. Tangls Wert 1,000576 ist auch nicht nach der Clausius-Mossottischen Formel berechnet, sondern aus der Zahlenreihe der $\varepsilon - 1/d$ extrapoliert. Die von ihm benützten Werte für die Dichten d stimmen mit den Holborn-Schultzeschen Messungen, die bei meinen Beobachtungen benützt wurden, ziemlich gut überein — bei 80 und 100 Atm. sogar bis auf $^1/_2$ Promille —, so daß die Diskrepanz nicht etwa auf falsche Werte für die Dichten zurückgeführt werden könnte.

Auf einen Umstand soll in diesem Zusammenhang noch hingewiesen werden. Nimmt man etwa auf Grund meiner eigenen Messungen und deren von Occhialni-Bodaren die Gültigkeit der Konstanz des Clausius-Mossottischen Ausdruckes als experimentell erwiesen an, so läßt sich umgekehrt aus der gemessenen Dielektrizitätskonstante der Luft ihre Dichte bestimmen bzw. ihr Druck mit einer Genauigkeit, die vermittelst der hier durchgeführten Methode bei einem Druck von 300 Atm. schon von der Größenordnung 10^{-4} ist, wo anderweitige Methoden der Druckmessung von dieser Genauigkeit schon Schwierigkeiten machen oder kostspielige Apparaturen erfordern. Unter dieser Voraussetzung ließen sich z. B. auch ganz unabhängig vom absoluten Wert der Clausius-

Mossottischen Konstanten die Amagatschen pv/p-Kurven für die Isothermen konstruieren mit demselben Maß der Genauigkeit der aufzunehmenden $pv/p_0 v_0$-Werte. Daß der Wert der Clausius-Mossottischen Konstanten ein empfindliches Reagens auf die Abweichungen vom Boyleschen Gesetz ist, zeigt die Berechnung derselben auf Grund der Amagatschen, Kochschen[1]) und Regnaultschen Beobachtungen. Die Amagatschen $pv/p_0 v_0$-Werte bei der Temperatur von 14° sind in dem hier vorkommenden Druckintervall etwa 1 Promille kleiner als die von Holborn-Schultze und ergeben deshalb für den Clausius-Mossottischen Ausdruck den Wert 1944. Die Ergebnisse Kochs liegen um 3,5 Promille tiefer und liefern für jenen den Wert 1943, während die Regnaultschen Messungen einen um 6—7 Promille kleineren Wert mit 1933 ergeben. Diesen drei verschiedenen Werten für den Clausius-Mossottischen Ausdruck entsprechen die Werte 583, 582, 580 für die auf die Dichte 1 extrapolierte Größe $(\varepsilon - 1) \cdot 10^6$ gegen 584 auf Grund der Beobachtungen von Holborn-Schultze. Die Messungen von Holborn-Schultze sind sicher die bis jetzt genauesten, mit der Stückrathschen Druckwaage durchgeführten Untersuchungen über die Abweichungen vom Boyleschen Gesetz, weshalb sie hier auch der Berechnung für die Dichten zugrunde gelegt wurden. Ihre Fehler machen sich bei der Berechnung des Clausius-Mossottischen Ausdruckes nicht mehr bemerkbar.

11. Zusammenfassung.

1. Es wurde die Druckabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von Schwefelkohlenstoff, Hexan und Benzol zwischen 1 und 120 kg bzw. 130 kg Gew./qcm Druck untersucht. Für alle drei Flüssigkeiten ergibt sich ein schwach ausgeprägter quadratischer Verlauf der Druckabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten. Als Kontrolle wurden Messungen mit Luft angeschlossen, zwischen 1 und 40 kg Gew.-Druck; dieselben ergaben die Konstanz des Clausius-Mossottischen Ausdruckes.

2. Hierzu wurde eine Resonanzmethode ausgearbeitet mit Anwendung einer Elektronenröhre als Schwingungserzeuger

1) P. P. Koch, Ann. d. Phys. 27. S. 311. 1908.

und eines Vibrationsgalvanometers als Resonanz anzeigendes Instrument.

3. Das für diesen Zweck neu konstruierte Resonanz-Vibrationsgalvanometer ist ein Nadelinstrument mit elektromagnetischer Einstellung. Seine Eigenschaften sind untersucht worden in dem bei den Messungen benützten Frequenzbereich von 400—800 Perioden pro Sek. Seine Resonanzempfindlichkeit ist eine außerordentlich große; bei 1 m Skalenabstand und $^1/_5$ mm Ablesegenauigkeit läßt sich noch eine relative Frequenzänderung von $1{,}2 \cdot 10^{-6}$ nachweisen. Seine Brauchbarkeit ist erwiesen worden bis zu den tiefsten hörbaren Tönen und nach oben hin bis 1200 pro Sek. Interessant ist die Labilität auf einem Zweige der Resonanzkurve bei großen Amplituden.

4. Eine einfache und genaue Schwebungsmethode wird angegeben und ist benützt worden, um eine kleine Kapazität mit einer etwa 100mal größeren und umgekehrt zu vergleichen.

Vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Freiburg/Brsg. ausgeführt. Für die Anregung dazu, das stets gezeigte Interesse und die reichlich zur Verfügung gestellten Mittel spreche ich auch an dieser Stelle Hrn. Geh. Rat Himstedt meinen wärmsten Dank aus. Ferner bin ich der Freiburger Wissenschaftlichen Gesellschaft zu Dank verpflichtet für hierzu bereitgestellte Mittel.

(Eingegangen 18. Februar 1923.)

2. *Schallgeschwindigkeit in Stickstofftetroxyd. Eine untere Grenze seiner Dissoziationsgeschwindigkeit;* von E. Grüneisen und E. Goens.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. *Einleitung.* — Daß man aus einer Veränderung der Schallgeschwindigkeit mit der Frequenz in einem teilweise dissoziierten Gase einen Schluß ziehen kann auf die Geschwindigkeit der Einstellung des Dissoziationsgleichgewichts, ist zuerst von Nernst und Keutel[1]) bemerkt worden. Einstein[2]) hat dann Formeln entwickelt, welche gestatten, aus dem Gange der Schallgeschwindigkeit mit der Frequenz die Geschwindigkeitskonstante der Dissoziation zu berechnen. Danach hat man folgendes zu erwarten. Nennen wir das Frequenzgebiet, in dem die Schwingungsdauer der Schallwellen von gleicher Größenordnung ist, wie die Dauer der Einstellung des Dissoziationsgleichgewichts, das *kritische* Frequenzgebiet, so wird man außerhalb des kritischen Gebiets praktisch konstante Schallgeschwindigkeiten haben, und zwar unterhalb des kritischen Gebiets eine kleinere Schallgeschwindigkeit als oberhalb. Bei niederen Frequenzen nämlich tritt in jedem Zeit- und Volumenelement praktisch unendlich schnell das Dissoziationsgleichgewicht ein, welches den augenblicklichen Werten von Temperatur und Druck im periodisch adiabatisch komprimierten und dilatierten Gase entspricht. Ist andererseits die Frequenz sehr hoch, so kann die Dissoziation den raschen Schwankungen von Temperatur und Druck nicht folgen, das Gas verhält sich wie ein nicht reagierendes Gemisch aus dissoziierten und undissoziierten Molekülen. Da mit wachsendem Druck die Dissoziation abnimmt, so muß die zu einer gegebenen Druckerhöhung gehörige Dichtezunahme im ersten

1) F. Keutel, Inaug.-Diss. Berlin 1910.

2) A. Einstein, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1920. S. 380.

Falle größer, die Schallgeschwindigkeit also kleiner sein, als im zweiten Falle. In dem kritischen Gebiet selbst wird die Schallgeschwindigkeit von dem niedrigen zum höheren Grenzwert ansteigen müssen. Gelingt es nicht, im kritischen Gebiet zu beobachten, so kann man dennoch durch Vergleich der beobachteten Schallgeschwindigkeit mit den berechneten Grenzwerten feststellen, ob man oberhalb oder unterhalb des kritischen Gebiets geblieben ist.

Beobachtungen liegen bisher nur an N_2O_4 vor und zwar von E. und L. Natanson[1]), F. Keutel, L. Argo[2]) und H. Selle.[3]) Die erstgenannten Beobachter haben die Schallgeschwindigkeit nur bei *einer* Frequenz gemessen, wenn auch bei verschiedenen Drucken. Selle hat mehrere Frequenzen zwischen $n = 1700$ und $3700\,\mathrm{sec}^{-1}$ benutzt und hat außerdem den unteren Grenzwert nach der Methode von Clément und Desormes bestimmt.

Keutel und Selle glauben aus ihren Versuchen schließen zu müssen, daß sie sich innerhalb des kritischen Bereichs befunden haben. Selle gibt daher auch Schätzungen der Dissoziationsgeschwindigkeit, Argo hingegen schließt aus den Natansonschen und seinen eigenen Messungen (n bis zu 6500), daß das kritische Gebiet bei höheren Frequenzen liegt.[4])

Die Beobachtungen, auf die sich diese gegensätzlichen Folgerungen stützen, sind zum Teil recht unsicher. Die später mitgeteilte Zusammenstellung der Messungen aller Beobachter beweist, daß die unter gleichen Bedingungen von Druck und Temperatur für N_2O_4 gefundenen Schallgeschwindigkeiten sich um 1—2 Proz. unterscheiden. Nun liegen die beiden Grenzwerte der Schallgeschwindigkeit nach der Theorie nur um etwa 8 Proz. auseinander. Daher kann ein Beobachtungsfehler von wenigen Prozent, der den Schallgeschwindigkeitswert zwischen die beiden Grenzwerte verlegt, bereits zu der Annahme verleiten, man befinde sich innerhalb des kritischen Frequenzgebietes.

---

1) E. u. L. Natanson, Wied. Ann. 24. S. 454. 1885; 27. S. 606. 1886.

2) W. L. Argo, Journ. of Phys. Chem. 18. S. 438. 1914.

3) H. Selle, Zeitschr. f. physik. Chem. 104. S. 1. 1923.

4) Allerdings sind die theoretischen Ableitungen Argos nicht einwandfrei, seine Schlußformel ist unrichtig.

Es erschien daher notwendig, einer Anregung Hrn. Einsteins folgend, die Messungen in möglichst einwandfreier Weise zu wiederholen. Wir bedienten uns dazu der Thiesenschen Methode[1]) des geschlossenen Zylinderresonators, die es gestattet, die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Frequenz zu messen, ohne daß an der Anordnung etwas geändert zu werden braucht. In einer bereits veröffentlichten Untersuchung[2]) ist diese Methode kritisch untersucht worden. Es zeigte sich, daß die Schallöffnungen in den Endflächen des Rohres eine nicht unbeträchtliche Erhöhung des Grundtones und der ersten Obertöne eines langen, zylindrischen Resonators bewirken, daß diese Wirkung aber erstens bei den Obertönen höherer Ordnungszahl, auf die es hier wesentlich ankommt, praktisch verschwindet, zweitens weitgehend eliminiert wird, wenn man die relative Schallgeschwindigkeit gegen Luft für verschiedene Ordnungszahlen oder Wellenlängen berechnet.

Die früher für Luft und Wasserstoff gebrauchte Versuchsanordnung haben wir soweit als möglich beibehalten. Wegen der Schallerzeugung und Frequenzmessung[3]) sei deshalb auf die früheren Mitteilungen verwiesen. Besonders hervorzuheben ist, daß die Resonanzmaxima wieder nach Gehör eingestellt wurden. Es war daher nicht möglich, Frequenzen jenseits der oberen Hörgrenze, die bei einem von uns bei etwa 16000 sec^{-1} lag, zu benutzen. Nun zeigte sich bei einem Gasdruck des N_2O_4 von 1 Atm. und bei 15000 Schwingungen noch keine Andeutung einer Schallgeschwindigkeitsänderung, so daß die Lage des kritischen Gebiets bei höheren Frequenzen zu suchen war. Versuche, hier objektiv zu beobachten, führten zu keinem Ergebnis. Es blieb aber der Ausweg, die Geschwindigkeit der Gleichgewichtseinstellung des Gases durch Erniedrigung von Druck und Temperatur zu verringern und dadurch womöglich das kritische Frequenzgebiet unter die Hörgrenze zu verlegen. Leider ist gerade für Beobachtung bei Unterdruck die Thiesensche Methode weniger geeignet, weil die dünnen Membranen, welche das Schallrohr gegen Schallquelle und Ohr abschließen, bei einseitigem Druck an Durchlässigkeit stark

1) M. Thiesen, Ann. d. Phys. 24. S. 401. 1907; 25. S. 506. 1908.

2) E. Grüneisen u. E. Merkel, Ann. d. Phys. 66. S. 344. 1921; im folgenden mit a. a. O. bezeichnet.

3) E. Grüneisen u. E. Merkel, Zeitschr. f. Phys. 2. S. 277. 1920.

einbüßen[1]) und Eigentöne bekommen, die man leicht mit den Resonanztönen des Rohres verwechseln kann. Dieser Übelstand konnte teilweise dadurch behoben werden, daß der Vorraum des Schallrohres mit dem als Schallquelle dienenden Telephon auf den gleichen Druck gebracht wurde wie der Resonanzraum. An der Abhörseite blieb jedoch der äußere Atmosphärendruck bestehen und so kam es, daß mit abnehmendem Druck des N_2O_4 die Beobachtung zunehmend unsicherer und der beobachtbare Frequenzbereich kleiner wurde. Das kritische Frequenzgebiet war auch bei diesen Versuchen nicht zu erreichen und es konnte nur eine untere Grenze für die Dissoziationsgeschwindigkeit angegeben werden.

2. *Die Schallrohre.* — Die Schallrohre nebst Vorräumen (Fig. 1 a u. b) waren den früher beschriebenen nachgebildet, mußten aber wegen der starken chemischen Wirkung des

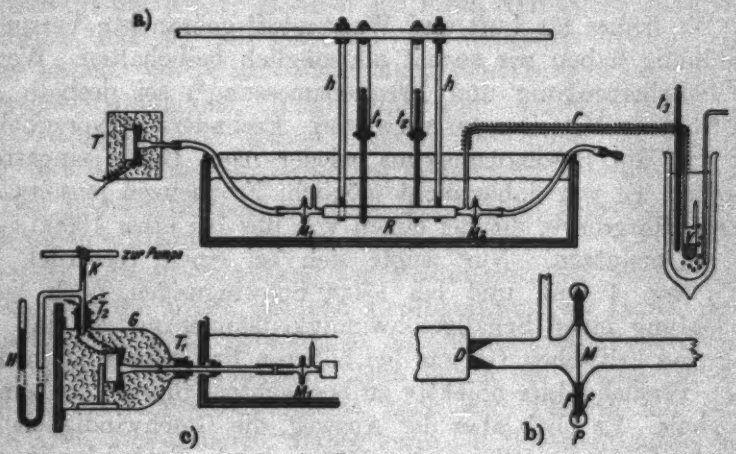


Fig. 1.

N_2O_4 auf Metalle ganz aus Glas geblasen werden.[2]) Diese Art der Herstellung brachte es mit sich, daß die zylindrische Form der Rohre und die Ebenheit ihrer Abschlußflächen unvollkommen waren. Für den vorliegenden Zweck entstanden hieraus jedoch, wie die Versuche lehrten, keine Nachteile. Wir benutzten zwei Rohre von folgenden Abmessungen:

1) Vgl. M. Thiesen, a. a. O. S. 507. 1908.
2) Hr. Burger hat diese Aufgabe mit gewohntem Geschick gelöst.

Rohr	*G* II	*G* III
Länge in mm	701,5	248,9
Durchmesser in mm . .	38,85	17,56

Die Schallöffnungen *D* in den Endflächen (Fig. 1 b) hatten etwa 1,1 und 0,85 mm Durchmesser. Die Rohrlängen waren wegen der Unebenheit der Endflächen schlecht definiert. Sie konnten als lichte Abstände der Schallöffnungen durch Visieren gegen einen Maßstab nur mit mäßiger Genauigkeit bestimmt werden. Der Durchmesser von *G* II wurde nach Beendigung der Versuche an dem geöffneten Rohr gemessen, der von *G* III durch Volum- und Höhenmessung eingefüllter Wassermengen.

Die Durchmesser der Rohre waren so gewählt, daß das unharmonische Nebenspektrum (vgl. hierüber Abschn. 9), welches sich für Schallgeschwindigkeits-Messungen nicht nur wenig eignet, sondern auch die Beobachtung des harmonischen Spektrums empfindlich stört, beim Rohr *G* II erst zwischen dem 44. und 45., bei *G* III zwischen dem 34. und 35. harmonischen Eigenton einsetzte. Dem entsprechen in *G* II etwa die Schwingungszahlen 11000 sec^{-1} für Luft und 5800 sec^{-1} für N_2O_4, in *G* III die Schwingungszahlen 24000 sec^{-1} in Luft (also weit oberhalb der Hörgrenze) und 12800 sec^{-1} für N_2O_4. Da die letztgenannte Frequenz noch unterhalb unserer Hörgrenze liegt, es andererseits aber wünschenswert war, die Beobachtung bis zu möglichst hohen Frequenzen durchzuführen, so wurde bei einigen Versuchen mit N_2O_4-Füllung in *G* III noch der hörbare Teil des Nebenspektrums bis etwa 16000 sec^{-1} verwertet. Durch Vergleich der beobachteten mit den theoretisch berechneten unharmonischen Eigentönen ließ sich auch für diesen Frequenzbereich ein Urteil über die Konstanz der Schallgeschwindigkeit gewinnen.

8. *Versuchsanordnung für Atmosphärendruck.* — Die Versuchsanordnung ist in Fig. 1 a dargestellt. Das Schallrohr *R* ist bei M_1 und M_2 mit Glimmermembranen von 1—2 hundertstel Millimeter Dicke verschlossen. Recht fühlbar machte sich hierbei der Mangel eines festen und von N_2O_4 nicht angreifbaren Kittes zum Befestigen der Membranen. Von den untersuchten Stoffen zeigte sich allein hochschmelzendes Paraffin als hinreichend, doch kostete es einige Mühe, hiermit haltbare

und genügend vakuumdichte Kittungen herzustellen. Die Einzelheiten zeigt Fig. 1b, die einen der gläsernen Membranansätze darstellt. Die Flanschen f, in die die trompetenartigen Erweiterungen der Rohransätze auslaufen, waren matt und eben geschliffen und etwa 8 mm breit. Die Membran M wurde in erwärmtem Zustande zwischen die reichlich mit geschmolzenem Paraffin benetzten Flanschen gebracht. Hierbei bildeten sich in den einspringenden Winkeln zwischen Membran und Glas infolge der Kapillarwirkung Paraffinringe, die zu einer guten Abdichtung beitrugen. Der innere freie Durchmesser der Membran betrug bei G II 2—3 cm, bei G III etwa 2 cm. Endlich wurden noch zwecks besserer Dichtung die Ränder von Flanschen und Membran durch Eintauchen in die Schmelze mit einem Paraffinwulst P umgeben. Zur Entlastung der Kittung dienten Messingarmaturen (nicht gezeichnet), welche die mit Gummiringen belegten Flanschen leicht zusammenpreßten. Durch M_1 wurde die Schallenergie von dem in Watte verpackten Telephon T mittels Trichters und Schlauchs dem Rohre zugeführt, durch M_2 wurden die entstehenden Resonanzen mittels eines zweiten Schlauchs abgehört. Das Rohr war mittels zweier Halter h an einem eisernen Wandarm befestigt und tauchte in ein Wasserbad, welches unter ständigem Rühren elektrisch (durch Kohlefadenglühlampen) geheizt oder durch häufiges Zugießen kalten Wassers gekühlt werden konnte. (Heiz- und Rührvorrichtung sind nicht gezeichnet.) Nur während des Abhörens der Resonanztöne selbst standen die elektrisch betriebenen Turbinenrührer kurze Zeit still. Die Badtemperatur wurde an zwei Thermometern t_1 und t_2 (Teilung in $^1/_{10}$ Grad) ständig kontrolliert und nach Bedarf abgelesen.

Um Druck und Temperatur des Stickstofftetroxyds im Schallrohr unabhängig voneinander regulieren zu können, stand das Schallrohr durch den Kanal r mit einem Vorrat von flüssigem N_2O_4 im Behälter V in Verbindung, der durch ein Wasserbad (Dewargefäß) auf konstanter Temperatur gehalten wurde. Zur Regulierung der Badtemperatur, die an dem Thermometer t_3 abgelesen werden konnte, diente nötigenfalls ein kleiner auf Glimmer gewickelter (nicht abgebildeter) Heizwiderstand. Gerührt wurde mit Hilfe eines langsam durch das Wasser hindurchperlenden Luftstromes aus einer Stahlflasche.

Sorgt man dafür, daß das Schallrohr und die außerhalb des Bades befindlichen Rohrteile, die deshalb eine besondere Heizwicklung besitzen, höher temperiert sind als das flüssige N_2O_4, so herrscht im Schallrohr stets der zur Temperatur t_3 gehörige Sättigungsdruck von N_2O_4. Da die Dampfspannungskurve von N_2O_4 mehrfach bestimmt ist, am genauesten wohl durch die Messungen von Scheffer und Treub[1]), deren wir uns bedienten, so bedurften wir keiner besonderen Druckmessung im Schallrohr.

4. *Versuchsanordnung für Unterdruck.* — In der Einleitung ist bereits darauf hingewiesen, daß die Schallmessungen bei Unterdruck wünschenswert waren, um das kritische Frequenzgebiet wenn möglich unter die Hörgrenze zu verlegen, daß sich aber experimentelle Schwierigkeiten dadurch ergaben, daß die dünnen Glimmermembranen infolge des auf ihnen lastenden Druckes an Schalldurchlässigkeit verlieren und auch störende Eigenfrequenzen bekommen. Mancherlei Versuche, durch Änderung der Dicke, Größe, Spannung und auch des Materials der Membranen weiterzukommen, führten nicht zum gewünschten Ziel. Wir kamen schließlich zu dem Kompromiß, die wie bisher $^1/_{100}$ mm starke Schalleingangsmembran vom Außendruck zu entlasten und dadurch gut durchlässig zu erhalten, die Ausgangsmembran aber, die sich wegen der subjektiven Beobachtungsweise nicht entlasten ließ, stärker (etwa $^3/_{100}$ mm) zu wählen, so daß die benutzten Unterdrucke gerade noch ausgehalten wurden. Die Entlastungsvorrichtung für die Eingangsmembran ist in Fig. 1c skizziert. Das als Schallquelle dienende Telephon wurde in einer luftdicht schließenden Glasglocke G untergebracht, die sich durch einen seitlichen Tubus T_2, aus dem auch die Zuleitungen zum Telephon austraten, evakuieren ließ. Der Druck konnte an einem geschlossenen Hg-Manometer H beobachtet werden; um plötzliche, die Membran gefährdende Druckänderungen auszuschließen, war bei K noch ein Stück Kapillare eingesetzt. Durch den vorderen Tubus T_1 führte ein gerades Bleirohr durch die Wandung des Badkastens zu der Eingangsmembran M_1. Indem man nun bei einer Druckerniedrigung im Schallrohr durch Abkühlen des flüssigen N_2O_4 gleich-

1) F. E. C. Scheffer u. J. P. Treub, Zeitschr. f. phys. Chem. 81. S. 308. 1912.

zeitig G evakuierte, konnte man M_1 fast spannungsfrei halten. Die wachsende Versteifung der Membran M_2 sowie die Schwächung der Schallenergie auf dem Wege vom Telephon bis zu M_1 infolge der verminderten Luftdichte mußten allerdings in Kauf genommen werden.

5. *Füllung des Schallrohres mit* N_2O_4. — Die endgültige Anordnung hierzu ist aus Fig. 2 ersichtlich. Das durch die Membranen M_1 und M_2 verschlossene Schallrohr R bildet zusammen mit dem geschlossenen Heberbarometer H, dem Vorratsgefäß V und der elektromagnetischen Aufbrechvorrichtung A für die N_2O_4-Fläschchen ein zusammenhängendes

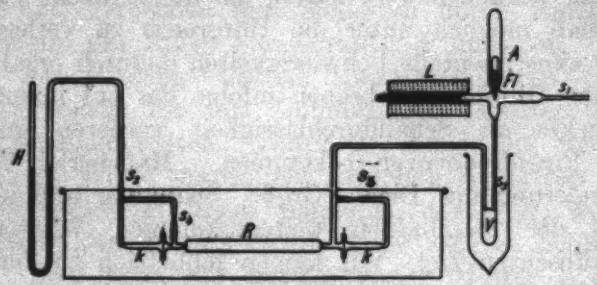


Fig. 2.

Rohrsystem, von dem sämtliche Teile zwischen den Abschmelzstellen s_1 und s_2 sorgfältig mit konzentrierter Salpetersäure gereinigt waren. Durch eine bei s_1 angeschlossene Volmerpumpe wurde das Rohrsystem unter mehrfachem Erhitzen der hiergegen unempfindlichen Glasteile gut evakuiert. Um hierbei die Glimmermembranen vor Druckdifferenzen zu schützen, waren (Fig. 2) zunächst auch die äußeren Vorräume der Membranen durch Zweigrohre in das zu evakuierende Volumen mit einbezogen. Erwies sich durch die Unveränderlichkeit der Barometereinstellung nach etwa 24stündigem Stehen unter Vakuum die Anordnung, insbesondere die Paraffinkittung, als zuverlässig gasdicht, so wurden Pumpe und Manometer bei s_1 und s_2 abgeschmolzen und dann das Vorratsfläschchen Fl mit flüssigem N_2O_4 durch einen elektromagnetisch geschleuderten Schlagbolzen (geschlossenes Glasrohr mit fest eingeschmolzenem Weicheisenkern) aufgebrochen. Die Vorrichtung hierzu ist aus Fig. 2 ersichtlich. Wenn der Eisenkern in die Mitte der mit einigen Ampere beschickten Spule L (15 cm

lang) gerissen wird, trifft das Ende des Schlagbolzens auf die fein ausgezogene Spitze des Flaschenhalses von *Fl* und zertrümmert diese. Bei Versuchen mit *G* II und der ersten Serie von *G* III wurde die Glasspitze des Fläschchens durch einen mit P_2O_5 geschmierten Drehschliff mit exzentrisch gebogenem Glashaken abgebrochen. Dies Verfahren hatte den Übelstand, daß sich der Schliff sehr leicht festklemmte. Auch konnte die Berührung des N_2O_4 mit dem zähflüssigen P_2O_5 zu Bedenken Anlaß geben. Nach der Öffnung des Fläschchens *Fl* floß das N_2O_4 in den Vorratsbehälter *V*, während sich *R* mit N_2O_4-Dampf füllte. Da bei einer dieser Füllungen sich die eine Membran nachträglich als zerstört erwies, wahrscheinlich weil die bei dem plötzlichen Ausströmen des N_2O_4 erzeugte Druckwelle sich in beiden Rohrzweigen nicht gleichmäßig fortgepflanzt hatte, wurde fernerhin der Inhalt des Fläschchens vor dem Aufbrechen durch ein außen herumgeschichtetes CO_2-Äthergemisch zum Gefrieren gebracht. Nunmehr ging nach dem Aufbrechen die Füllung von *R* ganz allmählich vonstatten. War alles flüssige N_2O_4 nach *V* gelaufen, so wurden Teil *A* bei s_3 abgeschmolzen, die Zweigrohre durch seitliches Abziehen der Schmelzstellen s_4 und s_5 getrennt und bei *k* abgesprengt (bei *G* II waren hier noch Paraffinkittungen, die dann gelöst wurden). Damit befand sich das Rohr *R* nebst Vorratsgefäß *V* in gebrauchsfähigem Zustand.

6. *Versuche mit Luftfüllung.* — Da die Schallgeschwindigkeit in N_2O_4 relativ zu der in Luft von 18° bestimmt werden sollte, wurden zunächst die Eigenfrequenzen der mit trockener, kohlensäurefreier Luft gefüllten Schallrohre *G* II und *G* III im Wasserbad von 18° gemessen. Die Beobachtungen sind in Tab. 1 zusammengestellt. Es bedeutet *q* die Ordnungszahl des Eigentons der Röhre, n_q seine beobachtete Schwingungszahl/sec und n_1 den Quotienten n_q/q, welcher mit dem Grundton des Rohres übereinstimmen sollte. Tab. 1 lehrt, daß die Unvollkommenheiten der Form des Glasrohres das harmonische Gesetz der Eigentöne nur wenig beeinträchtigen. Denn die Konstanz der n_1 ist für die höheren Ordnungszahlen überraschend gut, der Anstieg nach den kleinsten Ordnungszahlen hin ist, wie früher[1]) bei den Metallrohrversuchen, auf die Wirkung der Endöffnungen zurückzuführen.

1) a. a. O., S. 351.

Tabelle 1.

Eigentöne der Schallrohre bei Füllung mit trockner, kohlensäurefreier Luft von 18° C und 1 Atm. Druck.

	Rohr *G* II 10.–12. XII. 1921			Rohr *G* III Reihe 1: 27.–28. I. 1922		Reihe 2: 20. VI.–13. VII. 22.	
q	n_q	$n_1 = \frac{n_q}{q}$	q	n_q	$n_1 = \frac{n_q}{q}$	n_q	$n_1 = \frac{n_q}{q}$
2	491,3$_6$	245,7	3	—	—	2056,$_2$	685,4$_9$
3	732,3$_9$	244,1$_3$	4	2740,$_9$	685,2$_2$	2736,$_1$	684,0$_3$
4	972,8	243,2$_1$	5	3420,$_1$	684,0$_3$	3417,$_1$	683,4$_3$
5	1218,8	243,7$_6$	6	4109,$_4$	684,9$_0$	4102,$_2$	683,7$_1$
6	1458,0	243,0$_0$	7	4784,$_5$	683,5$_0$	4781,$_7$	683,1$_0$
7	1704,9	243,5$_6$	8	5478,$_2$	684,7$_7$	5467,$_2$	683,4$_0$
8	1945,5	243,1$_9$	9	6163,$_2$	684,8$_0$	6149,$_5$	683,2$_8$
12	2920,7	243,3$_9$	10	6843,$_9$	684,3$_9$	6833,$_9$	683,3$_9$
16	3893,$_8$	243,3$_6$	11	—	—	7517,$_2$	683,3$_8$
19	4624,$_1$	243,3$_7$	12	—	—	8199,$_6$	683,3$_0$
23	5600,$_7$	243,5$_1$	13	8907,$_7$	685,2$_1$	8889,$_9$	683,8$_4$
24	5837,$_9$	243,2$_5$	14	9593,$_6$	685,2$_6$	9559,$_5$	682,8$_2$
25	6086,$_4$	243,4$_6$	16	10967	685,4$_2$	10926	682,8$_5$
27	6574,$_0$	243,4$_8$	19	13013	684,8$_8$	12986	683,4$_6$
29	7055,$_1$	243,2$_8$	20	13699	684,9$_3$	13671	683,5$_5$
34	8281,$_7$	243,5$_8$	21	—	—	14358	683,7$_1$
35	8523,$_0$	243,5$_1$					
39	9491	243,3$_6$					
40	9729	243,2$_3$					
41	9979	243,3$_9$					
43	10469	243,4$_8$					
44	10706	243,3$_3$					

Für *G* III sind zwei Beobachtungsreihen angegeben, deren erste das Mittel der Versuche vom 27. und 28. I. 22, deren zweite das Mittel der Versuche vom 20. VI. bis 13. VII. 22 enthält. Zwischen beiden besteht eine Differenz, die unzweifelhaft die normalen Beobachtungsfehler übersteigt und uns unerklärlich ist. Da für N_2O_4 eine Differenz gleicher Größenordnung zwischen den Versuchsreihen vom 21. II. bis 9. III. und vom 19. bis 26. V. besteht, und da zwischen diesen beiden Versuchsreihen das Rohr mit neuen Membranen versehen wurde, so liegt die Annahme nahe, daß hierbei eine Spur Paraffin in eines der kleinen Schallöcher geflossen ist. Eine Verkleinerung desselben könnte eine Vertiefung der Eigentöne niedriger Ordnung bewirkt haben (vgl. a. a. O. S. 351). Daß auch eine Vertiefung der höheren Eigentöne beobachtet ist, macht die Annahme allerdings sehr unwahr-

scheinlich. Eine andere Annahme, daß die Membranen von Einfluß sind, wurde durch Versuche ohne Membranen widerlegt. Obwohl also unsicher bleibt, was zwischen beiden Versuchsreihen sich geändert hat, scheint es doch gerechtfertigt, zwecks Bildung der relativen Schallgeschwindigkeit von N_2O_4 die ältere Versuchsreihe mit den Luftversuchen vom Januar, die jüngere mit den Luftversuchen vom Juni/Juli 1922 zu kombinieren. Wenn die Differenz nur zwischen den beiden N_2O_4-Reihen bestände, würde man sie natürlich auf Unterschiede in der Gasfüllung zurückführen.

7. *Akustische Rohrlängen.* — Da die Messung der lichten Rohrlängen wegen der Unebenheit der Endflächen und wegen der beim Visieren auftretenden optischen Verzerrungen an den Endflächen nur ungenau möglich war, da aber andererseits die Kenntnis der Rohrlängen für die Berechnung des Nebenspektrums (vgl. später) gefordert wird, haben wir noch aus der bekannten Schallgeschwindigkeit in Luft Werte der „akustischen" Rohrlängen für große n berechnet. Als akustische Länge eines gasgefüllten Rohres bezeichnen wir den Abstand zweier paralleler, das gleiche Gas begrenzender Ebenen, zwischen denen sich mittels eines Eigentons des Rohres die gleiche Zahl stehender Schallwellen erzeugen läßt wie im Rohre.

Es wurden also die auf $n = \infty$ extrapolierten n_1-Werte, welche nach der Theorie frei sein sollten vom Einfluß der Reibung und Wärmeleitung an den Rohrwänden und vom Einfluß der Rohrenden, kombiniert mit der Schallgeschwindigkeit in *freier* Luft (331,57 m/sec bei 0°, a. a. O. S. 357). Aus den Zahlen der Tab. 1 ergibt sich durch graphische Extrapolation auf $n = \infty$ für *G* II $n_1 = 248{,}44$, für *G* III bei stärkerer Bewertung der zweiten, durch mehr Versuche gestützten Reihe $n_1 = 684{,}0$. Dem entsprechen die Rohrlängen für *G* II $L = 70{,}31$ cm, für *G* III $L = 25{,}02_3$ cm statt der beobachteten $70{,}1_5$ und $24{,}8_9$. Da es für die Berechnung des Nebenspektrums (Abschn. 9) weniger auf die direkt gemessenen als vielmehr auf die akustisch wirksamen Rohrlängen ankommen wird, so haben wir diese letzteren benutzt.

8. *Versuche mit Stickstofftetroxyd bei normalem Druck.* — Das flüssige N_2O_4 wurde von Kahlbaum in zugeschmolzenen Glasfläschchen von 5—10 g Inhalt zu verschiedenen Zeiten bezogen. Da die gemessenen Schallgeschwindigkeiten verschie-

Tabelle 2.

Eigentöne der Schallrohre bei Füllung mit Stickstofftetroxyd von 25° C und 760 mm Hg.

	Rohr *G* II				Rohr *G* III				
	Versuch 1: 17. XII. 1921		Versuch 7: 22. XII. 1921		Versuch 1/2: 21. u. 22. II. 1922			Versuch 8a: 19. V. 1922	
q	n_q	$n_1 = \frac{n_q}{q}$	n_q	$n_1 = \frac{n_q}{q}$	q	n_q	$n_1 = \frac{n_q}{q}$	n_q	$n_1 = \frac{n_q}{q}$
3	395,8$_5$	131,9$_5$			1	(390,6)	(390,6)	(394,2)	(394,2)
4	523,7$_8$	130,9$_4$			2	(747,6)	(373,8)	(743,8)	(371,9)
5	656,4$_0$	131,2$_8$			3	(1108,5)	(369,5)	(1104,3)	(368,1)
6	785,2$_2$	130,8$_7$			6	2212,3	368,7$_2$	2205,1	367,5$_1$
7	917,9$_8$	131,1$_4$			7	2578,$_8$	368,4$_0$	2572,$_7$	367,5$_3$
8	1046,6	130,8$_3$			8	2947,$_2$	368,4$_0$		
9	1178,$_8$	130,9$_2$							
					10	3683,$_1$	368,3$_1$	3673,$_1$	367,3$_1$
11	1441,$_1$	131,0$_1$			11	4051,$_0$	368,2$_7$		
12	1570,$_7$	130,8$_9$			12	4419,$_8$	368,3$_2$		
13	1700,$_8$	130,8$_3$			13	4787,$_0$	368,2$_3$		
14	1832,$_2$	130,8$_8$	1832,$_8$	130,8$_9$	14	5157,$_5$	368,3$_9$		
15	1962,$_2$	130,8$_1$			15	5526,$_8$	368,4$_2$	5510,$_4$	367,3$_7$
16	2093,$_6$	130,8$_5$			16	5894,$_6$	368,4$_1$		
18	2355,$_2$	130,8$_5$			17	6261,$_1$	368,3$_0$		
					18	6630,$_8$	368,3$_8$		
20	2617,$_4$	130,8$_7$	2617,$_8$	130,8$_9$	19	6996,$_0$	368,2$_1$		
21			2750,$_0$	130,9$_5$					
22			2879,$_8$	130,9$_0$	20	7365,$_8$	368,2$_9$	7346,$_6$	367,3$_3$
23			3010,$_5$	130,8$_9$	21	7733,$_7$	368,2$_7$		
25			3275,$_8$	131,0$_3$	22	8107,$_2$	368,5$_1$		
27			3534,$_0$	130,8$_9$	23	8471,$_6$	368,3$_2$		
28			3665,$_5$	130,9$_1$	24	8840,$_4$	368,3$_5$		
29			3796,$_1$	130,9$_0$	25	9207,3	368,2$_9$		
					26	9577,$_9$	368,3$_8$		
30			3925,$_2$	130,8$_4$	27	9945,$_5$	368,3$_5$		
31			4056,$_7$	130,8$_8$	28	10316	368,4$_2$		
32			4188,$_5$	130,8$_9$	29	10681	368,3$_1$		
33			4317,$_7$	130,8$_6$					
34			4448,$_6$	130,8$_4$	30	11054	368,4$_5$		
36			4710,$_8$	130,8$_5$	31	11421	368,4$_2$		
37			4846,$_6$	130,9$_3$	32	11789	368,4$_1$		
38			4973,$_4$	130,8$_8$	33	12160	368,4$_9$	12124	367,3$_9$
39			5102,$_4$	130,8$_8$	34	12527	368,4$_3$		
40	5232,$_8$	130,8$_2$	5232,$_8$	130,8$_2$					
41			5364,$_0$	130,8$_8$					
42			5496,$_1$	130,8$_6$					
43			5626,$_8$	130,8$_5$					
44			5756,$_5$	130,8$_2$					

dener Proben übereinstimmen und niedriger sind, als die von früheren Beobachtern gefundenen, so glauben wir ziemlich

Tabelle 3.

Relative Schallgeschwindigkeit in Stickstofftetroxyd von 25° und 35° C bei 760 mm Hg bezogen auf trockene kohlensäurefreie Luft von 18° C bei 760 mm Hg.

q	n_q	Rohr *G* II bei 25° C				Rohr *G* II bei 35° C		
		Versuch 1 17. XII. 1921	Versuch 2–4 19. XII. 1921	Versuch 6a 21. XII. 1921	Versuch 7 22. XII. 1921	Versuch 5 20. XII. 1921	Versuch 6b 21. XII. 1921	Versuch 8 22. XII. 1921
3	395,9	0,5405		0,5400		0,5685	0,5685	
4		0,5384		0,5383		0,5669	0,5669	
5		0,5386				0,5669	0,5668	
6		0,5386						
7		0,5384		0,5385				
8		0,5380						
9		0,5382						
11	1441	0,5383						
12		0,5378						
13		0,5375					0,5661	
14		0,5377			0,5378			
15	1962	0,5375	0,5372				0,5659	0,5659
16		0,5377						
18		0,5376						
20	2617	0,5377	0,5373		0,5378		0,5662	0,5659
21					0,5380			
22					0,5378			
23					0,5375			
25	3276		0,5382		0,5382			
27			0,5378		0,5376			
28					0,5378			
29					0,5381			
30	3925				0,5375			
31					0,5376			
32					0,5377			
33			0,5386		0,5375			
34					0,5372			
36	4711				0,5375			
37					0,5381			
38			0,5374		0,5376		0,5660	
39			0,5372		0,5376			
40	5233	0,5378	0,5375		0,5378			0,5665
41					0,5375			0,5662
42					0,5376			0,5660
43			0,5373		0,5375			0,5660
44	5757		0,5372		0,5377			0,5661
Mittel		$0{,}5377_8$	$0{,}5375_7$		$0{,}5377_9$		$0{,}5660_2$	$0{,}5660_9$
		$0{,}5376_8$					$0{,}5660_7$	

Tabelle 4.

Relative Schallgeschwindigkeit in Stickstofftetroxyd von 25° C und 760 mm Hg, bezogen auf trockne kohlensäurefreie Luft von 18° C und 760 mm Hg.

		Rohr *G* III						
		Reihe 1				Reihe 2		
q	n_q	Versuch 1 21. II. 1922	Versuch 2 22. II. 1922	Versuch 5 25. II. 1922	Versuch 7 9. III. 1922	Versuch 8a 19. V. 1922	Versuch 10a 22. V. 1922	Versuch 13 26. V. 1922
6	2212	0,5384				0,5375		
7		0,5390		0,5397	0,5386	0,5380	0,5380	0,5375
8		0,5380						
10	3683	0,5382				0,5375	0,5373	0,5370
11		0,5378						
12		0,5379						
13		0,5374						
14		0,5376						
15	5527	0,5379			0,5378	0,5377		0,5370
16		0,5375						
17		0,5377						
18		0,5378		0,5384				
19		0,5376	0,5384					
20	7366	0,5377		0,5385	0,5383	0,5374	0,5372	0,5368
21		0,5376						
22		0,5380						
23		0,5377						
24		0,5377						
25	9207	0,5376	0,5384					
26		0,5377						
27		0,5377						
28		0,5378						
29		0,5376						
30	11054	0,5377						
31		0,5377						
32		0,5377						
33		0,5378	0,5383	0,5381	0,5380	0,5376	0,5373	0,5374
34	12527	0,5377	0,5382					
Mittel		$0{,}5377_2$	$0{,}5383_2$	$0{,}5383_3$	$0{,}5380_3$	$0{,}5375_5$	$0{,}5372_7$	$0{,}5370_5$

Erste Füllung $0{,}5381_0$ Zweite Füllung: $0{,}5372_9$

reine Präparate in Händen gehabt zu haben. Denn die wahrscheinlichsten Verunreinigungen würden die Schallgeschwindigkeit des spezifisch schweren N_2O_4-NO_2-Gemisches erhöht haben.

Daß auch während unserer Versuche selbst das Gas nicht verunreinigt wurde, schließen wir daraus, daß die Füllungen, welche bis zu 17 Tagen Dauer im Rohr blieben, während dieser Zeit auf etwa $\pm$ $^1/_2$‰ konstante Schallgeschwindigkeit gaben (vgl. die Mittelwerte in Tabb. 3 und 4).

Wir geben zunächst in Tab. 2 für die beiden Schallrohre *G* II und *G* III je zwei möglichst vollständige Versuchsreihen wieder, bei denen die N_2O_4-Füllung eine Temperatur von nahezu 25° C besaß. Der Druck betrug nahe 760 mm Hg und wurde dadurch hergestellt, daß der Behälter *V* nahe auf der normalen Siedetemperatur gehalten wurde. Die Angaben über diese Temperatur schwanken zwischen 21,2 und 28° C. Wir nehmen die von Scheffer und Treub gegebene Zahl 21,2 als richtig an, da sie mit unseren eigenen Beobachtungen über das Eintreten der Spannungslosigkeit der Membranen, die man aus ihrer Schalldurchlässigkeit ziemlich scharf erkennen kann, am besten stimmt. Die Zahlen der Tab. 2 sind auf 25,0° und 760 mm Hg korrigiert. Nähere Angaben über die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von Temperatur und Druck folgen im Abschnitt 10.

Bei unbelasteten Membranen waren die Resonanzmaxima in Stickstofftetroxyd seiner größeren Dichte wegen schärfer als in Luft. Die Beobachtungen der Tab. 2 sind daher recht sicher. Abgesehen von dem bekannten, freilich nur mit geringerer Genauigkeit beobachteten Anstieg der n_1-Werte nach kleinen Ordnungszahlen hin, der bei N_2O_4 in *G* III sogar bis $q = 1$ verfolgt werden konnte, was früher bei Luft und Wasserstoff nicht möglich war, zeigt sich für Frequenzen von etwa 400—12500/sec eine vortreffliche Konstanz der n_1-Werte, also keine Spur einer Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Frequenz. Sowohl der erwähnte Anstieg nach kleinen Ordnungszahlen, wie der bis $q = 8$ hin in *G* II deutlich bemerkbare Wechsel zwischen größeren und kleineren n_1-Werten bei ungeraden und geraden Ordnungszahlen werden nun noch wesentlich eliminiert, wenn man die relative Schallgeschwindigkeit des N_2O_4 gegen Luft bildet, indem man für sämtliche Versuchsreihen, die bei 25° und 760 mm Druck aufgenommen sind, die n_1 für N_2O_4 durch die für dieselbe Ordnungszahl geltenden n_1 für Luft (18°) dividiert. Dies ist in Tab. 3 und 4 geschehen. Wo die nötigen Beobachtungen in Luft fehlen,

konnten sie graphisch interpoliert, für die höchsten Ordnungszahlen in *G* III wegen des sehr geringen Ganges mit der Frequenz auch extrapoliert werden.

Durch diese Division der Eigenfrequenzen gleicher Ordnung wird auch die Kirchhoff-Helmholtzsche Korrektion wegen Reibung und Wärmeleitung im wesentlichen eliminiert. Für N_2O_4 ist sie bei gleicher *Wellenlänge* und 1 Atm. Druck etwa halb so groß wie in Luft, wie sich aus einer Überschlagsrechnung[1]) ergibt. Mit abnehmendem Druck (vgl. Abschnitt 10) wächst die Korrektion für N_2O_4 bis nahe an den für Luft unter Normalbedingungen geltenden Wert. Infolge des Divisionsverfahrens bleibt also nur ein mit sinkendem Druck abnehmender Bruchteil der bei Rohr *G* III theoretisch etwa 1,7‰ betragenden Luftkorrektion als Fehler übrig. Wir haben ihn vernachlässigt.

Somit können die Zahlen der Tabb. 3 und 4 als endgültig betrachtet werden. Sieht man von einer kleinen Erhöhung der Werte bei kleinen Ordnungszahlen (etwa bis $q = 8$) ab, die anzudeuten scheint, daß der Einfluß der Rohrenden doch nicht *völlig* von der Natur des Gases unabhängig ist, wie früher[2]) geschlossen wurde, so beweisen die Zahlen jeder Spalte, daß die Schallgeschwindigkeit in N_2O_4 auf wenigstens $^1/_2$‰ bis zur Frequenz 12500 konstant ist. Etwas größer sind die Schwankungen von einer Spalte zur anderen, selbst wenn die Füllung die gleiche blieb (vgl. besonders Tab. 4, Versuch 1—7). Wodurch diese Änderungen von einem Tage zum anderen bedingt sind, konnten wir nicht ermitteln. Es kommt auch nicht viel darauf an, da die Konstanz innerhalb eines Tages für unsere Zwecke wichtiger ist. Für die Bildung der endgültigen Schlußwerte der Schallgeschwindigkeit von N_2O_4 [3]) haben wir die einzelnen Tageswerte mit gleichem Gewicht berücksichtigt, obwohl vielleicht die ersten Messungen nach der Füllung hinsichtlich der Reinheit des Gases das größte Zutrauen verdienen. Man erhält dann für die drei untersuchten Proben als relative Schallgeschwindigkeit in

---

1) Für Reibung und Wärmeleitung des N_2O_4 sind dabei die Daten für CO_2 zugrunde gelegt.

2) a. a. O. S. 352.

3) Die unter Ausschluß der Töne $q = 1$ bis 8 erfolgt ist.

Stickstofftetroxyd von 25° und 760 mm Hg bezogen auf trockene, kohlensäurefreie Luft von 18°

aus Rohr G II	aus G III		Mittel
	1. Füllung	2. Füllung	
$0{,}5376_8$	$0{,}5381_0$	$0{,}5372_9$	$0{,}5376_9$

Durch Multiplikation des Mittels mit der für Luft früher gefundenen Schallgeschwindigkeit

$$331{,}5_7 \sqrt{1 + 0{,}00367 \cdot 18} = 342{,}3_5 \text{ m/sec}$$

folgt schließlich für N_2O_4 (25°, 760 mm)

$$u = 184{,}0_8 \text{ m/sec.}$$

9. *Beobachtungen mit dem unharmonischen Spektrum.* — Das harmonische Tonspektrum konnten wir in Rohr G II nur bis zum 44., in G III nur bis zum 34. Eigenton verfolgen. Dem entsprechen in N_2O_4 die Schwingungszahlen 5800/sec und 12500/sec. Oberhalb dieser Töne setzt ein unharmonisches Tonspektrum[1]), welches durch radiale Schwingungen entsteht, mit vielen Eigentönen ein, die anfangs so dicht aufeinander folgen, daß es trotz der sehr scharfen Resonanz kaum gelingt, die Töne voneinander zu trennen oder auch die meist schwächeren harmonischen Eigentöne daneben herauszuhören. Erst bei höherer Ordnungszahl rücken die Eigentöne allmählich weiter auseinander und lassen sich bei genügender Stärke gut beobachten.

Da es für unsere Zwecke darauf ankam, den hörbaren Frequenzbereich voll auszunutzen, und da die Theorie unter Voraussetzung konstanter Schallgeschwindigkeit die Lage der unharmonischen Eigentöne genau vorschreibt, haben wir diese in G III bis zur Hörgrenze (fast 16000/sec) aufgenommen, in G II bis zur Frequenz 8600/sec, letzteres nur, um die Theorie zu prüfen. Nach dieser genügen die Eigentöne des hier allein in Betracht kommenden *ersten* unharmonischen Spektrums der Bedingung

$$(1) \qquad \left(\frac{n}{n_1}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{7{,}6632\, L}{\pi\, d}\right)^2 = m^2 + C^2,$$

1) Vgl. hierüber a. a. O. S. 346; M. Thiesen, a. a. O. S. 416 u. 432. 1907.

Tabelle 5.

Relative Schallgeschwindigkeit von Stickstofftetroxyd bei Unterdruck, bezogen auf trockne kohlensäurefreie Luft von 18° C bei 760 mm Hg.

	Rohr *G* III					
q	Versuch 8 b 19. V. 1922 25,0° C 565 mm Hg	Versuch 9 20. V. 1922 18,2° C 440 mm Hg	Vers. 10 b 22. V. 1922 25° C 440 mm Hg	Versuch 11 23. V. 1922 14,2° C 440 mm Hg	Versuch 12 24. V. 1922 20,3° C 265 mm Hg	Versuch 14 27. V. 1922 10,0° C 265 mm Hg
6	0,5462	0,5342	0,5543	0,5247	0,5545	0,5254
7	0,5469	0,5344	(0,5561)	0,5243	0,5555	0,5261
8				0,5241	0,5562	
9				(0,5272)		
10				(0,5292)	(0,5577)	0,5269
13		0,5344				
14		0,5353				
15	0,5460					
19	0,5462					0,5261
20	0,5460			0,5260	0,5533	0,5251
21			0,5534			
24			0,5539			
25			0,5541	0,5240		
26			(0,5557)			
27		0,5342		0,5229		
28				0,5237		
31				0,5244		
33	0,5456					
34				0,5245		
	0,5462	0,5345	0,5539	0,5243	0,5549	0,5259

wo n_1 der Grundton der harmonischen Reihe, L die Rohrlänge, d der Rohrdurchmesser ist und m die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft. *C muß also eine nur von den Dimensionen des Rohres abhängige Konstante sein, wenn die Schallgeschwindigkeit von der Frequenz unabhängig ist.* Diese Bedingung ist für N_2O_4 bis zur Frequenz 12500/sec erfüllt, wie die Versuche mit *G* III in Tabb. 2 und 4 bewiesen. Also müßte bis zur Frequenz 8600/sec in *G* II die Konstanz von C jedenfalls erfüllt sein. Berechnet man nach der obigen Formel aus den beobachteten n/n_1 (Tab. 6, links) für die zugehörigen Laufzahlen m die Werte von C^2 und mit deren Mittel (von $m = 25—49$) $C^2 = 1947{,}5$ wieder rückwärts die n/n_1, so stimmen, wie Tab. 6 zeigt, oberhalb von $m = 25$ diese berechneten n/n_1 vorzüglich mit den beobachteten überein. In demselben Grade ist also C konstant. Unterhalb $n/n_1 = 44{,}7$ konnten wir nur 5 getrennte Eigentöne hören, die dem unharmonischen

Tabelle 6.

Die unharmonischen Eigentöne der Rohre *G* II und *G* III mit Stickstofftetroxydfüllung von 25° bei 760 mm Hg.

Rohr *G* II					Rohr *G* III				
m	n	$\left(\frac{n}{n_1}\right)_{beob.}$	$\left(\frac{n}{n_1}\right)_{ber.}$	beob. −ber.	m	n	$\left(\frac{n}{n_1}\right)_{beob.}$	$\left(\frac{n}{n_1}\right)_{ber.}$	beob. −ber.
1			44,14		1		34,73	34,80	− 0,07
2		44,28	44,18		2		34,82	34,84	− 0,02
3	5800	44,38	44,23		3		34,90	34,91	− 0,01
4		44,47	44,31		4		—	35,01	—
5			44,41		5		35,13	35,14	− 0,01
6		44,58	44,54	+ 0,04	6		35,30	35,30	±
7		44,72	44,68	+ 0,04	7	12800	35,47	35,48	− 0,01
25		50,73	50,72	+ 0,01	8	bis	35,69	35,69	±
29		52,81	52,81	±	9	15580	35,92	35,93	− 0,01
30		53,38	53,36	+ 0,02	10		36,20	36,19	+ 0,01
31		53,93	53,93	±	11		36,50	36,48	+ 0,02
32		54,52	54,51	+ 0,01	12		36,79	36,80	− 0,01
33		55,12	55,10	+ 0,02	13		37,14	37,13	+ 0,01
34		55,70	55,71	− 0,01	17		38,72	38,72	±
36	6600	56,94	56,95	− 0,01	24		42,28	42,26	+ 0,02
37	bis	57,59	57,59	±					
38	8600	58,25	58,24	+ 0,01					
39		58,89	58,89	±					
40		59,56	59,56	±					
41		60,22	60,24	− 0,02					
44		62,34	62,32	+ 0,02					
45		62,99	63,03	− 0,04					
46		63,76	63,75	+ 0,01					
47		64,47	64,47	±					
49		65,93	65,94	− 0,01					

Spektrum zugeordnet werden mußten. Die beiden höchsten werden zu $m = 6$ und $m = 7$ gehören. Wie die drei anderen zuzuordnen sind, lassen wir dahingestellt. Man muß annehmen, daß diese Resonanzmaxima zum Teil durch Verschmelzung zweier benachbarter entstanden sind. Unterscheiden sich die Frequenzen der ersten Töne doch nur um $1‰$, d. h. etwa 6 Schwebungen/sec.

Da zwischen $m = 7$ und $m = 25$ keine Resonanzen beobachtet bzw. abgezählt worden sind, mußten die Laufzahlen von $m = 25$ bis $m = 49$ erst erraten werden. Über ihre richtige Wahl ist bei so genauer Frequenzmessung, wie die unsrige war, ein Zweifel nicht möglich. Wollte man den beobachteten Frequenzen andere m zuordnen als in Tab. 6, so würde man die

Konstanz der C-Werte völlig vernichten. Auch würde die von der Theorie geforderte Beziehung

$$C = \frac{7{,}6632\, L}{\pi d}$$

nicht erfüllt werden, die mit der „akustischen" Rohrlänge von Abschnitt 7 und dem Rohrdurchmesser von Abschn. 2 $C^2_{\text{ber.}} = 1949{,}1$ ergibt, in guter Übereinstimmung mit dem oben erhaltenen $C^2 = 1947{,}5$. Die Theorie des unharmonischen Spektrums wird also durch diese Versuche in *G* II experimentell sehr gut bestätigt[1]) und kann daher auf die Versuche in *G* III angewandt werden, um für das Intervall 12500 bis 15600 die Konstanz der Schallgeschwindigkeit in N_2O_4 zu prüfen.

In *G* III wurden von dem einen von uns sämtliche Töne des unharmonischen Spektrums von $m = 1$ bis $m = 24$ gehört und abgezählt (Tab. 6, rechts), doch wurde nicht von allen die Frequenz gemessen. Der Ton $m = 4$ fällt so nahe mit dem harmonischen Ton $q = 35$ zusammen, daß es zweifelhaft war, auf welche Resonanz man einstellte. Von den Tönen oberhalb $m = 13$ wurden nur $m = 17$ und $m = 24$ gemessen. Bildet man aus den gemessenen Frequenzen n und der an dem betreffenden Tage im Mittel gefundenen Grundfrequenz n_1 die Quotienten n/n_1 und setzt sie in die Formel (1) ein, so ergibt sich für C^2 wiederum eine fast völlige Konstanz. Zum Beweise dessen sind die mit dem mittleren $C^2 = 1209{,}9$ berechneten n/n_1 in Tab. 6 neben die beobachteten n/n_1 gestellt. Man wird bemerken, daß die Differenz beob.—ber. einen schwachen systematischen Gang zeigt. Dieser entsteht aber wahrscheinlich nur dadurch, daß der Ton $m = 1$ infolge des Einflusses der Rohrendflächen ein wenig tiefer liegt, als die Theorie verlangt, und daß die Tongruppen unterhalb und oberhalb $m = 10$, welche in sich keinen Gang in der Differenz beob.—ber. zeigen, dadurch eine Verschiebung gegeneinander erfahren haben, daß sie an verschiedenen Tagen beobachtet sind. Wir sind deshalb der Ansicht, daß die Schallgeschwindigkeit in N_2O_4 von 25° und 760 mm Druck bis zur Schwingungszahl 15600/sec noch keine Änderung zeigt, die größer wäre als $^1/_2\,{}^0/_{00}$.

Aus Länge und Durchmesser von *G* III berechnet sich $C^2 = 1203{,}6$. Die Differenz von $5\,{}^0/_{00}$ gegen den aus den un-

1) Früher (a. a. O. S. 347) war die Prüfung flüchtiger erfolgt.

harmonischen Tönen berechneten Mittelwert 1209,9 kann durch eine sehr wohl mögliche Unsicherheit von 2,5‰ in den Rohrdimensionen erklärt werden.

10. *Einfluß von Druck- und Temperaturänderung.* — Wegen der Spannung der Ausgangsmembran (Abschn. 4) war die akustische Beobachtung bei stärkerem Unterdruck wesentlich ungenauer als bei Druckgleichheit. Auch konnte man nicht alle Eigentöne hören; die harmonischen nur in beschränkter und von Zufälligkeiten abhängender Auswahl, die unharmonischen überhaupt nicht. Je kleiner der Innendruck war, um so tiefer lag die obere Grenze der gehörten Töne. In Tab. 5 sind alle Beobachtungen mit Unterdruck vereinigt. Die Zahlen bedeuten wieder die relative Schallgeschwindigkeit von N_2O_4 unter den im Tabellenkopf angegebenen Verhältnissen, bezogen auf trockene CO_2-freie Luft von 18° und 760 mm Druck. Einige wegen Unsicherheit geklammerte Beobachtungen sind mit aufgeführt, um das Vorhandensein der betreffenden Eigentöne festzustellen. Das Ergebnis ist, daß auch bei Unterdruck *eine Schallgeschwindigkeitsänderung mit der Frequenz nicht nachweisbar* war.

Änderung der Schallgeschwindigkeit von N_2O_4 mit der Temperatur bei verschiedenen Drucken

Änderung der Schallgeschwindigkeit von N_2O_4 mit dem Druck bei 25° C

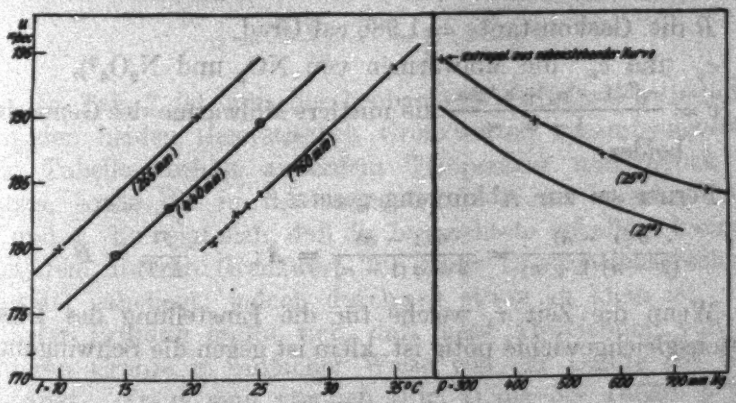


Fig. 8.

Auch die Temperatur wurde bei diesen Versuchen erniedrigt, wobei eine untere Grenze durch die Annäherung an den Sättigungsdruck gegeben war. Hinsichtlich der Abhängigkeit von der Frequenz ergab sich dabei nichts anderes. Die

Versuche dienten jedoch gleichzeitig dazu, den Einfluß von Temperatur und Druck auf die Schallgeschwindigkeit in N_2O_4 klarzustellen, den man zur Reduktion der Beobachtungen auf runde Drucke und Temperaturen brauchte. Fig. 3 zeigt, daß du/dt im Gebiet unserer Beobachtungen als konstant und für alle Drucke gleich groß angenommen werden kann, daß aber $-du/dp$ mit wachsendem Druck abnimmt (u ändert sich praktisch *linear* mit der Temperatur des N_2O_4-Behälters, d. h. mit der Temperatur, die zum Drucke p als Sättigungstemperatur gehört).

11. *Die beobachtete Schallgeschwindigkeit als unterer Grenzwert.* Bisher ist nur nachgewiesen, daß das kritische Frequenzgebiet außerhalb des Bereichs unserer Messungen liegt. Zum Nachweis, daß es bei *höheren* Frequenzen zu suchen ist, müssen wir die Theorie zu Hilfe nehmen. Es bedeutet:

p den Druck,
ϱ die Dichte,
δ die Dampfdichte, bezogen auf Luft
α den Dissoziationsgrad (= Anzahl der dissoziierten zur Gesamtzahl der N_2O_4-Moleküle),
D die Dissoziationswärme eines Mol N_2O_4 bei konstantem Volumen = 12850 cal.[1])
R die Gaskonstante = 1,986 cal/Grad,
c_v' und c_v'' die Molwärmen von NO_2 und N_2O_4[2]),
$\bar{c} = \frac{c_v''(1-\alpha) + c_v' 2\alpha}{1+\alpha}$ die mittlere Molwärme des Gemisches beider.

Ferner sei zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{\alpha(1-\alpha)}{(2-\alpha)(1+\alpha)} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2+\alpha(1-\alpha)} = A; \qquad \frac{D}{RT} = B.$$

Wenn die Zeit τ, welche für die Einstellung des Dissoziationsgleichgewichts nötig ist, klein ist gegen die Schwingungs-

1) E. Wourtzel, Compt. Rend. 169. S. 1397. 1919; in guter Übereinstimmung mit M. Bodenstein, Zeitschr. f. phys. Chem. 100. S. 68. 1922.

2) Die nach Schreber (Zeitschr. f. phys. Chem. 24. S. 651. 1897) angenommenen Werte $c_v' = 6{,}4$ und $c_v'' = 12{,}8$ sind zwar unsicher, aber ohne großen Einfluß für das folgende.

dauer $1/n$, so haben wir nach Einstein als unteren Grenzwert der Schallgeschwindigkeit

$$u_{n=0} = \sqrt{\frac{p}{\varrho}\left[1 - A + \frac{(1+AB)^2}{AB^2 + \bar{c}/R}\right]} = \sqrt{\frac{p}{\varrho} \cdot \beta_1}.$$

Ist dagegen $\tau \gg 1/n$, so folgt als oberer Grenzwert

$$u_{n=\infty} = \sqrt{\frac{p}{\varrho}\left[1 + \frac{R}{\bar{c}}\right]} = \sqrt{\frac{p}{\varrho} \cdot \beta_2}.$$

Den Druck p haben wir, wie bereits erwähnt, nicht gemessen, sondern aus der Tabelle von Scheffer und Treub für die zugehörige Sättigungstemperatur, die wir am N_2O_4-Behälter maßen, entnommen. Aus p (in mm Hg) und der absoluten Temperatur T des Gases wurde nach der Wourtzelschen Gleichung[1]) der Reaktionsisochore

$$\log^{10} K = -\frac{2810{,}5}{T} + \log^{10} T - \log^{10} p + 8{,}9908$$

die Dissoziationskonstante K berechnet. Aus K und der theoretischen Dampfdichte von N_2O_4 ($= 92{,}02/28{,}98 = 3{,}175$) ergaben sich[2]) die wahre Dampfdichte des Stickstofftetroxyds

$$\delta = 3{,}175\,[1 + \tfrac{1}{4}K - \tfrac{1}{2}\sqrt{K(1 + \tfrac{1}{4}K)}],$$

die Dichte ϱ und der Dissoziationsgrad

$$\alpha = \frac{3{,}175 - \delta}{\delta} = \sqrt{\frac{K}{4+K}}.$$

In Tab. 7 ist nun die beobachtete Schallgeschwindigkeit mit den beiden theoretischen Grenzwerten zusammengestellt. Die Tabelle enthält außerdem Temperatur und Druck des Gases, sowie die in der angegebenen Weise berechneten δ, K und α. Es zeigt sich, daß die beobachtete Schallgeschwindigkeit dem unteren Grenzwert (für große Dissoziationsgeschwindigkeit) naheliegt, jedoch durchweg etwas zu klein ist. Bei näherer Prüfung ergibt sich, daß diese Abweichung von der unteren Grenze in einfacher Weise von der Dichte des N_2O_4 abhängt. Trägt man nämlich (Fig. 4) die der Dichte ϱ proportionale Größe $p/T\,(1+\alpha)$ (Tab. 7 letzte Spalte) als Abszisse, die Differenz $u_{\text{beob.}} - u_{\text{ber.}}$ als Ordinate auf, so liegen

1) a. a. O.

2) Vgl. W. Nernst, Theor. Chemie, 8.—10. Aufl. S. 525. 1921.

die erhaltenen Punkte auf einer Geraden, die für $p = 0$ innerhalb der möglichen Fehlergrenze durch den Nullpunkt geht. Je kleiner also der Gasdruck, um so kleiner ist die Abweichung zwischen Beobachtung und Berechnung. Wir vermuten, ohne es beweisen zu können, daß dies Ergebnis daraus zu erklären ist, daß bei der Ableitung der theoretischen Grenzwerte dem dissoziierten Gase, abgesehen von seiner Dissoziationsfähigkeit, die Eigenschaften eines idealen Gases beigelegt worden sind, eine Annahme, die um so besser erfüllt wird, je kleiner die Dichte ist. *Jedenfalls scheint uns die Übereinstimmung*

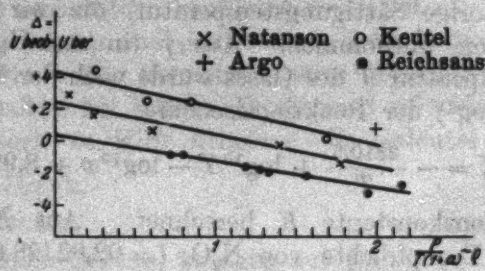


Fig. 4.

der beobachteten Schallgeschwindigkeit mit dem unteren Grenzwert so vollkommen zu sein, wie nur erwartet werden kann.

Es ist nun von Interesse, hier auch die älteren Beobachtungen in gleicher Weise zu diskutieren. Eine Auswahl derselben, die sich über einen möglichst großen Druckbereich erstreckt, ist daher in Tab. 7 und Fig. 4 mit aufgenommen. Natansons haben Druck und Dampfdichte gemessen, doch können diese Messungen nicht für sehr genau gelten.[1]) Deshalb und um der einheitlichen Behandlung sämtlicher Beobachtungen willen, haben wir nicht die experimentelle Dampfdichte zur Berechnung von u benutzt, sondern die mit Hilfe der Wourtzelschen Gleichung berechnete. Keutel und Argo haben nur die Dichte des Stickstofftetroxyds gemessen und hieraus mit Hilfe der Gleichung der Reaktionsisochore (nach Schreber bzw. Gibbs) Druck und Dampfdichte berechnet. Wir haben die Rechnungen mit den Wourtzelschen Konstanten wiederholt.

1) K. Schreber, Zeitschr. f. phys. Chem. 24. S. 651. 1897.

Tabelle 7.

Vergleich der beobachteten Schallgeschwindigkeiten in N_2O_4 mit den theoretischen Grenzwerten.

Beobachter	Versuch Nr.	p mmHg	t_{Gas}	δ	K	a Proz.	$u_{ber.}$ in m/sec $\tau \ll 1/n$	$u_{ber.}$ in m/sec $\tau \gg 1/n$	$u_{beob.}$ m/sec	Δu beob. − ber. $(\tau \ll 1/n)$	$\frac{p}{T(1+a)} \sim \varrho$
Reichsanstalt		760	25,0°	2,67$_9$	0,142$_2$	18,5$_1$	187,0	194,4	184,1	− 2,9	2,15
		760	35,0	2,49$_7$	0,318$_3$	27,1$_4$	197,0	205,9	193,8	− 3,2	1,94
	8b	565	25,0	2,61$_6$	0,191$_3$	21,3$_7$	189,2	197,1	187,0	− 2,2	1,56
	11	440	14,2	2,73$_3$	0,104$_6$	15,9$_7$	181,4	188,5	179,5	− 1,9	1,32
	9	440	18,2	2,67$_5$	0,144$_6$	18,6$_2$	184,8	192,3	183,0	− 1,8	1,27
	10b	440	25,0	2,55$_9$	0,245$_7$	24,0$_5$	191,2	199,6	189,6	− 1,6	1,19
	14	265	10,0	2,70$_3$	0,122$_5$	17,2$_5$	180,9	188,3	180,0	− 0,9	0,80
	12	265	20,3	2,52$_5$	0,283$_5$	25,7$_4$	190,9	199,6	190,0	− 0,9	0,72
E. u. L. Natanson	12	617	21,8	2,68$_6$	0,136$_9$	18,1$_9$	185,6	193,1	184,2	− 1,4	1,77
	13	492	21,6	2,64$_3$	0,168$_7$	20,1$_2$	187,0	194,8	186,7	− 0,3	1,39
	18	231	21,7	2,46$_2$	0,364$_1$	28,8$_8$	193,6	203,0	194,2	+ 0,6	0,61
	8	102	23,2	2,21$_5$	0,925$_8$	43,4	204,8	216,6	206,4	+ 1,6	0,24
	17	43,6	22,2	2,01$_3$	1,999	57,8	214,6	228,9	217,5	+ 2,9	0,09
Argo		685	22,0	2,70$_5$	0,125$_3$	17,3$_8$	185,1	192,4	186,1	+ 1,0	1,99
Keutel	a)	606	25,0	2,63$_1$	0,178$_4$	20,6$_8$	188,6	196,5	188,7	+ 0,1	1,68
	b)	308	23,0	2,51$_1$	0,301$_2$	24,4$_6$	192,3	200,9	194,7	+ 2,4	0,84
	c)	221	22,0	2,44$_5$	0,388$_6$	29,7$_0$	194,4	203,8	196,9	+ 2,5	0,58
	d)	106	23,3	2,22$_4$	0,895$_2$	42,8	204,4	216,1	208,8	+ 4,4	0,25

Die u-Beobachtungen Natansons und Keutels geben, in Fig. 4 eingetragen, ein ganz ähnliches Bild wie die unseren, nur daß die durch die beobachteten Punkte gelegten Geraden, die der unseren nahe parallel sind, nicht durch den Nullpunkt gehen, sondern die Ordinatenachse bei positivem Δ schneiden. Dies deutet nach unserer Meinung entweder auf eine gewisse Verunreinigung des N_2O_4 hin, oder auf einen systematischen Fehler der Schallgeschwindigkeitsmessung, während Keutel annahm, daß die von ihm benutzte Frequenz bereits im kritischen Frequenzgebiet liege. Auch Argos Beobachtung dürfte, obwohl sie mit der Berechnung relativ gut stimmt, eine erheblich zu große Schallgeschwindigkeit ergeben haben, wie man aus Fig. 4 sofort erkennt.

Selle beobachtete erstens nach der Methode von Clément-Desormes das Verhältnis der adiabatischen Druckänderung zur Dichteänderung und berechnete hieraus die Schallgeschwindigkeit für den Grenzfall langsamster Schwingungen. Er fand für N_2O_4 von 500 mm Druck und 21,0° C

$$u = 185{,}25 \text{ m/sec},$$

während wir aus unseren Messungen (Fig. 3) für dieselben Verhältnisse

$$u = 184{,}3 \text{ m/sec}$$

interpolieren würden. Der Unterschied liegt durchaus im Bereich der möglichen Fehler, da Selle allein eine Unsicherheit von $\pm 0{,}4$ Proz. $= \pm 0{,}7$ m/sec einräumt.[1])

Zweitens maß Selle die Schallgeschwindigkeit bei Frequenzen zwischen 1700 und 3700 sec^{-1} und fand Werte, die größer sind, als der aus adiabatischer Kompression gefundene Grenzwert, und die außerdem mit wachsender Frequenz ansteigen, so daß sein höchster Wert um etwa 2,7 Proz. höher liegt, als wir ihn unserer Fig. 3 entnehmen würden. Selle glaubte daher, bereits im kritischen Frequenzgebiet zu messen. Wie sein Ergebnis, das mit unseren Messungen im Widerspruch steht, zu erklären ist, können wir nicht angeben.

12. *Untere Grenze für die Dissoziationsgeschwindigkeit.*

Das Ziel unserer Untersuchung war die Bestimmung der Geschwindigkeitskonstante k, welche dadurch definiert ist, daß in der Zeit- und Volumeinheit $k \cdot N(1-\alpha)/v$ Moleküle N_2O_4

1) In seiner uns freundlichst zur Einsicht gegebenen Dissertation.

zerfallen [$N(1-\alpha)$ ist die Zahl der undissoziierten Moleküle N_2O_4 im Volumen v]. Nach Einstein sollte im kritischen Frequenzgebiet für solche Frequenzen, bei denen die Schallabsorption hinreichend klein ist, die Näherungsgleichung gelten

$$u_n = \sqrt{\frac{p}{\varrho}\cdot\frac{k^2\beta_1 + 4\pi^2 n^2 z^2 \beta_2}{k^2 + 4\pi^2 n^2 z^2}},$$

wo

$$z = \frac{\alpha}{2-\alpha}\cdot\frac{\bar{c}/R}{AB^2 + \bar{c}/R}.$$

Hiernach hätte man bei hinreichender Tonhöhe n eine Änderung von u bemerken müssen und k berechnen können. Da dieser Einfluß der Frequenz nicht gefunden wurde, kann höchstens eine untere Grenze für k angegeben werden. Nehmen wir an, die Schallgeschwindigkeit sei während einer Versuchsreihe, die bis zur Frequenz n reicht, bis auf den Bruchteil ε sicher konstant gefunden worden, so können wir setzen

$$\varepsilon > \frac{u_n - u_0}{u_0},$$

oder nahezu

$$2\varepsilon > \frac{u_n^2 - u_0^2}{u_0^2} \quad \text{oder} \quad > \frac{4\pi^2 n^2 z^2 (\beta_2/\beta_1 - 1)}{k^2 + 4\pi^2 n^2 z^2},$$

mithin

$$k > 2\pi n z \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1} - 1\right) - 1}.$$

Die rechte Seite stellt also eine *untere Grenze* für die Geschwindigkeitskonstante dar, die natürlich in Wirklichkeit weit überschritten werden kann.

In Tab. 8 haben wir für die Mehrzahl unserer Versuchsreihen eine Schätzung dieser unteren Grenze durchgeführt. Bei der Abschätzung der Größe ε liegt natürlich eine gewisse Willkür vor, insbesondere wenn die Versuchsfehler beträchtlich sind, wie bei den Unterdruck-Versuchen. Mit Rücksicht darauf, daß der Effekt der Dissoziationsgeschwindigkeit auf die Schallgeschwindigkeit, wenn er überhaupt vorhanden wäre, zunächst *quadratisch* mit der Frequenz zunehmen würde, glauben wir die Größe ε nicht zu klein geschätzt zu haben. Auf keinen Fall ist dies geschehen bei den Versuchsreihen, die unter den günstigsten Verhältnissen, bei 25° und 760 mm Druck, beobachtet sind und die auch infolge ihrer größeren Genauigkeit den höchsten Grenzwert für k, nämlich rund 10000, ergeben.

Tabelle 8.

t °C	p mm Hg	$n_{max.}$	ε in Promille	k größer als
25	760	12500	1/2	10070
25	760	15600	1	8880
35	760	6060	1/2	6440
25	565	12300	1	7550
14,2	440	12200	1	6120
18,2	440	9900	1	5480
10,0	265	7200	1	3690

Die letztgenannte Zahl bedeutet also, daß bei 25° und 760 mm Druck jedes N_2O_4-Molekül durchschnittlich jedenfalls mehr als $10000\,(1-\alpha) = 8100$ Dissoziationen/sec durchmacht, oder daß in rund 10^{-4} sec jedes Molekül mindestens *einmal* zerfällt. In dieser Zeit hat ein Molekül durchschnittlich nur etwa 10^6 Zusammenstöße erlebt.[1])

Zusammenfassung. — Die Schallgeschwindigkeit in Stickstofftetroxyd wird bei verschiedenen Drucken und Temperaturen nach der Thiesenschen Methode des geschlossenen Zylinderresonators gemessen. Dabei zeigt sich bis zu Frequenzen von der Ordnung 15000 sec^{-1} keine Andeutung dafür, daß die Schallgeschwindigkeit von der Frequenz abhängt, wie das nach der Theorie der Fall wäre, wenn die Dauer der Einstellung des Dissoziationsgleichgewichts vergleichbar wäre mit der Schwingungsdauer des Schalls. Vielmehr stimmt der Absolutwert der Schallgeschwindigkeit sehr gut mit der Annahme überein, daß jene Dauer der Gleichgewichtseinstellung *klein* ist gegen die Schwingungsdauer.

Mit Rücksicht auf die genauesten Messungen bei 25° C und 760 mm Druck kann behauptet werden, daß die Geschwindigkeitskonstante des Zerfalls k unter den angegebenen Verhältnissen sicher größer als 10000 ist, daß also in rund 10^{-4} sec jedes N_2O_4-Molekül durchschnittlich mindestens einmal zerfällt.

Die früher durchgeführte kritische Prüfung der Thiesenschen Methode wird ergänzt durch die experimentelle Bestätigung der Theorie des ersten unharmonischen Nebenspektrums eines geschlossenen Zylinders.

1) Vgl. L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie I. S. 82. 1896.

(Eingegangen 12. März 1923.)

3. *Die allgemeine Relativitätstheorie und das Merkurperihel;* *von Gerold von Gleich.*

Bekanntlich beruht die allgemeine Relativitätstheorie[1]) auf dem Postulat, daß das Quadrat des Linienelements im R_4, also der Ausdruck

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i \cdot dx_k$$

eine Invariante sein soll. Im Anschluß an seine frühere Theorie, die „spezielle Relativitätstheorie", deren mathematischer Inhalt kurz gesagt die Lorentztransformation ist, verlangt Einstein ferner, daß die Koeffizienten g_{ik} der Koordinaten im R_4, oder anders ausgedrückt die Komponenten des sogenannten „Fundamentaltensors" für $i = k = 1, 2, 3$ wenig von -1, für $i = k = 4$ wenig von $+1$, alle übrigen g_{ik}, $i \neq k$ wenig von Null verschieden sein sollen. Dazu tritt noch die Determinantenbedingung der Koordinatentransformationen, auf die sich die Invarianz von ds^2 bezieht. Sie wird mit der Kroneckerschen Bezeichnung

$$|g_{ik}| = -1; \quad i, k = 1, 2, 3, 4 \tag{1}$$

geschrieben.

Einstein hat nun durch genauere spezielle Normierung[2]) der g_{ik} eine Darstellung der Erscheinungen der Gravitation erzielt, die vor allem dadurch besticht, daß sie mit Hilfe des R_4, also sozusagen durch Heranziehung einer unseren Sinnen unzugänglichen vierten Dimension, das Rätsel der Schwerkraft tatsächlich zu erklären scheint. Insbesondere konnte Einstein durch seine Formeln die seit Jahrzehnten bekannte Unstimmigkeit in der Bewegung des Merkurperihels zahlenmäßig genau so wiedergeben, wie sie Leverrier aus den Beob-

1) Vgl. A. Einstein, Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipzig 1916.

2) Vgl. Einstein, a. a. O., S. 57 ff.

achtungen ermittelt hatte. Die Erklärung dieser Unstimmigkeit konnte von der klassischen Mechanik nur mit Hilfe besonderer Hypothesen[1]) geleistet werden, unter denen die Seeligersche[2]) von der Einwirkung fein verteilter interplanetarischer Massen wohl an erster Stelle steht.

Angesichts der grundlegenden Wichtigkeit, die der Darstellung der Merkurperihelbewegung durch die Formeln der allgemeinen Relativitätstheorie für die endgültige Beurteilung der letzteren innewohnt, erscheint eine genaue, nicht voreingenommene Prüfung des Falles dringend nötig, ehe es für schlechthin erwiesen angesehen wird, daß ganz einfach die „Metrik" des R_4 in kausalem Zusammenhang mit der Anomalie des Merkurperihels stehe.

Die jedenfalls unanfechtbare Theorie der geodätischen Linie[3]), also das auch schon früher, aber in anderer Art mit der Dynamik in Verbindung gebrachte Variationsprinzip führte Einstein zunächst auf die Gleichungen

$$(2) \qquad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{kh} \left\{ \begin{matrix} k\,h \\ i \end{matrix} \right\} \cdot \frac{dx_k}{ds} \cdot \frac{dx_h}{ds} = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

worin

$$(3) \qquad \left\{ \begin{matrix} k\,h \\ i \end{matrix} \right\} = \sum_l g^{il} \left[\begin{matrix} k\,h \\ l \end{matrix} \right] = g^{i1} \left[\begin{matrix} k\,h \\ 1 \end{matrix} \right] + g^{i2} \left[\begin{matrix} k\,h \\ 2 \end{matrix} \right] + g^{i3} \left[\begin{matrix} k\,h \\ 3 \end{matrix} \right] + g^{i4} \left[\begin{matrix} k\,h \\ 4 \end{matrix} \right],$$

also das Christoffelsche Symbol zweiter Art und

$$(4) \qquad \left[\begin{matrix} k\,h \\ l \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{hl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_h} - \frac{\partial g_{kh}}{\partial x_l} \right)$$

das Christoffelsche Symbol erster Art ist. Die Aufgabe bestand somit darin, die Gleichungen (2) mit den Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik

$$(5) \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{k^2 x_i}{r^3} = 0 \quad \text{bzw.} \quad (5\,a) \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \qquad i = 1, 2, 3$$

zu identifizieren.

---

1) Vgl. die neueste Zusammenstellung durch S. Oppenheim, Enc. der math. Wissensch. VI. 2. B. S. 132ff.

2) Vgl. Münchener Ak. Ber. 1901, 1906; Münchener Ak. Abh. 1891.

3) Vgl. Einstein, a. a. O., S. 29, 30; Enc. der math. Wissensch. VI. 2. B. S. 191/93.

Dabei ist U das Gravitationspotential, dem vom Standpunkt der Gleichungen (5a) aus offenbar eine willkürliche Konstante angehängt werden kann; $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; k ist die Konstante von Gauss, gegeben durch die Beziehung $(1 + m) \cdot k^2 = n^2 a^3$, wobei m die Masse des Planeten in Einheiten der Sonnenmasse, a die Halbachse der Planetenbahn in astronomischen Einheiten, $n = 2\pi/T$ die mittlere Winkelgeschwindigkeit ist. Weil m sehr klein gegen 1 ist, darf man gewöhnlich $k = (2\pi/T) \cdot a^{3/2}$ oder $k^2 = n^2 a^3$ nehmen. Da ferner bei Einstein $x_4 = c\,t$ (in manchen Darstellungen seiner Theorie auch $= c\,t \cdot \sqrt{-1}$) ist, wobei c die Lichtgeschwindigkeit, t die relativistische, also von den Raumkoordinaten *nicht unabhängige* Zeit ist, hat Einstein eine Längeneinheit, die $c$mal größer ist, als in der Astronomie üblich. Die Gleichungen (5) der klassischen Mechanik sind daher zu schreiben:

$$(6) \qquad \frac{d^2 x_i}{d x_4^2} + \frac{\alpha}{2} \frac{x_i}{r^3} = 0; \quad i = 1, 2, 3; \quad \text{worin } \alpha = 2k^2/c^2.$$

Versteht man jetzt unter t die *unabhängige* Variable des Problems, also die alte „absolute" Zeit, so ist für die klassische Mechanik selbstverständlich $d^2 x_4/d t^2 = 0$. In der Relativitätstheorie gilt natürlich diese Beziehung nicht mehr; denn die relativistische Zeit x_4 ist keine unabhängige Variable mehr, sondern sie ist mit den Raumkoordinaten durch das Postulat (1) als Bedingungsgleichung verbunden. Daraus folgt ohne weiteres, daß (1) und (6) niemals streng, sondern nur in Annäherung miteinander vereinbar sein können.

Zur Darstellung von (5) durch (2) verzichtet daher Einstein [1]) zunächst ganz auf sein Relativitätspostulat: er setzt für seine erste Annäherung einfach $d x_4 = d t = d s$. Abgesehen vom konstanten Faktor c ist das einfach der korrekte Standpunkt der klassischen Mechanik. Strenggenommen wäre allerdings $d x_4 = d s = c \cdot d t$ bzw. $= c \cdot d t \cdot \sqrt{-1}$ zu schreiben.

Da nun $d s$ ebenso wie $d x_4$ den großen Faktor c enthält, so erlaubt sich Einstein in (2) die $d x_i/d s$ für $i = 1, 2, 3$ als kleine Größen erster Ordnung zu behandeln, also zu vernachlässigen. Dies läuft darauf hinaus, die Planetengeschwindig-

---

1) Vgl. Einstein, a. a. O., S. 58.

keit gegen die Lichtgeschwindigkeit zu vernachlässigen. Damit wird (2) nach Einstein zu

$$\frac{d^2 x_i}{d t^2} + \left\{ \begin{matrix} 44 \\ i \end{matrix} \right\} = 0; \qquad i = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Unter der Voraussetzung, daß g_{44} von 1, g_{11}, g_{22}, g_{33} von -1, die übrigen g_{ik} von Null nur um kleine Größen erster Ordnung verschieden sind, ergibt sich aus (3) und (4)

$$\left\{ \begin{matrix} k\,h \\ i \end{matrix} \right\} = \pm \left[\begin{matrix} k\,h \\ i \end{matrix} \right]$$

(Vorzeichen, je nachdem $i = 1, 2, 3$ bzw. $= 4$ ist).

Denn die Adjungierten g^{ik}, die in (3) auftreten, sind von derselben Größenordnung wie die zugehörigen Elemente g_{ik}. Daher wird (3) zu

$$\left\{ \begin{matrix} k\,h \\ i \end{matrix} \right\} = g^{ii} \left[\begin{matrix} k\,h \\ i \end{matrix} \right],$$

wobei $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$; $g^{44} = +1$ zu nehmen ist.

Von den ursprünglichen 16 (d. h. der Symmetrie wegen nur 10 verschiedenen) Elementen sind also für die erste Annäherung nur noch vier vorhanden, für jede der Gleichungen (2) nur je eines. Überdies wird $d^2 x_4 / d t^2 = 0$, was ja für die klassische Mechanik notwendig und selbstverständlich ist. Die übrigen Gleichungen (2) werden

$$\frac{d^2 x_i}{d t^2} = \left[\begin{matrix} 44 \\ i \end{matrix} \right]; \qquad i = 1, 2, 3, \tag{7a}$$

wobei nach (4)

$$\left[\begin{matrix} 44 \\ i \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{i4}}{d x_4} + \frac{\partial g_{i4}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_i} \right)$$

ist. Nun sind für die Darstellung der Gleichungen (5) naturgemäß die g_{i4}, die mit Raum- *und Zeit*koordinaten gleichzeitig verbunden sind, durchaus unerwünscht.

Einstein setzt daher diese unbequemen Koeffizienten einfach gleich Null und zwar nicht nur für die erste Annäherung, sondern auch für seine strenge Theorie. Ein innerer Grund, um die g_{i4} so verschieden gegen die übrigen Tensorkomponenten zu behandeln, liegt keineswegs vor. Offensichtlich handelt es sich nur darum, möglichst bequem den Anschluß an (5a) zu erzielen. Es ist nicht einzusehen, weshalb die Metrik des R_4, für die doch Gleichwertigkeit und Gleich-

artigkeit von Raum- und Zeitkoordinaten gerade als etwas Wesentliches proklamiert worden war, zwar die g_{ik} für $i \neq k$, $i, k = 1, 2, 3$ verschieden von Null gestaltet haben sollte, wie dies in der strengen Theorie Einsteins nachher verlangt wird, dagegen für $i, k = 4$ es auch in der strengen Lösung beim Werte der speziellen Relativitätstheorie, d. h. bei Null belassen sollte. Der von der Theorie aufgenommene Gedanke Minkowskis von der Gleichwertigkeit raumartiger und zeitartiger Koordinaten für die Ableitung der Gravitationstheorie ist also wieder aufgegeben. Außerdem muß die Nullsetzung der g_{i4} als ein rein willkürlicher Eingriff des Rechners betrachtet werden, der unleugbar die bisherige große Allgemeinheit der Theorie stark beeinträchtigt.

Der rechnerische Vorteil ist allerdings sehr groß. Denn weil nun einfach

$$\begin{bmatrix} 44 \\ i \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i}; \quad i = 1, 2, 3 \tag{7b}$$

wird, so werden die (7a) zu

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i}; \quad i = 1, 2, 3, \tag{7c}$$

d. h. die formelle Übereinstimmung mit (5a) ist durch die Nullsetzung der g_{i4} erreicht. Man braucht nämlich jetzt nur

$$-\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i} = 2\frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{7d}$$

zu setzen. Da mit Rücksicht auf Einsteins Längeneinheit $U = k^2/c^2 r$, also $\partial U/\partial x_i = -k^2 x_i/c^2 r^3$ ist, so ergibt die Integration von (7d)

$$g_{44} = \text{const} - \frac{2k^2}{c^2 r} = 1 - \frac{\alpha}{r}, \quad \text{wenn } \alpha = \frac{2k^2}{c^2}. \tag{8}$$

Damit ist das Problem der Form nach in der Hauptsache gelöst. Allein niemand wird deshalb behaupten dürfen, die Hypothese der Relativitätstheorie gebe eine „Erklärung" der Gravitation oder die letztere stehe im kausalen Zusammenhange mit der Metrik des R_4. Denn die Festsetzung (7d) oder was dasselbe ist, die Festsetzung $2U = 1 - g_{44}$ ist lediglich die Folge *willkürlicher* Substitutionen. Daß von dem sehr verwickelten Christoffelschen Symbol zweiter Art durch Einsetzen geeigneter Spezialwerte schließlich nur noch

das einzige Glied $\frac{1}{2}\partial g_{44}/\partial x_i$ übrig bleibt, ist weiter nichts als eine selbstverständliche mathematische Operation. Irgendeine Naturerkenntnis wird dadurch nicht vermittelt.

Bestände nicht überdies die Determinantenbedingung (1), der die bisherige Festsetzung der g_{ik} offenbar noch nicht genügt, so könnte mit den obigen Substitutionen und mit dem Werte $g_{44} = 1 - \alpha/r$ das Problem als gelöst gelten und zwar besteht die Lösung darin, daß von den 16 (10) Koeffizienten des ursprünglichen Determinantenschemas nur noch vier übrig geblieben sind. Drei davon sind gleich -1, der vierte Koeffizient, der von dx_4, spielt eine ausgesprochene Sonderrolle, indem er bis auf einen konstanten Faktor und eine additive Konstante, die dem Determinantenschema angepaßt wurde, einfach dem Gravitationspotential gleichgesetzt wird.

Wenn also Einstein sagt[1]): „Das Merkwürdige an diesem Resultat ist, daß nur die Komponente g_{44} des Fundamentaltensors allein in erster Näherung die Bewegung des materiellen Punktes bestimmt“ ...., so werden andere, nicht Voreingenommene daran durchaus nichts Merkwürdiges finden, weil eben einfach dieser Komponente die genannte Rolle zugeschoben, alle übrigen Komponenten aber so normiert wurden, daß sie keine Rolle mehr spielen können. Gleichzeitig ist damit bei genauerem Zusehen die ganze vierte Dimension Minkowskis wieder ausgeschaltet worden und zwar auch für die zweite Annäherung, die ja eben das Kriterium für die Relativitätstheorie liefern soll.

Von den sieben (vier) Komponenten g_{i4}, die auch mit der Zeitkoordinate verbunden sind, bleibt auch in der „strengen“ Lösung nur noch g_{44} übrig, das neben der Determinante $|g_{ik}|$; $i = 1, 2, 3$ mit nur 3^2 Elementen ein vereinzeltes Sonderdasein führt.

Wegen $g_{i4} = 0$; $i = 1, 2, 3$ besteht nämlich die Entwicklung der ursprünglichen Determinante von 4^2 Elementen nur noch in dem Produkt

$$|g_{ik}|_{i,k=1,2,3,4} = g_{44} \cdot |g_{ik}|_{i,k=1,2,3}. \tag{9}$$

Die Adjungierte g^{44} ist also $= |g_{ik}|$; $i, k = 1, 2, 3$, was ich mit folgendem Schema schreiben will:

---

1) a. a. O., S. 59.

$$(10)\qquad g^{44} = \begin{vmatrix} -(1+\lambda) & \beta & \gamma \\ \beta & -(1+\mu) & \varepsilon \\ \gamma & \varepsilon & -(1+\nu) \end{vmatrix}.$$

β, γ, ε, λ, μ, ν sind kleine Größen erster Ordnung. Setzt man hier

$$-(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu) = -\left(1+\frac{\alpha}{r}\right) \quad \text{und} \quad \beta = \gamma = \varepsilon = 0,$$

so läßt sich die Determinantenbedingung (1) statt mit $g^{44} \cdot g_{44} = -1$ durch

$$(11)\qquad g^{44} \cdot g_{44} = -\left(1-\frac{\alpha^2}{r^2}\right)$$

darstellen. Nebenbei bemerkt, begnügt sich Einstein hiermit auch in seiner zweiten Annäherung. Damit aber g^{44} auch mit β, γ, $\varepsilon \neq 0$ gleich $-(1+\alpha/r)$ wird, ist, wie man sich leicht überzeugt, zu setzen

$$\lambda+\mu+\nu = \frac{\alpha}{r}; \quad \lambda\mu-\beta^2 = \lambda\nu-\gamma^2 = \mu\nu-\varepsilon^2 = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen wird durch

$$\lambda = \frac{\alpha x^2}{r^3}, \quad \mu = \frac{\alpha y^2}{r^3}, \quad \nu = \frac{\alpha z^2}{r^3}$$

befriedigt, wo der besseren Übersicht wegen x, y, z statt x_1, x_2, x_3 gesetzt ist. Daraus folgt aber

$$\beta = -\frac{\alpha xy}{r^3}, \quad \gamma = -\frac{\alpha xz}{r^3}, \quad \varepsilon = -\frac{\alpha yz}{r^3}.$$

Auf diesem oder ähnlichem Wege mag wohl Einstein seine strenge Lösung des Problems gefunden haben, nämlich die Substitution

$$(12)\qquad \begin{cases} g_{11} = -\left(1+\frac{\alpha x^2}{r^3}\right); \quad g_{22} = -\left(1+\frac{\alpha y^2}{r^3}\right); \\ \qquad\qquad g_{33} = -\left(1+\frac{\alpha z^2}{r^3}\right); \\ g_{12} = -\frac{\alpha xy}{r^3}; \quad g_{13} = -\frac{\alpha xz}{r^3}; \quad g_{23} = -\frac{\alpha yz}{r^3}. \end{cases}$$

Dazu tritt das bereits früher festgesetzte

$$g_{44} = +\left(1-\frac{\alpha}{r}\right).$$

Die Unempfindlichkeit des Determinantenschemas gegenüber einer gegenseitigen Vertauschung der Koordinaten, die

natürlich möglich sein muß, ist durch die Symmetrie der Substitution erreicht. Eine zwingende innere Notwendigkeit gerade für diese Substitution liegt aber durchaus nicht vor; dies um so weniger, als, wie bereits erwähnt, der Determinantenbedingung nicht streng, sondern nur in Annäherung genügt wird.

Mit Hilfe von (12) hat nun Einstein[1]) die Bewegung des Merkurperihels während eines Planetenumlaufs mit

$$(13) \qquad \Delta\varphi = \frac{24\pi^3 a^3}{T^2 c^2 (1-e^2)} = \frac{3\pi\alpha}{a(1-e^2)}$$

dargestellt. Das gibt im Jahrhundert 42″.

Ein solches Ergebnis besticht auf den ersten Blick ganz außerordentlich und die Darstellung der Bewegung des Merkurperihels ist noch mehr als die beobachtete Lichtablenkung in der Nähe der Sonne und als die Rotverschiebung der Spektrallinien als schlagender Beweis für die Relativitätstheorie angesehen worden. Dabei ist aber wohl nicht genügend berücksichtigt worden, daß die Gravitationstheorie der Relativitätshypothese, wie oben gezeigt, durch eine Reihe von rein willkürlichen Festsetzungen gewonnen wurde.

Auch die neuere Bearbeitung der Beobachtungen durch S. Newcomb[2]) gibt fast ganz genau den Leverrierschen Wert $\Delta\varphi = 41{,}2'' \pm 2{,}1$ m. F. Allein noch neuere Bearbeitungen[3]) der Beobachtungen erklären diesen Wert für entschieden zu groß. Dabei wäre es offenbar erträglicher, wenn die Theorie *unter* diesen Werten bliebe, statt sie zu überschreiten.

Das ist z. B. bei dem von der Relativitätstheorie Einsteins unabhängigen Gesetz[4]) von der *Abhängigkeit der Masse*

---

1) Vgl. A. Einstein, Sitzungsberichte, Berlin 1915. S. 831ff; vgl. auch K. Schwarzschild, Sitzungsberichte, Berlin 1916. S. 189 und die Referate A. Kopff, Grundzüge der Relativitätstheorie. Formel (461)ff., sowie Fr. Kottler in der Enc. der math. Wissensch. VI. 2. B. S. 207 ff.

2) Vgl. Fund. Const. S. 109, 185, zitiert nach S. Oppenheim, Enc. d. math. Wissensch. VI. 2. B. S. 125 u. Fr. Kottler, ebenda S. 212.

3) E. Wiechert, A. N. 211. S. 275ff.: 34″, Grossmann aus Meridiankreisbeobachtungen allein: 29″, und aus Meridiankreis- und Durchgangsbeobachtungen kombiniert: 38″; vgl. Fr. Kottler, Enc. d. math. Wiss. VI. 2. B. S. 213/14; A. N. 219. S. 41, 195; Zeitschr. f. Phys. 5. S. 280. 1921.

4) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. S. 329. 1919; P. Lenard, Über Äther und Uräther. S. 49 u. 65. 1922.

von der Geschwindigkeit der Fall. Dieses ergibt nämlich

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}, \tag{14}$$

oder 7″ säkular. Die Übereinstimmung der Formeln (13) und (14) bis auf einen Zahlenkoeffizienten ist zunächst verblüffend. Zum Überfluß habe ich $\Delta\varphi$ auf einem ganz anderen Wege wie Sommerfeld, nämlich mit der bekannten Formel für die Säkularstörung des Perihels

$$d\tilde{\omega}/dt = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e \cdot n \cdot a} R\cos w \quad [1])$$

berechnet, indem ich in der störenden Kraft R die Masse m durch $m_0/\sqrt{1-\beta^2}$ ersetzte, wo $\beta = v/c$ und m_0 die „Ruhmasse" ist. Ich fand so genau denselben Ausdruck und Wert.[2])

Nun zeigt sich aber, daß auch völlig anders geartete Theorien für das Merkurperihel Formeln von genau derselben Bauart nur mit anderen Zahlenfaktoren liefern. So ergibt das Webersche Gesetz[3]) mit der Anziehungskraft

$$-k^2/r^2\left[1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right]$$

(k Gausssche Konstante)

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi k^2}{c^2 a(1-e^2)} = \frac{8\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}, \tag{15}$$

d. h. 14″ säkular. Denselben Wert liefert das Gesetz von C. Neumann, das für das Potential den Ausdruck $k^2/r\,(1 - 1/c\; dr/dt)$ einführt.[4])

Das Riemannsche Gesetz mit dem Potential[3])

$$k^2\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{c^2} f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\right]$$

gibt

$$\Delta\varphi = \frac{16\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}, \tag{15a}$$

d. h. 28″ säkular.

---

1) Vgl. z. B. Enc. d. math. Wissensch. VI. 2. S. 742.

2) Ich finde dies nachträglich bestätigt durch S. Oppenheim, Enc. d. mathem. Wissenschaft VI. 2. B. S. 171, wo die Arbeiten von A. Wilkens, F. Wacker und W. de Sitter zitiert werden.

3) F. Tisserand, Mécanique céleste IV. S. 502ff.

4) S. Oppenheim in Enc. math. Wissensch. VI. 2. B. S. 154ff.

Der Versuch[1]), beide Gesetze mit ganzzahligen Faktoren multipliziert zu kombinieren, ermangelt der inneren Begründung, auch wenn damit eine „genauere" Darstellung der Beobachtungen ermöglicht wird.

Das Gausssche Gesetz[2]) mit der Gravitationskraft

$$-\frac{k^2}{r^3}\left[1+\frac{1}{c^2}\left(2u^2-3\frac{dr^2}{dt^2}\right)\right]$$

liefert denselben Wert wie das Riemannsche.

P. Gerber erhält mit seinem Potential[3])

$$\frac{k^2}{r}\left(1+\frac{1}{c^2}\frac{dr}{dt}\right)^2$$

genau die Formel Einsteins[4]) und damit den Leverrier-Newcombschen Wert der Perihelbewegung. Allein die Begründung seines Potentials kann nicht als stichhaltig gelten.

Auf die mehr oder weniger künstlichen Aptierungen des Potentials oder der Gravitationskraft näher einzugehen, erübrigt sich, da es sich dort um eine Art von empirischen Korrektionen handelt.[5]) Ich erwähne nur kurz das bereits auf Newton zurückgehende Anziehungsgesetz $-k^2/r^{2+a}$ und das Seeligersche $-(k^2/r)\cdot e^{-\beta r}$.

Solche Gesetze liefern bei geeigneter zahlenmäßiger Festsetzung der Konstanten a, β natürlich den gewünschten Perihel-effekt. Man kann sich allgemeiner überzeugen, daß sehr verschiedenartige kleine Änderungen am analytischen Ausdruck des Potentials oder der Gravitationskraft Bewegungen des Perihels hervorbringen, die im Ausdruck sehr wenig oder gar nicht verschieden ausfallen. Der Grund liegt darin, daß wir es meist mit dem ersten oder den beiden ersten Gliedern einer Reihenentwicklung zu tun haben, die nach den Potenzen

---

1) M. Lévy, Compt. rend. 110. S. 545; zitiert nach Oppenheim, a. a. O., S. 156.

2) F. Tisserand, Compt. rend. 110. S. 313.

3) Zusatzglieder zum Potential mit dr/dt in der ersten Potenz ergeben nur periodische Ungleichheiten in der Perihelbewegung, keine säkularen.

4) E. Gehrcke, Zur Kritik und Geschichte der neueren Gravitationstheorien, Ann. d. Phys. 51. S. 123. 1916 und P. Gerber, Ann. d. Phys. 52. S. 415ff. 1917.

5) Näheres bei S. Oppenheim, Enc. d. mathem. Wissensch. VI. 2. B. S. 147ff.

der sehr kleinen Größe $1/c^2$ fortschreitet. Dasselbe gilt natürlich von Reihen, die nach Potenzen von $1/r$ fortschreiten, sobald deren Koeffizienten nur klein genug sind. So liefert z. B. eine Anziehungskraft

$$-\frac{k^2}{r^2}\left(1+\frac{\eta}{r}\right) \text{ oder ein Potential } \frac{k^2}{r}\left(1+\frac{\eta}{2r}\right),$$

indem man das daraus folgende Energieintegral

$$\dot{r}^2+(r\dot{\varphi})^2=k^2\left[\frac{2}{r}\left(1+\frac{\eta}{2r}\right)-\frac{1}{a}\right]$$

zwecks Elimination von dt durch das Flächenintegral $r^2\dot{\varphi}=k\sqrt{p}$ dividiert (das bekanntlich das Ergebnis der Elimination des Attraktionsgesetzes ist), den Ausdruck

$$r=\frac{p_1}{1+e_1\cos(1-\gamma/2)\varphi}$$

worin

$$\gamma=\frac{\eta}{p};\ p_1=p(1-\gamma);\ p=a(1-e^2);\ e_1=e\left[1-\frac{\gamma}{2}(1+e^2)\right].$$

Man sieht, daß eine Ellipse vorliegt, deren große Achse beweglich ist, und erhält durch leichte Überlegungen $\Delta\varphi=\pi\cdot\gamma=\pi\cdot\eta/a(1-e^2)$.

Wenn nun $\eta=q\,k^2/c^2$ ist, so folgt

$$\Delta\varphi=q\cdot\frac{\pi k^2}{a\cdot c\cdot(1-e^2)}=q\cdot\frac{4\pi^2a^2}{T^2c^2(1-e^2)} \tag{16}$$

oder $q\cdot 7''$ säkular.

Setzt man z. B. der linken Seite des klassischen Energieintegrals

$$v^2=k^2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

willkürlich den Faktor $1/(1-v^2/c^2)$ oder, was dasselbe ist, der rechten Seite den Faktor

$$1+\frac{k^2}{c^2}\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

hinzu, so hat dies denselben Effekt, als würde in (16) $q=4$ gesetzt. In den oben besprochenen Fällen hat man bei Einstein und Gerber $q=6$, bei Riemann und Gauss $q=4$, bei Weber und Neumann $q=2$, bei Lenard $q=1$.

Die Perihelbewegung beträgt also jedesmal ein ganzzahliges Vielfaches von rund sieben Bogensekunden im Jahrhundert. Wir haben es immer nur mit dem Anfangsglied einer

sehr rasch konvergierenden Reihe zu tun und es ist offenbar unzulässig, aus diesem Anfangsglied allein Schlüsse auf den Bau der Reihe ziehen zu wollen oder gar auf die funktionellen Zusammenhänge, die zur Aufstellung der Reihe geführt haben. Daher kann die Perihelbewegung des Merkur selbst bei guter zahlenmäßiger Darstellung an sich kein sicheres Kriterium für die Relativitätstheorie abgeben.

Nach allem darf wohl gesagt werden, daß für die Erklärung der Gravitation die Heranziehung des R_4 mit seiner Metrik und die zwar ästhetisch anziehende, aber immerhin umständliche Tensoranalysis des R_4 einer rechnerischen Energieverschwendung nahe kommen. Denn bei genauem Zusehen spielt ja in der Gravitationstheorie der R_4 durchaus nicht mehr die ihm ursprünglich zugedachte Rolle. Vielmehr läuft hier die Relativitätstheorie, die spezielle, wie die allgemeine nur auf folgende Sätze hinaus:

Die Dynamikgleichungen der klassischen Mechanik, nämlich

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \qquad i = 1, 2, 3 \tag{17}$$

im R_3 bzw. ihre bekannten Integrale

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = k\sqrt{p} \tag{17a}$$

und

$$v^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{17b}$$

(letzteres Energieintegral auch zu schreiben $v^2 = 2U + c_0$; $c_0 = -k^2/a$) stellen nur eine „Annäherung" an die „Wahrheit" dar. Denn daneben besteht noch eine relativistische Bedingungsgleichung

$$F(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t, c) = 0$$

oder auch

$$F(v, t, c) = 0, \tag{18}$$

worin c die Lichtgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit des Massenpunktes ist. (18) wirkt sich in (17) dadurch aus, daß das Potential kleine Zusatzglieder von der Größenordnung $(v/c)^2$ erhält. Ganz ähnliche Zusatzglieder geben aber auch die verschiedenen Theorien, die mit der Relativitätshypothese als solcher gar nichts zu tun haben. Auch muß noch darauf hingewiesen werden, daß die so scharf in unsere bisherigen

Gesamtanschauungen eingreifende Gleichung (18) eigentlich nur dem Michelsonschen Versuche zuliebe geschaffen ist. Dessen sonstige Erklärungsmöglichkeiten sind aber noch lange nicht erschöpft.[1]) Nach neueren Versuchen von Dayton C. Miller[2]) soll übrigens im Michelson-Versuch ein „Ätherwind" festgestellt worden sein. Damit wäre in der Tat das Relativitätsprinzip in der Translation durchbrochen. Doch muß näheres abgewartet werden.

Auch für mich war lange Zeit das so universell anmutende Determinantenschema des R_4 im Verein mit der auf den ersten Blick so einfach erscheinenden Invarianzbedingung von ds^2 in hohem Grade bestechend. Allein diese Allgemeinheit ist doch nur eine scheinbare. Die willkürliche Unterdrückung der g_{i4} habe ich bereits hervorgehoben. Weiterhin aber zeigt sich, daß nicht etwa nur in der ersten Näherung, sondern auch in der strengen Lösung durch die spezielle Wahl der Substitutionen (12) weitere sehr erhebliche Vereinfachungen erzwungen wurden, die zwar auf den ersten Blick nicht zu bemerken sind, aber die Allgemeinheit noch weiter einschränken.

Setzt man nämlich die Einsteinschen Werte (12), die den Fundamentaltensor für eine anziehende Masse zu bestimmen haben und den gesuchten Betrag für die Perihelbewegung liefern, in den Ausdruck für die Invariante ds^2 ein, so ergibt sich wegen der Identität:

$$x^2 \cdot dx^2 + 2 \cdot xy \cdot dx \cdot dy + \ldots + z^2 \cdot dz^2 = (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2$$
$$= [\tfrac{1}{2}\, d\,(r^2)]^2 = [r\,dr]^2 = r^2\, dr^2$$

ganz einfach

$$(19) \qquad ds^2 = -(dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{\alpha}{r}\, dr^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \cdot dx_4^2.$$

Mit Ausnahme von $g_{44} = (1 - \alpha/r)$ sind also *auch hier sämtliche* g_{ik} eliminiert, d. h. entweder $= -1$ oder 0 geworden. Das ursprüngliche Determinantenschema, das die komplizierte Metrik der vierdimensionalen Raumes darstellen sollte, ist somit praktisch auch in der strengen Lösung beseitigt. Zudem ist die Determinantenbedingung, die für die Invariantentheorie an sich wesentlich ist, nur angenähert erfüllt. Allerdings ließe

1) Vgl. P. Lenard, Über Äther und Uräther. S. 38ff.

2) Physical Review 19. Nr. 4. S. 407ff. („Ether-Drift Experiments at Mount Hamilton Observatory").

sich hier abhelfen. Die Metrik des R_4 braucht nämlich nur dahin abgeändert zu werden, daß g_{44} den Wert

$$\frac{-1}{-(1+a/r)} = 1 - \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \cdots$$

erhält. Wiederholt aber ist geltend zu machen, daß das Verschwinden fast aller Komponenten des Fundamentaltensors keineswegs eine Notwendigkeit der Theorie ist oder ihren charakteristischen Inhalt darstellt, sondern nur die Folge rechnerischer Willkür, die sogar die bestechende Allgemeinheit der Theorie wieder einschränkt.

Der wirkliche Sachverhalt klärt sich durch folgende Betrachtung. Dividiert man (19) mit dt^2, wobei t die *unabhängige* Zeitvariable, also die nichtrelativistische Zeit ist, die der Bedingung (18) *nicht* unterliegt, so folgt

$$(20) \qquad \frac{ds^2}{dt^2} = -v^2 + \frac{dx_4^2}{dt^2} - \frac{a}{r}\left(\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{dx_4^2}{dt^2}\right).$$

Die linke Seite ist wegen $ds = c \cdot dt$ gleich c^2. Da auch in x_4 der Faktor c steckt, schreiben wir $dx_4/dt = c \cdot \tau$. Hier ist v die alte, nichtrelativistische Geschwindigkeit des Planeten und $a/r = 2U$, gleich dem doppelten negativen Potential, wobei $a = -2k^2/c^2$ zu schreiben ist. Damit wird (20) zu

$$(21) \qquad c^2(1-\tau^2) = -v^2 + \frac{2k^2}{c^2 r}\left(\frac{dr^2}{dt^2} + c^2\tau^2\right).$$

Setzt man, wie die klassische Mechanik verlangen würde, $\tau = 1$, so würde (21) zu

$$(22) \qquad v^2 = \frac{2k^2}{r}\left(1 + \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}\right).$$

Fügt man hier rechts eine Konstante $-k^2/a$ hinzu, so erscheint das Energieintegral (17b), in dem aber das Potential mit dem Faktor

$$1 + \frac{1}{c^2}\frac{dr^2}{dt^2}$$

multipliziert erscheint, also wie oben gezeigt, an sich schon eine Perihelbewegung liefern muß; allerdings eine kleinere[1]) als die Einsteinschen Formeln, weil in diesen überdies τ von 1 verschieden ist. Die Invariantenbedingung ist also im Grunde gar nichts anderes als ein modifiziertes Energieintegral.

1) Nämlich nur $^1/_3$, d. h. 14″ säkular, entsprechend $q = 2$ in Formel (16).

Kehren wir jetzt zu (21) zurück, lassen aber die Konstante $-k^2/a$ fort, wie es die Gleichungen (19) und (20) verlangen. Weil ohne jede Voraussetzung über die Exzentrizität aufgestellt, muß (21) auch für Kreisbahnen gelten. Dort ist $r = a$; $dr/dt = 0$, mithin wegen $k^2 = n^2 a^3$ und $v = n \cdot a$, also $k^2/a = n^2 a^2 = v^2$

$$1 - \tau^2 = -\frac{v^2}{c^2} + \frac{2v^2}{c^2}\tau^2; \tag{23}$$

$$1 + \frac{v^2}{c^2} = \tau^2\left(1 + 2\frac{v^2}{c^2}\right); \quad \tau^2 = \frac{1 + v^2/c^2}{1 + 2v^2/c^2};$$

$$\tau = 1 - \frac{v^2}{2c^2} + \ldots$$

Diese „Zeitdilatation" entspricht der Bedingungsgleichung (18). Die weitere Folge der Substitution (12) ist also, daß der Differentialquotient der relativistischen Zeit nach der absoluten Zeit (abgesehen natürlich vom Faktor c) von der Einheit um ein Glied gleich $\frac{1}{2}v^2/c^2$ verschieden ist. Dieses Ergebnis rührt daher, daß auch in der strengen Theorie *sämtliche* g_{ik}, mit Ausnahme von g_{44}, eliminiert oder unwirksam gemacht wurden. Dem klassischen Energieintegral ist an Stelle der richtigen Konstanten $-k^2/a$ das variable Glied $2k^2 \cdot dr^2/c \cdot r \cdot dt^2$ hinzugefügt worden. Dieser an sich recht einfache Zusammenhang wird durch den etwas mühevollen Umweg über die Tensoranalysis des R_4 allerdings verschleiert.

Würde man ferner der (wieder mit c^2 multiplizierten) Gleichung (23) rechts die Konstante $-k^2/a$ hinzufügen, so bekäme man $\tau^2 = 1$, also $dx_4 = c \cdot dt$. Die relativistische Zeit würde wieder zur absoluten. Die Einführung der relativistischen Zeit ist also gleichbedeutend mit der Beseitigung der Konstanten im Energieintegral der klassischen Mechanik.

Zusammenfassend aber ergibt sich: Die Darstellung der Anomalie in der Bewegung des Merkurperihels durch die Einsteinschen Formeln kann, selbst wenn sie den Beobachtungen genügt, was aber, wie gesagt, mindestens noch zweifelhaft ist, niemals einen wirklich stichhaltigen Beweis für die Relativitätstheorie selbst liefern oder gar beweisen, daß die Gravitation eine Folge der sogenannten Metrik des R_4 bei Anwesenheit von größeren Massen sei.

27. Januar 1923.

(Eingegangen 26. Februar 1923.)

4. *Magnetischer Schutzpanzer aus spiralgewickeltem Eisenblech;* *von Carl Benedicks.*

1. Einleitendes.

Bei einem vom Verfasser gebauten Nadelgalvanometer war eine erhebliche Empfindlichkeit (1 mm bei 1 m = $1 \cdot 10^{-8}$ Volt) gut benutzbar unter Anwenden eines einfachen Schutzpanzers (massiver Zylinder 123 × 83 mm, mit 36 mm lichter Weite). Eine gesteigerte magnetische Störungsintensität in der Gegend machte es aber nötig, die Schutzwirkung zu erhöhen. Bekanntlich läßt sich dies ja durch getrennte, einander umschließende Schutzhüllen erreichen, was aber eine nicht unwesentliche Komplikation bedeutet. Nun ist es von W. Esmarch[1]), einer Anregung von P. Lebedew zufolge, in praktisch und theoretisch schöner Weise dargetan worden, daß eine sehr gute Schirmwirkung zu erhalten ist durch einzelne zylindrische Schichten von dicht gewickeltem, weichem Eisendraht, welche von unmagnetischem Material (Karton) getrennt sind. Dieser Befund gab mir Veranlassung zu untersuchen, inwieweit ein einziger, aus einem *spiralgewickelten Eisenband* mit unmagnetischer Zwischenlage bestehender Panzer verwendbar wäre. Es hat sich herausgestellt, daß, besonders in Anbetracht des geringen Eisengewichtes und der einfachen Herstellung, eine nicht unwesentlich verbesserte Schirmwirkung vorhanden ist.

Da das Resultat auch andern nützlich sein könnte, sei darüber kurz berichtet, obschon die Versuche in keiner Weise erschöpfend sind.

2. Methodisches.

Die benutzte Bestimmungsmethode schloß sich der praktischen Anwendung bei dem Nadelgalvanometer eng an.

---

1) W. Esmarch, Ann. d. Phys. 39. S. 1540. 1553. 1912. — Den Hinweis auf diese Arbeit verdankte Verfasser Prof. Esmarch persönlich.

Es verursache eine gegebene magnetische Störung einen Ausschlag α_a einer Magnetnadel, wenn dieselbe ungeschützt ist, und einen Ausschlag α_i, wenn sie sich innerhalb des Panzers befindet. Als Schirmwirkung bezeichnen wir dann den Bruch[1])

$$S = \frac{\alpha_a}{\alpha_i} .$$

Die konstante Störung wurde durch die konstante Drehung (165°) eines gut gealterten Stabmagnetes A (197,4 × 19,0 × 6,4 cmm; Gewicht 190 g; magnet. Moment = 6690 ± 30 C.G.S.[2])) erhalten, welcher um eine zentrale Achse horizontal drehbar gelagert war (Fig. 1).

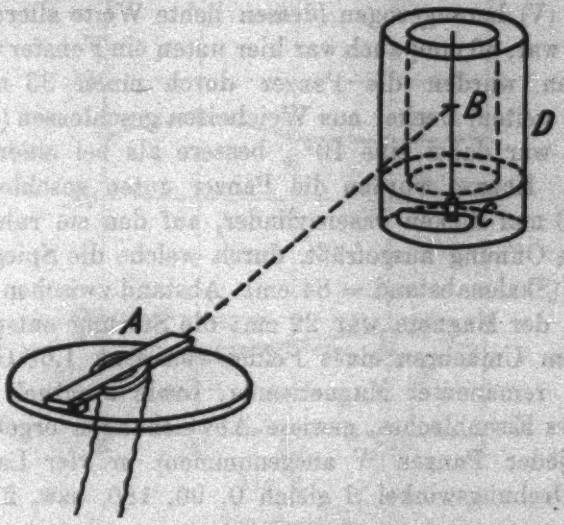


Fig. 1.

Die kleine Magnetnadel B (3 mm) war, an einem unten mit Spiegel C versehenen Glasfaden befestigt, in Quarzfaden aufgehängt, deren Direktionskraft (durch eine variierbare Bifilaraufhängung[3]) so groß genommen wurde, daß die fremden magnetischen Störungen sehr geringen Einfluß ausübten.

1) Dies schließt sich ja dem üblichen Gebrauch an; mehr angebracht wäre $S = (\alpha_a - \alpha_i)/\alpha_i$ zu setzen, was bei einer unwirksamen Hülle $S = 0$, nicht $S = 1$, ergibt; der Unterschied ist aber hier belanglos.

2) Nach Bestimmungen, die im Übungslaboratorium des Physikalischen Instituts der Universität Stockholm unter Leitung von Dr. E. A. Holm ausgeführt wurden.

3) C. Benedicks, Zeitschr. f. Instumentenkunde 42. S. 367. 1922.

Die untersuchten zylindrischen Panzer waren aus einem sorgfältig ausgeglühten, blanken 0,26 mm dicken Weicheisenband[1]) hergestellt, und zwar wurde das freie Bandende um einen 41 mm dicken Dorn einmal gewickelt; nach Weichlötung wurde mit 3 bis 1 Papierbänder als Zwischenlage das Eisenband in einem langsam gehenden Drehstuhl fest aufgewickelt, bis zum Außendiameter 84 mm; die äußerste Windung wurde festgelötet. Nach einträuken mit Wachs-Kolophonium erfolgte Plandrehung der Endflächen. Höhe der verschiedenen Zylinder ist 123 mm.

Behufs Vergleich wurde noch ein Panzer (IV) ohne Zwischenlage dicht gewickelt, sowie ein massiver Weicheisenzylinder (V) herangezogen (dessen lichte Weite allerdings etwas geringer war, 36 mm; auch war hier unten ein Fenster vorhanden).

Oben wurden die Panzer durch einen 33 mm dicken (84 mm weiten) Deckel aus Weicheisen geschlossen (die Schutzwirkung war dabei eine 10% bessere als bei einer Dicke von 16 mm). Ebenso wurden die Panzer unten geschlossen durch einen 33 mm dicken Eisenzylinder, auf den sie ruhten; darin war eine Öffnung ausgefräßt, durch welche die Spiegelablesung geschah (Skalenabstand = 84 cm). Abstand zwischen den Mittelpunkten der Magnete war 22 cm; die Störung entsprach demnach dem Umkehren eines Feldes von etwa 1,68 Gauss.

Da remanenter Magnetismus, sowie eventuell das innere Ende des Eisenbleches, gewisse Abweichungen ergeben konnte, wurde jeder Panzer (V ausgenommen) in vier Lagen untersucht (Drehungswinkel β gleich 0, 90, 180, bzw. 270°).

3. Beobachtungen.

Dicke des Eisenbleches 0,26 mm.

Nr.	Beschreibung	Gewicht kg	Dicke der Zwischenlage, mm	Anzahl Windungen	$\beta = 0°$	$\beta = 90°$	$\beta = 180°$	$\beta = 270°$	Mittel
I.	Blech mit 3-fach Papier	2,50	0,20	45,1	74,0	72,5	78	88	78,0
II.	Blech mit 2- „ Papier	2,75	0,14	50,8	66,3	61,5	78,0	67,8	68,1
III.	Blech mit 1- „ Papier	3,05	0,07	58,8	69,8	63,3	77,1	69,0	69,8
IV.	Dicht gewickelt	3,75	0,0	—	253	270	253	249	256
V.	Massiv	4,20	—	—	545	—	—	—	545

1) Für die Herstellung, bei Munkfors, Schweden, bin ich Herrn Direktor A. Herlenius, Uddeholm, sowie Herrn Oberingenieur Gust. Jansson, zu großem Danke verpflichtet.

Ohne Schutzschirm war der entsprechende Ausschlag etwa $\alpha_a = 1230$ mm.

Graphisch werden die Beobachtungen in Fig. 2 dargestellt.

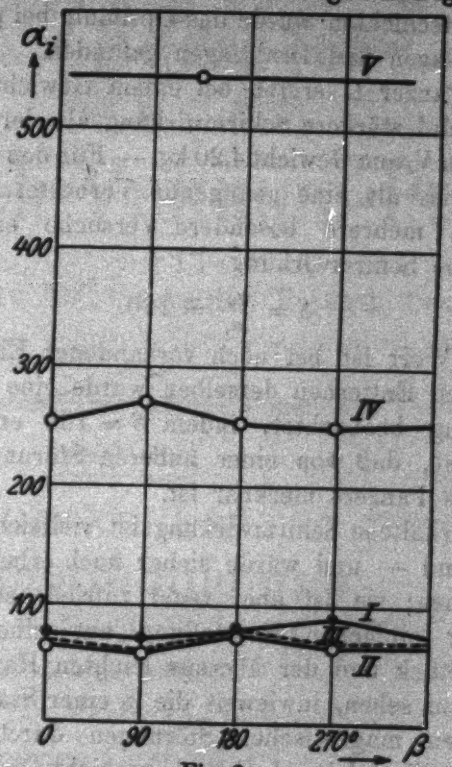


Fig. 2.

4. Diskussion.

1. Schon bei dem dicht gewickelten Panzer (IV) ergibt die Störung wesentlich geringeren (1/2) Ausschlag als beim massiven Panzer (V). (Vergleich jedoch nicht strikt ausführbar).

2. Die mit Papierzwischenlage versehenen Panzer (I—III) ergeben jedoch noch wesentlich geringere Ausschläge.

3. Die Dicke der Zwischenlage hat nur einen unerheblichen Einfluß. Das wesentliche ist offenbar, daß eine unmagnetische Zwischenschicht überhaupt vorhanden ist.

4. Zwar ist der Unterschied zwischen den Panzern I, II, III gering, und die individuellen Unregelmäßigkeiten nicht unbeträchtlich; es zeigt sich aber — auch durch einige nicht angeführte Kontrollversuche — daß II, wo die Zwischenschicht

Inhalt.

Seite

1. G. Dietzrici. Eine mechanische Theorie der Lösungen . . 241

2. Carl Ramsauer. Die Massenbewegung des Wassers bei Unterwasserexplosionen 265

3. A. Michels. Einfluß der Rotation auf die Empfindlichkeit einer absoluten Druckwage 285

4. Friedrich Kottler. Berichtigung zu der Abhandlung „Elektromagnetische Theorie der Beugung“ 320

Die Redaktion der Annalen wird von den unterzeichneten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 9I.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Auszugsweiser Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren sonst möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, des Bandes, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1923. № 20.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 72.

1. *Eine mechanische Theorie der Lösungen;* *von C. Dieterici.*

§ 1. In einer Arbeit über das sogenannte Refraktionsvermögen von Flüssigkeiten[1]) habe ich darauf aufmerksam gemacht, daß es für die Mole einer jeden reinen Flüssigkeit und ebenso für die Mole eines jeden gelösten Stoffes ein bestimmtes optisch wirksames Volumen gibt, das Refraktionsvolumen, welches nach den Beobachtungen des Brechungsexponenten in den Lösungen ungeändert bleibt, so daß der Brechungsexponent für Licht ein und derselben Wellenlänge gegeben ist durch

$$n - 1 = \alpha W + \beta S,$$

worin α und β das charakteristische optische Molenvolumen des Lösungsmittel und der gelösten Substanz, W und S die in der Raumeinheit der Lösung enthaltenen Molenzahlen bedeutet. Und in einer kurzen Ergänzung[2]) hat sich ergeben in Übereinstimmung mit den älteren Beobachtungen von Hallwachs, daß auch in den verdünntesten Lösungen diese charakteristischen optischen Konstanten genau dieselben sind, wie in konzentrierteren, also, daß das optisch wirksame Molekularvolumen unabhängig ist bei konstanter Temperatur von den Änderungen des inneren Druckes, welche beim Lösungsvorgang auftreten.

Es liegt die Frage nahe, was unter dem optisch wirksamen Molenvolumen zu verstehen ist, und in welcher Beziehung es zu dem mechanischen Molenvolumen steht.

Wenn die Vorstellungen der Mitschwingungstheorie, aus denen die obige Gleichung abgeleitet ist, überhaupt eine Berechtigung haben, also die Vorstellung, daß eine vom Lichtäther getragene elektromagnetische Schwingung, welche aus

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 67. S. 337—351. 1922.
2) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 70. S. 558—560. 1923.

dem Vakuum in ein ponderables Medium eintritt, gebremst wird durch die Induktionsvorgänge, welche in den als Resonatoren aufgefaßten Molekeln der ponderablen Materie induziert werden, so muß man schließen, daß das optisch wirksame Molenvolumen bis auf einen von der Wellenlänge des Lichtes abhängigen Resonanzfaktor das Kernvolumen der Molekeln darstellen muß, denn gleichgültig, wie auch die Molekeln gestaltet sein mögen, gehen ja die Induktionsschwingungen in den als Resonatorraum aufgefaßten Molekeln vor sich.

Das optische Resultat besagt dann nichts anderes als: das Kernvolumen der Molekeln einer jeden Substanz, sowohl des Lösungsmittels wie des gelösten Stoffes, ist konstant, unabhängig von den Änderungen des inneren Druckes in Lösungen.

Nun gibt uns die van der Waalssche Gleichung in ihrer allgemeinen Fassung

$$P = p + \pi = \frac{RT}{v - b}, \tag{1}$$

worin p den äußeren Druck, π den Kohäsionsdruck bezeichnet, Aufschluß über den von Tammann als Binnendruck bezeichneten Gesamtdruck P durch Einführung des berühmten van der Waalsschen Kollisionsvolumens b, von dem wir wissen, daß es ein Vielfaches des Kernvolumens β der Molekeln ist, daß also die Gleichung

$$b = f\beta \tag{2}$$

besteht[1]); aber wir wissen, daß trotz einer umfangreichen Literatur über die Größe b es nicht möglich ist, die Abhängigkeit des Kollisionsfaktors f vom Volumen sicher zu erfassen. Wir wissen nur, daß f im Gaszustand gleich 4 sein muß und bei zunehmender Dichte abnimmt bis zu einem Grenzwert $\frac{3\sqrt{2}}{\pi} = 1{,}35$, wenn man sich die Molekeln kugelförmig in engster Packung denkt. Der Kollisionsfaktor f ändert sich also nur innerhalb verhältnismäßig enger Grenzen und da man

1) Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei betont, daß die hier für das Kernvolumen benutzte Bezeichnung β nicht identisch ist mit dem vorn benutzten β als optisch wirksames Molekularvolumen des gelösten Stoffes.

im flüssigen Zustand jedenfalls nicht weit vom Zustand engster Packung entfernt ist und die optischen Untersuchungen auf Konstanz des Kernvolumens geführt haben, soll hier der Versuch gemacht werden, die Theorie der Lösungen auf dem Boden der van der Waalsschen Gleichung des Binnendruckes durchzuführen und an der Hand vorliegender Beobachtungen festzustellen, ob und in welchem Maße man die Größen b innerhalb des flüssigen Zustandes für jede Substanz konstant betrachten kann.

§ 2. Wendet man die van der Waalssche Grundgleichung, ohne eine spezielle Annahme über die Abhängigkeit des Kohäsionsdruckes π und des Kollisionsvolumens b von Temperatur und Volumen zu machen, auf die Kompressibilität reiner Flüssigkeiten an, für die in Amagats Arbeiten ein reiches Beobachtungsmaterial vorliegt, so erhält man für zwei verschiedene äußere Drucke p bei konstanter Temperatur T

$$(p_2 - p_1) + (\pi_2 - \pi_1) = RT\left\{\frac{1}{v_2 - b_2} - \frac{1}{v_1 - b_1}\right\}.$$

Ist $(p_2 - p_1)$ klein, so wissen wir, daß die durch diesen Überdruck bedingte Volumenänderung $v_1 - v_2$ nur sehr klein ist infolge der geringen Kompressibilität der Flüssigkeiten. Das Kollisionsvolumen b kann sich nach allen unseren theoretischen Vorstellungen innerhalb so geringer Volumenänderungen nicht merklich ändern, so daß wir innerhalb dieser $b_1 = b_2 = b$ setzen können. Ebenso kann man wegen der geringen Verschiedenheit von v_2 und v_1 das Produkt $v_1 \cdot v_2 = v_m^2$ setzen, worin $v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}$ durch die Beobachtungen unmittelbar gegeben ist. Dann wird

$$1 + \frac{\pi_2 - \pi_1}{p_2 - p_1} = \frac{RT}{(v_m - b)^2}\,\frac{v_1 - v_2}{p_2 - p_1}.$$

$v_1 - v_2 / p_2 - p_1$ ist die durch die Tabellen Amagats direkt gegebene mittlere Kompression zwischen den Drucken p_2 und p_1; auf der rechten Seite der Gleichung sind also alle Größen bis auf b durch die Beobachtung gegeben.

Wir wissen weiter, daß der Kohäsionsdruck π jedenfalls sehr groß ist — für Wasser nach van der Waals 10 000 Atm., Tammann nimmt 25 000 Atm. an; Stefan berechnet 6600 Atm.; für Alkohol 2200 Atm., für Äther 1200 Atm. — Dieser

Kohäsionsdruck entspringt nach van der Waals der wechselseitigen Anziehung der Molekeln aufeinander. Durch den äußeren Überdruck kann der Molekularabstand nur sehr wenig geändert werden, also wird man annehmen können, daß $\pi_2 - \pi_1$ im Vergleich zu $p_2 - p_1$ nur klein ist, also in erster Annäherung $\pi_2 - \pi_1 / p_2 - p_1$ gleich 0 gesetzt werden kann. Dann folgt die Gleichung:

$$3) \qquad (v_m - b)^2 = RT\frac{v_1 - v_2}{p_2 - p_1} = -RT\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m,$$

welche die Größe b aus unmittelbar durch die Beobachtung gegebenen Daten zu berechnen gestattet, es ist $v_m = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$.

Ob und in welchem Maße die zur Umgehung von Hypothesen für π und b gemachten Vernachlässigungen zulässig sind, kann nur die Beobachtung entscheiden.

In den folgenden drei Tabellen ist für Wasser, Äthylalkohol, Äthyläther nach den Tabellen von Amagat das Resultat der Berechnung bei $t = 20°$ C. niedergelegt. Die Bezeichnungen verstehen sich von selbst, nur sei erwähnt, daß die Volumina in cm^3 pro Gramm umgerechnet und $(v_1 - v_2)$ als Differenz pro 100 Atm. angegeben sind.

Tabelle 1.

Wasser $M = 18{,}02$. $t = 20°$ C. $RT = 1334{,}8$ Atm $\cdot$ cm^3.
Zahlen pro Gramm Substanz nach Amagat Tab. 62. $v_0 = 1{,}00018$ cm^3.

p Atm.	v_{cm^3}	$\frac{v_1 - v_2}{p_2 - p_1}\frac{cm^3}{Atm.}$	$-RT\frac{\partial v}{\partial p}cm^6$	$(v_m - b)_{cm^3}$	b_{cm^3}	$P = \frac{RT}{v - b_m}$ Atm.	$\pi = P - p_{Atm.}$
1	1,00177					5274	5273
		$0{,}0_4469$	0,06260	0,2502	0,7493		
100	0,99713					5374	5274
		$0{,}0_4442$	0,05900	0,2429	0,7520		
200	0,99271					5470	5270
		$0{,}0_4430$	0,05740	0,2396	0,7509		
300	0,98841					5569	5269
		$0{,}0_4419$	0,05593	0,2358	0,7505		
400	0,98422					5663	5263
		$0{,}0_4408$	0,05446	0,2334	0,7488		
500	0,98014					5768	5268
		$0{,}0_4396$	0,05286	0,2299	0,7483		
600	0,97618					5867	5267
		$0{,}0_4385$	0,05139	0,2267	0,7475		
700	0,97233					5970	5270
		$0{,}0_4377$	0,05032	0,2243	0,7461		
800	0,96856					6070	5270
		$0{,}0_4361$	0,04819	0,2195	0,7472		
900	0,96495					6171	5271
		$0{,}0_4353$	0,04712	0,2171	0,7460		
1000	0,96142					6276	5276

$b_m = 0{,}7487$

Tabelle 2.

Äthylalkohol $M = 46{,}06$. $t = 20°$. $RT = 522{,}23$ Atm · cm³.
Zahlen pro Gramm Substanz nach Amagat Tab. 48. $v_0 = 1{,}2170$ cm³.

$p_{Atm.}$	v_{cm^3}	$\frac{v_1 - v_2}{p_2 - p_1}\frac{cm^3}{Atm.}$	$-RT\frac{\partial v}{\partial p}cm^3$	$(v_m - b)_{cm^3}$	b_{cm^3}	$P = \frac{RT}{v - b_m}$ Atm.	$\pi = P - p_{Atm.}$
1	1,2432					1962	1961
		$0{,}0_3 1333$	0,06961	0,2638	0,9728		
100	1,2300					2064	1964
		$0{,}0_3 1170$	0,06110	0,2472	0,9770		
200	1,2183					2164	1964
		$0{,}0_3 1040$	0,05431	0,2331	0,9831		
300	1,2079					2262	1962
		$0{,}0_4 960$	0,05013	0,2239	0,9792		
400	1,1983					2360	1960
		$0{,}0_4 88$	0,04596	0,2144	0,9795		
500	1,1895					2458	1958
		$0{,}0_4 82$	0,04282	0,2069	0,9785		
600	1,1813					2556	1956
		$0{,}0_4 76$	0,03969	0,1992	0,9783		
700	1,1737					2655	1955
		$0{,}0_4 74$	0,03865	0,1966	0,9784		
800	1,1663					2759	1959
		$0{,}0_4 69$	0,03603	0,1898	0,9781		
900	1,1594					2868	1963
		$0{,}0_4 63$	0,03290	0,1814	0,9749		
1000	1,1531					2966	1966

$b_m = 0{,}9770$

Tabelle 3.

Äthyläther $M = 74{,}08$. $t = 20°$ C. $RT = 324{,}70$ Atm · cm³.
Zahlen pro Gramm Substanz nach Amagat Tab. 42. $v_0 = 1{,}3577$ cm³.

$p_{Atm.}$	v_{cm^3}	$\frac{v_1 - v_2}{p_2 - p_1}\frac{cm^3}{Atm.}$	$-RT\frac{\partial v}{\partial p}cm^3$	$(v_m - b)_{cm^3}$	b_{cm^3}	$P = \frac{RT}{v - b_m}$ Atm.	$\pi = P - p_{Atm.}$
1	1,4007					1106	1105
		$0{,}0_3 2323$	0,07543	0,2746	1,1146		
100	1,3777					1200	1100
		$0{,}0_3 200$	0,06494	0,2548	1,1129		
200	1,3577					1296	1096
		$0{,}0_3 170$	0,05520	0,2350	1,1142		
300	1,3407					1390	1090
		$0{,}0_3 153$	0,04968	0,2229	1,1101		
400	1,3254					1487	1087
		$0{,}0_3 133$	0,04319	0,2078	1,1110		
500	1,3121					1584	1084
		$0{,}0_3 122$	0,03961	0,1990	1,1070		
600	1,2999					1684	1084
		$0{,}0_3 112$	0,03637	0,1907	1,1086		
700	1,2887					1788	1088
		$0{,}0_3 103$	0,03344	0,1829	1,1006		
800	1,2784					1896	1096
		$0{,}0_4 95$	0,03085	0,1757	1,0980		
900	1,2698					2007	1107
		$0{,}0_4 90$	0,02922	0,1709	1,0935		
1000	1,2599					2125	1125

$b_m = 1{,}1071$

Die Gaskonstante pro Mole ist gleich $82{,}095 \frac{\text{Atm} \cdot \text{cm}^3}{^\circ\text{C.}}$ gesetzt. Unter P und π ist der Binnendruck nach Gleichung (1) mit dem erhaltenen Mittelwert von b und der Kohäsionsdruck angegeben.

Aus der Berechnung fließen folgende Ergebnisse:

1. Bis zu Überdrucken von 1000 Atm. sind die Werte für b bei allen drei Substanzen so völlig konstant, daß man ohne Bedenken für die Berechnung von P und π den angegebenen Mittelwert von β anwenden kann.

2. Die bei der Berechnung gemachte Annahme, daß der Kohäsionsdruck π sich innerhalb der äußeren Druckgrenzen von 100 Atm. sich nicht merklich ändert, ist zulässig bis zu den Überdrucken von 1000 Atm. Oder es ist bis zu dieser Grenze allgemein zulässig

$$-\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{RT}{(v-b)^2}$$

zu setzen, worin b konstant ist.

3. Bei allen drei Flüssigkeiten ist unter dem Normaldruck ($p = 1$ Atm.) das Kovolumen nur etwa ein Viertel des sichtbaren Volumens oder der für die translatorische Bewegung nach den Anschauungen der kinetischen Gastheorie zur Verfügung stehende Raum ist so beschränkt, daß man kaum noch von einer merklichen Übermittlung der Stöße durch eine freie Weglänge reden kann. Man muß sich vielmehr vorstellen, daß die Stoßfortpflanzung zum größten Teil durch die elastischen Kerne der Molekeln erfolgt, oder daß das Kollisionsvolumen b von van der Waals sich dem Schwingungsvolumen in festen Körpern nähert.

4. Es ist eine notwendige Folge der ausgeführten Berechnung, daß auch die Schallgeschwindigkeit u in Flüssigkeiten sich durch

$$u = \frac{v}{v-b}\sqrt{\frac{RT}{m}K}$$

ausdrücken und mit den angegebenen b-Werten die beobachteten Werte richtig berechnen läßt sofern $K = \frac{c_p}{c_v}$ bekannt ist.

5. Der berechnete Wert für den Kohäsionsdruck π des Wassers von 5270 Atm. ist wesentlich kleiner als der aus den

kritischen Daten nach van der Waals berechnete Wert von 10 700 Atm., liegt aber dem von Stefan[1]) aus der Verdampfungswärme bei 100° C. berechneten Werte 6578 Atm. näher. Bei Alkohol und Äther besteht eine bessere Übereinstimmung. Bei der unsicheren Basis der älteren Berechnungen des Normaldruckes lege ich auf diese Verschiedenheit kein Gewicht.

Zu diesen aus der vorgelegten Berechnung gezogenen Folgerungen füge ich noch folgende Bemerkungen hinzu, ohne sie durch weitere Tabellen zu erhärten.

a) Geht man über die Druckgrenze von 1000 Atm. hinaus und benutzt die Beobachtungen nach Amagats zweiter Methode (methode des contacts), so zeigt sich, daß stets die Größe b mit wachsendem Überdruck um etwa 2—3 Proz. abnimmt, ein Zeichen dafür, daß bei den stärkeren Kompressionen nicht mehr $\partial\pi/\partial p$ vernachlässigt werden kann.

b) Alle anderen von Amagat untersuchten Substanzen — Methylalkohol, Aceton und Schwefelkohlenstoff — zeigen dasselbe Verhalten, geben also bis etwa 1000 Atm. Überdruck konstante b-Werte. Ich stelle das Resultat der Berechnung in Tab. 4 zusammen und vergleiche in ihr auch das Kollisionsvolumen b mit dem optisch wirksamen Volumen für Na-Licht, also die Größe $(n_D - 1)v$.

Tabelle 4.

$t = 20°$ C. Zahlen pro Mole. $RT = 24\,054$ Atm · cm³.

	M.	v_{cm^3}	$v - b_{cm^3}$	b_{cm^3}	$P_{Atm.}$	$(n_D - 1)v$ cm³/Mol	$\frac{b}{(n_D - 1)v}$
Wasser	18,02	18,052	4,561	13,491	5274	6,019	2,24
Äthylalkohol	46,06	57,262	12,282	45,03	1966	21,15	2,13
Äthyläther	74,08	108,764	21,750	82,01	1106	37,36	2,20
Methylalkohol . . .	32,04	40,49	10,110	30,39	2379	13,34	2,28
Aceton	58,05	73,29	14,35	58,94	1676	26,31	2,24
Schwefelkohlenstoff	76,14	60,27	12,26	48,01	1962	37,41	1,28

Wie diese Übersicht zeigt, hat Wasser das kleinste Kovolumen, den größten Binnendruck, Äther umgekehrt das größte Kovolumen, den kleinsten Normaldruck. Die anderen

1) J. Stefan, Wied. Ann. 29. S. 655—665. 1886.

Substanzen liegen dazwischen. Schwefelkohlenstoff und Äthylalkohol haben völlig gleiche Binnendrucke und Kovolumina.

Entsprechend den in § 1 entwickelten Anschauungen, daß das optische Volumen dem Kernvolumen bis auf den Resonanzfaktor proportional sein müsse, ergibt sich bei den ersten fünf Substanzen, bei denen die den Brechungsexponenten bestimmenden Absorptionsstreifen vermutlich nahe gleich liegen, das Verhältnis $b:(n_D-1)v$ nahezu gleich, während der optisch ganz anders wirkende Schwefelkohlenstoff erheblich abweicht.

§ 3. Der im vorigen Abschnitt erbrachte Beweis, daß man bei reinen Flüssigkeiten innerhalb der angegebenen Grenzen mit einem konstanten Wert für das Kollisionsvolumen b rechnen kann, wird bestätigt durch die Beobachtungen über die Kompressibilität von Lösungen. Wendet man die Gleichung (3)

$$v_i - b_i = -RT\frac{\partial v}{\partial p} \tag{3}$$

auf Salzlösungen an, so gestattet sie mit Hilfe der tatsächlich beobachteten Kompression $\partial v/\partial p$ und mit dem durch das spezifische Gewicht der Salzlösung gegebenen Wert von v_i, dem Volumen der Gewichtseinheit der Salzlösung, den der Lösung entsprechenden Wert b_i des Kollisionsvolumens zu ermitteln und damit die Frage zu beantworten, die Röntgen bei seinen Beobachtungen stets verfolgt hat, wie sich die Kompressibilität von Lösungen aus der der Komponenten zusammensetzt.

Bei der Anwendung der Gleichung (3) auf die Messungsreihen verschiedener Autoren über die Kompressibilität der Salzlösungen stößt man auf eine gewisse Unsicherheit, weil die Kompressibilität $\mu = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}$ innerhalb variabler Druckgrenzen angegeben ist oder wie bei Röntgen und Schneider[1]) die relative wirkliche Kompressibilität. In jeder Messungsreihe ist auch die des reinen Wassers angeführt und diese zeigt in ihrem absoluten Betrag erhebliche Differenzen, sei es weil die Druckgrenzen verschieden sind, sei es, weil konstante Fehler vorliegen. Es ist ja bekannt, daß es außerordentlich schwierig ist, konstante Fehler bei den Kompressibilitätsbeobachtungen

1) W. Röntgen u. Fr. Schneider, Wied. Ann. 29. S. 165—213. 1886.

auszuschließen. Bei Anwendung der Gleichung (3) auf reines Wasser braucht man aber den absoluten Wert der Kompression $\partial v/\partial p$ in cm^3 per Atm. und daher fällt je nach dem Beobachter der Wert b_w, welcher sich nach den Amagatschen Beobachtungen zu $b_w = 13{,}491\ cm^3$ pro Mol in Tab. 4 ergab, indem die mittlere Kompression für 100 Atm. Überdruck benutzt ist, bei den Messungsreihen über die Kompressibilität der Salzlösungen etwas verschieden aus. Ich habe geglaubt, an den Beobachtungsangaben nichts ändern zu sollen, wenn auch die am Kopf jeder Tabelle angegebenen b_w-Werte geringe Schwankungen zeigen.

Ich gebe zunächst das Ergebnis der Berechnung für NaCl-Lösungen nach Röntgen und Schneider und für Zuckerlösungen nach Tait in den Tabb. 5 und 6 wieder.

Das Molekulargewicht M_l einer p-proz. Lösung ist, sofern die Gesamtzahl der Molen bei der Lösung ungeändert bleibt, wie leicht ersichtlich, gegeben durch

$$M_l = \frac{1}{w_1 + s_1},$$

wenn

$$w_1 = \frac{100 - p}{100}\,\frac{1}{M_w}, \quad s_1 = \frac{p}{100}\cdot\frac{1}{M_s}$$

die Molenzahlen in 1 g Lösung bedeutet. Die Beobachtungen von Röntgen und Schneider sind nur mit geringen Überdrucken von etwa 7 Atm. ausgeführt und geben die relative wirkliche Kompressibilität. Mit dem Amagatschen Wert für die Kompression des Wassers bei geringen Überdrucken ist aus den Röntgenschen Relativzahlen die der Lösungen ermittelt. Eine zweite Beobachtungsreihe für NaCl-Lösungen von Gilbault[1]), welche die mittlere Kompressibilität zwischen 1 und 300 Atm. gibt, führt zu völlig gleichen Resultaten, wie die Röntgensche, so daß es genügt, hier nur eine zu berücksichtigen. Die Beobachtungen von Tait[2]) sind zwischen 1 und 152 Atm. Überdruck ausgeführt.

1) H. Gilbault, Zeitschr. f. physik. Chem **24**. S. 385—440. 1887.

2) In den Tabellen von Landolt und Börnstein und an anderen Stellen der deutschen Literatur sind die Beobachtungen von Tait für ganze Prozente, 5 Proz. usw. wiedergegeben. Tait versteht aber „Prozentzahl" als p g Zucker auf 100 g Wasser, nicht wie sonst üblich, auf 100 g Lösung. (Tait, Scientific papers.)

Tabelle 5a.

NaCl-Lösungen $t = 18°$ C. $M_w = 18{,}02$. $M_s = 58{,}5$. $b_w = 13{,}443$ cm³/Mol. Zahlen pro Gramm Lösung.

p	v_{cm^3}	rwC[1])	$-\frac{\partial v}{\partial p} \cdot 10^7 \frac{cm^3}{Atm.}$	$\frac{RT}{Atm \cdot cm^3}$	$v_l - b_{l\,cm^3}$	$P_{l\,Atm.}$	$b_{l\,cm}$
0	1,0014	1,000	492	1325,7	0,2554	5191	0,7460
4,05	0,9729	0,920	441	1288,5	0,2384	5405	0,7845
8,27	0,9447	0,844	392	1249,8	0,2216	5640	0,7231
14,07	0,9073	0,754	337	1196,7	0,2008	5960	0,7065
20,06	0,8701	0,670	287	1141,9	0,1809	6312	0,6892
26,40	0,8326	0,593	243	1083,5	0,1623	6676	0,6703

Tabelle 5b.

p	w_1	s_1	$w_1 b_{w\,cm^3}$	Δ_{cm^3}	$\frac{\Delta}{s_1} = b_s \frac{cm^3}{Mol}$
0	0,05549	—	0,7460	—	—
4,05	0,05324	0,0$_3$692	0,7157	0,0188	27,17
8,27	0,05090	0,001414	0,6842	0,0389	27,51
14,07	0,04769	0,002405	0,6411	0,0654	27,19
20,06	0,04486	0,003430	0,5963	0,0929	27,08
26,40	0,04084	0,004513	0,5490	0,1213	26,88

Tabelle 6a.

Zuckerlösungen nach Tait. Druckgrenze 152 Atm. $M_w = 18{,}02$. $M_s = 3{,}42$. Zahlen pro Gramm Lösung. $b_w = 13{,}60$ cm³ pro Mol.

p	v_{cm^3}	$-\frac{\partial v}{\partial p} \cdot 10^7 \frac{cm^3}{Atm.}$	$\frac{RT}{Atm \cdot cm^3}$	$v_l - b_{l\,cm^3}$	$P_{Atm.}$	$b_{l\,cm^3}$
0	1,00057	466	1300,2	0,2459	5287	0,7547
4,762	0,9821	435	1241,6	0,2323	5345	0,7498
9,091	0,9652	412	1188,2	0,2213	5369	0,7439
13,04	0,9502	390	1139,6	0,2108	5406	0,7394
16,66	0,9362	371	1095,0	0,20155	5432	0,7346

Tabelle 6b.

p	w_1	s_1	$w_1 b_{w\,cm^3}$	Δ_{cm^3}	$\frac{\Delta}{s_1} = b_s \frac{cm^3}{Mol}$
0	0,05549	—	0,7547	—	—
4,762	0,05285	0,00014	0,7188	0,0310	221,4
9,091	0,05044	0,00027	0,6860	0,0579	214,4
13,04	0,04826	0,00038	0,6563	0,0831	218,7
16,66	0,04626	0,00049	0,6289	0,1057	215,7

1) rwC bedeutet „relative wirkliche Kompressibilität".

Aus den Tabellen ergibt sich:

1. Die unter P verzeichneten Binnendrucke der Lösungen sind größer als die des reinen Wassers; bei gesättigter NaCl-Lösung ist der Binnendruck der Lösung um rund 1500 Atm. größer als der des reinen Lösungsmittels, bei der 16,66 proz. Zuckerlösung nur 150 Atm.

2. Dadurch ist auch die Richtung der Diffusion bedingt, denn bringt man eine NaCl-Lösung und reines Wasser in Diffusionsverbindung, so muß sich in der Grenzschicht die Verschiedenheit der Binnendrucke als ein Zug nach der Flüssigkeit größeren Binnendruckes geltend machen, das Wasser diffundiert also zur Lösung.

3. Der zweite Teil der Tabellen beantwortet die Frage, wie sich das Kollisionsvolumen b_l der Lösung aus den Komponenten zusammensetzt. Zu dem Zweck ist mit dem für reines Wasser und der Molenzahl pro Gramm sich ergebenden Wert b_w das Kollisionsvolumen der in 1 g Lösung enthaltenen Wassermolekeln unter $w_1 b_w$ berechnet, unter $\Delta = b_l - w_1 b_w$ der Rest gebildet, der für das Kollisionsvolumen des gelösten Stoffes übrig bleibt und damit durch Δ/s_1 das Kollisionsvolumen des gelösten Stoffes pro Mole ermittelt. Es ergibt sich das überraschende Resultat, daß sich für jedes gelöste Salz pro Mole ein konstantes von der Konzentration unabhängiges Kollisionsvolumen b_s berechnen läßt oder daß für die Gewichtseinheit der Lösung b_l sich additiv nach der molekularen Konzentration aus den Kollisionsvolumen b_w und b_s zusammensetzt oder auf die Mole der Lösung berechnet

$$b_l = \frac{w_1 b_w + s_1 b_s}{w_1 + s_1} \tag{4}$$

ist. Dieses nicht erwartete Resultat zwingt zu der Annahme, daß in den Lösungen keine Veränderung der Gesamtzahl der zur Lösung verwendeten Komponenten w_1 und s_1 eintritt, also keine Verringerung durch Hydratbildung, noch Vergrößerung durch Dissoziation stattfindet und man trotz zweifellos verschiedener Größe der Molekeln — wenigstens so weit die Beobachtungsgenauigkeit es zuläßt —, mit dem mittleren Kollisionsvolumen rechnen kann.

4. Das Kollisionsvolumen pro Mole ergibt sich für NaCl gleich 27 cm³, für Zucker 217 cm³. Röntgen hat die Dichte des kristallischen NaCl zu 2,1676 bestimmt. Damit ergibt sich das Molekularvolumen des festen NaCl

$$v = \frac{58{,}5}{2{,}1676} = 26{,}99 \text{ cm}^3$$

und ebenso ist das Molekularvolumen des festen Zuckers gegeben durch

$$v = \frac{342}{1{,}59} = 215{,}1 \text{ cm}^3.$$

Somit ergibt sich: NaCl und Zucker zeigen in wäßrigen Lösungen ein Kollisionsvolumen b_s, welches gleich ist dem Molekularvolumen im festen Zustand.

Zu diesen aus den Tabb. 5 und 6 sich ergebenden Sätzen füge ich aus weiteren Berechnungen ohne tabellarischen Beleg hinzu:

Bei den von Gilbault[1]) untersuchten Salzlösungen von Jodkalium, Kaliumchlorid, Natriumnitrat und ebenso bei den von Drecker[2]) untersuchten Calciumchlorid berechnet sich in gleicher Weise aus der Kompressibilität stets ein konstantes Kollisionsvolumen b_s pro Mole, oder das Kollisionsvolumen der Lösung b_l läßt sich stets als Mittelwert nach der molekularen Konzentration zusammensetzen aus den Werten von b_w und b_s der Komponenten. Aber das sich ergebende b_l ist bei den weiteren Salzen nicht gleich dem sichtbaren Molekularvolumen

Tabelle 7.

Zahlen pro Mole.

	M	d Dichte fest	v_{cm^3}	$b_s \frac{cm^3}{Mol.}$	$(n_D - 1)v \frac{cm^3}{Mol.}$	$\frac{b_s}{(n_D-1)v}$
NaCl . .	58,5	2,1676	26,99	27,0	15,86	1,702
Zucker .	342	1,59	215,1	217,8	119,15	1,827
KCl . . .	74,5	1,985	37,5	33,9	19,15	1,77
KJ . . .	165,6	3,07	53,9	46,1	34,4 *	1,34
$NaNO_3$.	85,0	2,26	37,6	36,4	18,0 *	2,02
$CaCl_2$ . .	111,0	2,26	49,1	40,7	30,8 *	1,32

* Neu berechnet.

1) H. Gilbault, a. a. O.
2) J. Drecker, Wied. Ann. 34. S. 952—970. 1888.

im festen Zustand, sondern stets kleiner. Bei allen Lösungen nimmt der Binnendruck mit dem Salzgehalt zu; alle wäßrigen Salzlösungen haben einen größeren Binnendruck als das reine Wasser.

Ich stelle die Daten in der Tab. 7 zusammen und vergleiche auch hier wie in Tab. 4 das Kollisionsvolumina b mit dem optisch wirksamen Volumen.

§ 4. Das aus der Kompressibilität der Salzlösungen sich ergebende Resultat, daß jedes Salz sein ihm charakteristisches Kollisionsvolumen b_s beibehält und sich die Gesamtzahl der Molekeln nicht in der Lösung durch Hydratisierung oder Dissoziation ändert, bestätigt das auch optisch gefundene Resultat[1]), daß sich in Lösungen die Molekeln einfach der Molenzahl entsprechend ohne gegenseitige Beeinflussung miteinander mischen; es gestattet aber auch weiter, die merkwürdigen bei der Lösung auftretenden Volumenkontraktionen zu berechnen. Denn wenn zwei Stoffe verschiedenen Binnendruckes

$$P_w = \frac{RT}{v_w - b_w} \quad \text{und} \quad P_s = \frac{RT}{v_s - b_s}$$

eine homogene Lösung bilden, so kann in der Lösung nicht mehr die Verschiedenheit der Binnendrucke bestehen bleiben, denn die molekulare Wärmebewegung, deren Annahme ja durch die Grundgleichung ausgesprochen ist, muß jede Druckverschiedenheiten ausgleichen. Es kann also in der Lösung nur *ein* mittlerer Binnendruck

$$P_l = \frac{RT}{v_l - b_l}$$

bestehen, Damit ist aber auch sofort gegeben, daß die beiden Bestandteile in der Lösung gleiche Kovolumina haben müssen, denn die van der Waalssche Binnendruckgleichung sagt aus, daß äquimolekulare Mengen aller Stoffe unter gleichem Binnendruck und bei gleicher Temperatur gleiche Kovolumina haben. Eine homogene Lösung ist also dadurch definiert, daß sie ein Gemenge verschiedener Substanzen bei gleichem Kovolumen ist.

Bezeichnet v_w und v_s das sichtbare Molekularvolumen der

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 67. S. 337—351. 1922.

Komponenten unter den Normaldrucken[1]) P_w und P_s, v_w' und v_s' die Molekularvolumina unter dem Drucke P_l, so ist allgemein für den Fall, daß b_w und b_s in der Lösung andere Werte annehmen sollten:

$$v_w' - b_w' = v_s' - b_s' = v_l - b_l.$$

Bei den angeführten wäßrigen Salzlösungen hat die Kompressibilität auf die Gleichungen

$$b_w' = b_w, \quad b_s' = b_s, \quad b_l = \frac{w b_w + s b_s}{w + s}$$

geführt, wenn w und s die zur Lösung verwendeten Molenzahlen bedeuten. Daher folgt:

$$v_s' - v_w' = b_s - b_w$$

und

$$(5) \qquad v_l = v_w' + \frac{s}{w+s}(b_s - b_w) = v_s' - \frac{w}{w+s}(b_s - b_w),$$

worin v_l direkt durch die Dichte der Lösung, w und s durch die Konzentration und b_w und b_s aus den Kompressibilitätsbeobachtungen bekannt sind.

Die bei der Lösung beobachtete Volumenänderung ΔV ist definiert durch

$$\Delta V = w v_w + s v_s - (w + s) v_l.$$

Ersetzt man nach Gleichung (5) v_l durch v_w' und v_s', so fallen alle b-Größen heraus und es ergibt sich

$$\Delta V = w \cdot v_w' + s v_s'$$

oder die totale beobachtete Volumenänderung ist die gleiche, wie sie eintreten würde, wenn man die beiden Bestandteile außerhalb der Lösung getrennt auf den Druck P_l komprimieren bzw. dilatieren würde.[2]) Bei den wäßrigen Salzlösungen übertrifft fast stets die Kompression des Wassers die Dilatation des gelösten Salzes und deshalb beobachtet man in den meisten Fällen eine Volumenkontraktion beim Lösungsvorgang.

---

1) Unter Normaldruck wird der Binnendruck bei 1 Atm. äußeren Druck verstanden.

2) Hr. Tammann lehnt diese Folgerung in seinem Buch „Über die Eigenschaften der Lösungen", Hamburg 1907, ab und insofern mit Recht, als sie nicht allgemein, sondern nur für solche Lösungen gültig ist, bei denen die Kompressibilitätsbeobachtungen die Gültigkeit der Gleichungen (4) erweisen, wie die angeführten wäßrigen Salzlösungen.

Tabelle 8a.

NaCl-Lösungen $t = 18°$ C.

$b_{w_1} = \frac{18{,}48}{1802} = 0{,}7454$ cm³/g. $\quad b_{s_1} = \frac{27}{58{,}5} = 0{,}46113$ cm³/g.

Zahlen pro Gramm Lösung. Wasserkompression.

p	$w_1 \cdot v_w$ cm³	$w_1 (v_l - b_l)$ cm³	$w_1 b_{w_1}$ cm³	$w_1 v_w'$ cm³	δv_w cm³
0	1,0014	0,2560	0,7454	1,0014	—
4,05	0,9608	0,2287	0,7152	0,9439	0,0169
8,27	0,9186	0,2033	0,6838	0,8871	0,0315
14,07	0,8605	0,1725	0,6406	0,8131	0,0474
20,06	0,8005	0,1446	0,5960	0,7406	0,0599
26,4	0,7370	0,1195	0,5487	0,6682	0,0688
100	—	—	—	—	—

Tabelle 8b.

Salzdilatation.

p	$s_1 v_s$ cm³	$s_1 (v_l - b_l)$ cm³	$s_1 b_{s_1}$ cm³	$s_1 v_s'$ cm³	δv_s cm³	$\delta v_s - \delta v_w$ cm³	$\Delta V_{\text{beob.}}$ cm³
0	—	—	—	—	—	—	—
4,05	0,0187	0,00966	0,0187	0,0284	0,0097	− 0,0072	− 0,0067
8,27	0,0381	0,01833	0,0381	0,0564	0,0183	− 0,0132	− 0,0125
14,07	0,0649	0,02825	0,0649	0,0931	0,0282	− 0,0192	− 0,0187
20,06	0,0925	0,03629	0,0925	0,1288	0,0363	− 0,0236	− 0,0228
26,4	0,1218	0,04285	0,6218	0,1646	0,0428	− 0,0260	− 0,0262
100	0,4613	—	0,4613	0,4613	—	—	—

In der Tab. 8 ist für die von Röntgen beobachteten NaCl-Lösungen im Anschluß an Tab. 5 die Volumenverringerung des Wassers in 1 g Lösung berechnet und ebenso die Volumenvergrößerung des Salzes. Aus Tab. 5 ist das Kovolumen $(v_l - b_l)$ übernommen, $w_1 (v_l - b_l)$ gibt dann das Kovolumen des Wassers in der Lösung, aus dem sich durch Addition von $w_1 b_w$ das sichtbare Volumen $w_1 v_w'$ der Wasserkomponente in der Lösung ergibt; $w_1 (v_w - v_w') = \delta v_w$ gibt die Volumenverringerung des Wassers in der Lösung. Analog ist unter δv_s die Volumenvergrößerung des Salzes ermittelt. Die Differenz $\delta v_s - \delta v_w$ gibt die totale Volumenänderung der Lösung, sie stimmt mit der aus dem spezifischen Gewicht ermittelten und unter $\Delta V_{\text{beob.}}$ angegebenen völlig befriedigend überein.

§ 5. In den Salzlösungen gerät das Wasser unter höhere Binnendrucke als im reinen Zustand, es erleidet also eine

Zusammendrückung gerade so groß, wie durch Erhöhung des äußeren Druckes; mischt man aber Wasser mit Alkohol, welcher für sich einen viel geringeren Normaldruck hat, so gerät das Wasser in einen Zustand der Dilatation, den wir experimentell nicht herstellen können, denn es ist — von den besonderen Fällen des Haftens abgesehen — nicht möglich, Flüssigkeiten unter einen geringeren Druck zu bringen als den Dampfdruck. Man kann aber in derselben Weise, wie bei Salzlösungen, da wo Kompressibilitätsbeobachtungen vorliegen, das Kovolumen der Lösung ermitteln und die Frage erörtern, ob auch bei diesen Lösungen sich das Kollisionsvolumen b_l der Lösung additiv aus dem der Komponenten zusammensetzt.

Es liegen zwei Gruppen von Beobachtungen vor: die Kompressibilität der Wasser-Alkoholgemische[1]) und die der Wasser-Schwefelsäurelösungen nach Röntgen und Schneider.[2])

Ich stelle zunächst in Tab. 9 nach Dreckers Beobachtungen das Ergebnis der Berechnung dar für Alkohol-Wassergemische.

Die erste Horizontalreihe der Tab. 9 zeigt, daß die Kompressibilität der Alkohollösungen bei etwa 25 Proz. Alkoholgehalt ein Minimum hat. Pagliani und Palazzo haben bei genau dem gleichen Prozentgehalt das Minimum bestätigt. Mit überwiegendem Alkoholgehalt nimmt dann die Kompressibilität beträchtlich zu.

Die folgenden Reihen geben in leicht verständlicher Bezeichnung die zur Berechnung des Kovolumens der Lösung nach Gleichung (3) nötigen Daten. Das Kollisionsvolumen b_l der Lösung nimmt nicht an dem Minimum der Kompressibilität teil, sondern nimmt kontinuierlich zu. Die folgenden Reihen

---

1) J. Drecker: Wied. Ann. 20. S. 870—896. 1883 und Pagliani u. Palazzo, Atti di Torino 19. S. 1017—1036. 1884. Die letzteren Beobachtungen sind 1889 durch Umrechnung an die Amagatschen Beobachtungen angeschlossen und auch in den Landolt-Börnsteinschen Tabellen wiedergegeben. Sie führen zu gleichen Resultaten wie die Dreckerschen Beobachtungen, die das ganze Konzentrationsintervall umfassen.

2) a. a. O.

Tabelle 9.

Wasser-Alkoholgemische $t = 25°$ C. $b_w = 13{,}59$ cm³ pro Mol. $b_s = 45{,}89$ cm³ pro Mol.
Druckintervall 4,5 Atm. $RT = (w_1 + s_1)\,24\,464$ Atm · cm³. Zahlen pro Gramm Lösung.

$p =$	0	12,37	23,91	34,61	50,29	62,95	79,72	85,13	100%
$10^7 \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}$	455	420	411	448	545	650	807	886	1138
v_{cm^3}	1,0030	1,0235	1,0410	1,0731	1,1073	1,1351	1,1910	1,2102	1,2737
RT Atm · cm³	1357,6	1255,5	1160,0	1072,0	942,1	837,4	698,7	653,9	531,1
$RT\frac{\partial v}{\partial p}$	0,06191	0,05899	0,04965	0,05156	0,05681	0,6180	0,06715	0,07010	0,07696
$v - b_l$	0,2488	0,2324	0,2225	0,2271	0,2383	0,2486	0,2591	0,2648	0,2774
$b_{l\,\text{cm}^3}$	0,7542	0,7911	0,8185	0,8460	0,8690	0,8865	0,9319	0,9454	0,9963
w_1	0,05549	0,04863	0,04223	0,03629	0,02759	0,02056	0,01125	0,00825	—
s_1	—	0,00269	0,00519	0,00751	0,01092	0,01367	0,01731	0,01848	0,02171
$w_1\,b_{w\,\text{cm}^3}$	0,7542	0,6609	0,5739	0,4932	0,3749	0,2794	0,1529	0,1121	—
Δ	—	0,1302	0,2446	0,3528	0,4941	0,6071	0,7790	0,8333	0,9963
$b_s = \frac{\Delta}{s_1}$	—	48,40	47,13	46,98	45,24	44,41	45,00	45,09	45,89
$P_{\text{Atm.}}$	5457	5402	5213	4720	3953	3368	2697	2469	1915

geben die Molekülzahlen in 1 g Lösung und es ergibt sich, daß auch bei diesen Lösungen

$$(w_1 + s_1)\, b_i = w_1\, b_w + s_1\, b_s,$$
$$b_w = 13{,}59 \text{ cm}^3/\text{Mol}, \quad b_s = 46{,}00 \text{ cm}^3/\text{Mol}$$

gesetzt werden kann, also anzunehmen ist, daß in der Lösung die gleiche Gesamtzahl der Molekeln mit konstantem Kollisionsvolumen für jede Komponente angenommen werden muß. Allerdings ist die Konstanz der b_s-Werte nicht eine gleich gute, wie bei den Salzlösungen, es läßt sich aber leicht nachweisen, daß die Schwankungen der erhaltenen b_s-Werte völlig innerhalb der Versuchsunsicherheiten der Kompressibilitätsbeobachtungen liegen. Durch den erbrachten Nachweis sind auch die bei den Mischungen von Alkohol und Wasser auftretenden Volumenkontraktionen identisch richtig gegeben.

Die letzte Reihe bringt unter P den Normaldruck der Lösungen. Er nimmt kontinuierlich von dem hohen Binnendruck des Wassers von 5460 Atm. auf den des Alkohols von nur 1915 Atm. ab. 1 g reines Wasser, welches nach der Tabelle ein Kovolumen von 0,2488 cm³ unter Normaldruck hat, würde also in der 79,72 proz. Lösung ein Kovolumen von $0{,}2488 \cdot \frac{5457}{2627} = 0{,}5033$ cm³ erhalten oder das sichtbare Volumen von 1 g Wasser in der rund 80 proz. Lösung

$$0{,}5033 + 0{,}7542 = 1{,}2575 \text{ cm}^3$$

betragen. Das Wasser ist also so stark dilatiert, wie es sonst nur bei 250° C. im orthobasischen Zustand vorkommt. Daß trotz des auf die Hälfte verringerten Binnendruckes das Wasser bei 25° C. in der Lösung nicht zerreißt, ist der Einschiebung der Alkoholkraftzentren zwischen die Wassermolekeln zu danken.

Würde man eine wäßrige Alkohollösung mit reinem Wasser durch eine halbdurchlässige Membran in Diffusionsverbindung bringen, so müßte hier in umgekehrter Richtung als bei Salzlösungen die Diffusion zum Wasser hin erfolgen.

Bei den alkoholischen Lösungen war nach den Erfahrungen an Salzlösungen zu erwarten, daß das aus der Kompressibilität berechnete Kollisionsvolumen b_i der Lösung sich additiv aus den der Komponenten nach Gleichung (4) berechnen lasse, denn wir haben keine Anzeichen einer chemischen Reaktion

der Bestandteile aufeinander. Anders liegen die Verhältnisse bei den von Röntgen beobachteten wäßrigen Schwefelsäurelösungen. Führt man durch

$$(v_l - b_l)^2 = - RT\frac{\partial v}{\partial p}$$

die Berechnung des Kovolumens der Lösung aus, indem man zur Bildung der Gaskonstante R der Lösung annimmt, daß die Gesamtzahl der Lösungsmolen gleich der Summe der zur Lösung verwendeten Molenzahlen der Komponenten ist, so ergeben sich Werte für b_l, welche sich nicht nach der Gleichung (4) als Summe der Kollisionsvolumina b_w und b_s darstellen lassen. Hier liegt also ein Ausnahmefall vor, der Tammanns Bedenken rechtfertigt, die immer dann berechtigt sind, wenn molekulare Umlagerungen bei der Lösung auftreten. Bei Schwefelsäurelösungen schließt Arrhenius[1]) nach den Gefrierpunktsbeobachtungen von H. C. Jones, daß zwei Arten von Hydraten, $H_2SO_4 + H_2O$ und $H_2SO_4 + 2H_2O$, in der Lösung bestehen; ich habe durch umständliche Rechnungen die durch die optischen Berechnungen nahe gelegte Hypothese der Bildung komplexer Moleküle nach Lenard zu verfolgen gesucht, verzichte aber auf ihre Wiedergabe, weil sie mir nicht sicher genug erscheinen. Nur ein Resultat der Berechnung mit den Röntgenschen Kompressibilitätsbeobachtungen ist sicher: das Kollisionsvolumen der reinen Schwefelsäure ergibt sich zu $b_s = 46{,}3$ cm³/Mole, also fast genau gleich zweimal dem optisch wirksamen Refraktionsvolumen der Schwefelsäure 23 cm³/Mole, und damit ergibt sich der Normaldruck $P = 3330$ Atm.

§ 6. Bei den vorstehenden Berechnungen, die darauf abzielen, aus der Kompressibilität der wäßrigen Lösungen einen Einblick in den molekularen Zustand der gelösten Stoffe zu gewinnen, kam die Frage nach der Temperaturabhängigkeit des Kollisionsvolumens und damit die Frage der Temperaturabhängigkeit des Binnendruckes nicht in Betracht, weil die Beobachtungen an Salzlösungen nur bei $t = 20°$ C. oder nahe benachbarten Temperaturen ausgeführt sind und darum genügte der durch die Tabb. 1—3 erbrachte Beweis, daß man bei $t = 20°$ C. bis zu Überdrucken von rund 1000 Atm. mit einem

1) Sv. Arrhenius, Theorien der Chemie. S. 23. Leipzig 1909.

für jede reine Flüssigkeit gültigen konstanten Kollisionsvolumen b rechnen, also auch den Kohäsionsdruck π innerhalb dieser Grenzen konstant ansehen kann.

Es soll jetzt an der Hand der Amagatschen Beobachtungen noch die Frage nach der Temperaturabhängigkeit erörtert werden, also die Frage, ob man in der Binnendruckgleichung

$$P = \frac{RT}{v - b}$$

auch bei verschiedenen Temperaturen ein konstantes b anwenden darf.

Analog wie bei Tab. 1 und 2 ist in den folgenden Tabb. 10 und 11 nach den Beobachtungen

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m = \frac{v_1 - v_{100}}{p_{100} - p_1}$$

durch direkte Ablesung angeführt und mit

$$(v - b)^2 = -RT\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_m$$

nach Gleichung (3) gebildet und durch Abzug dieses aus der Kompression der reinen Flüssigkeit gewonnenen Kovolumens vom mittleren Volumen $\frac{1}{2}(v_1 + v_{100})$ der zugehörige b-Wert ermittel. Unter $P = \frac{RT}{v_1 - b_m}$ findet sich der Binnendruck bei 1 Atm. äußeren Druckes, also der Normaldruck, worin v_1 das sichtbare Volumen des Wassers bzw. Alkohols bei den angegebenen Temperaturen ist.

Tabelle 10.

Wasser nach Amagat. Zahlen pro Gramm. $M = 18{,}02$.

t	$10^7 \frac{\partial v}{\partial p}$ $\frac{\text{cm}^3}{\text{Atm.}}$	RT Atm · cm³	$v - b$ cm³	$\frac{1}{2}(v_1 + v_{100})$ cm³	b cm³	v_1 cm³	$P = \frac{RT}{v_1 - b_m}$
0°	512	1243,7	0,2524	0,9976	0,7452	1,00013	4949 Atm.
10	488	1289,3	0,2495	0,9978	0,7483	1,0003	5126 „
20	469	1334,8	0,2502	0,9994	0,7492	1,0018	5255 „
30	462	1380,4	0,2525	1,0020	0,7495	1,0044	5400 „
40	458	1426,0	0,2541	1,0054	0,7513	1,0078	5506 „
50	455	1471,5	0,2588	1,0097	0,7509	1,0121	5589 „
60	463	1517,1	0,2650	1,0146	0,7496	1,0171	5654 „
70	478	1562,6	0,2719	1,0202	0,7483	1,0227	5705 „
100	504	1699,3	0,2940	1,0406	0,7466	1,0434	5769 „

$b_m = 0{,}7488$

Tabelle 11.

Alkohol nach Amagat. Zahlen pro Gramm. $M = 46{,}06$.

t	$10^7 \frac{\partial v}{\partial p}$ $\frac{\text{cm}^3}{\text{Atm.}}$	$\frac{RT}{\text{Atm} \cdot \text{cm}^3}$	$v - b$ cm³	$\frac{1}{2}(v_1 + v_{100})$ cm³	b cm³	v_1 cm³	$P = \frac{RT}{v_1 - b_m}$
0	1131	486,6	0,2346	1,2113	0,9767	1,2170	1984 Atm.
20	1327	522,2	0,2683	1,2364	0,9732	1,2482	1923 „
40	1533	551,1	0,2906	1,2630	0,9724	1,2708	1843 „
60	1813	593,5	0,3280	1,2925	0,9645	1,3016	1799 „

$b_m = 0{,}9717$

Übersieht man die erste Spalte der Tab. 10, so zeigt sich das von Amagat beobachtete Minimum der Zusammendrückbarkeit des Wassers bei etwa 40°. Trotzdem ergibt die in den folgenden Spalten durchgeführte Berechnung nach Gleichung (3) auffallend konstante Werte des Kollisionsvolumens b. Zwar scheint sich ein kleiner Gang der b-Werte in dem Sinne zu ergeben, daß b bei der Temperatur der geringsten Zusammendrückbarkeit ein Maximum zeigt, aber es ist so wenig ausgeprägt, daß es völlig im Bereich der Beobachtungsfehler liegt, so daß es berechtigt ist, den Mittelwert b_m zu bilden. Der bei verschiedenen Temperaturen, aber konstantem Überdruck sich ergebende Mittelwert 0,7488 ist exakt der gleiche, wie der, der sich in Tab. 1 bei konstanter Temperatur, aber verschiedenen Überdrucken ergab, so daß man sagen kann, im flüssigen Wasser ist das Kollisionsvolumen b bis zu 1000 Atm. Überdruck und 100° Temperatursteigerung als unabhängig von Druck und Temperatur anzusehen.

Geht man über die angegebenen Druck- und Temperaturgrenzen hinaus, so findet sich in beiden Fällen eine Abnahme der b-Werte. Der ausgesprochene Satz ist also natürlich nur als ein empirischer innerhalb bestimmter Grenzen gültiges Ergebnis der Berechnung anzusehen.

Bei Alkohol, der doppelt so stark kompressibel ist, zeigen die b-Werte der Tab. 11 auf 0,5 Proz., daß sie mit denen der Tab. 2 übereinstimmen, und so kann man wohl auch hier mit einem konstanten Wert von b rechnen.

Es sei noch hinzugefügt, daß, wenn man bei Wasser die Temperaturabhängigkeit nicht im Normalzustand, sondern bei konstanten Überdrucken bis zu 1000 Atm. untersucht, man stets die gleichen b-Werte erhält und daß auch Äther sich

ebenso wie Alkohol verhält. Das Ergebnis $b =$ konstant zieht den merkwürdigen Verlauf des Normaldruckes nach sich, den die letzte Spalte der Tabellen unter P aufweist. Da der Normaldruck sich aus dem äußeren Druck 1 Atm. und dem van der Waalsschen Kohäsionsdruck zusammensetzt, ersterer aber verschwindend klein gegen den letzteren ist, so kann man Normaldruck und Kohäsionsdruck identifizieren und dann sagt die Zahlenreihe der letzten Spalte aus, daß beim Wasser der Kohäsionsdruck mit steigender Temperatur zunimmt und offensichtlich bei niederen Temperaturen schneller, bei Annäherung an 100° langsamer, so daß er sich einem Maximum nähert, daß aber bei Alkohol und ebenso bei Äther der Kohäsionsdruck abnimmt. Das letztere Verhalten ist allgemein zu erwarten, denn die Abnahme des Kohäsionsdruckes mit steigender Temperatur bedingt die Zunahme des Dampfdruckes nach den v. d. Waalsschen Anschauungen.

Das Verhalten des Wassers muß also im Widerspruch stehend erscheinen mit den Grundanschauungen.

Und doch zeigt sich, daß dieses Ergebnis eintreten muß; denn die Zunahme des Normaldruckes P mit der Temperatur wird hier genommen bei konstantem äußeren Druck $p = 1$ Atm. Es ist aber:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v + \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T \left(\frac{dv}{dT}\right)_p$$

oder indem man nach der Grundgleichung (1)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b}, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = -\frac{RT}{(v-b)^2}$$

bildet, wird

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_p = \frac{RT}{v-b}\left\{\frac{1}{T} - \frac{1}{v-b}\left(\frac{dv}{dT}\right)_p\right\},$$

und daraus geht hervor, daß es für eine jede Flüssigkeit eine bestimmte Temperatur gibt, bestimmt durch

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{v-b}\left(\frac{dv}{dT}\right)_p,$$

bei der der Normaldruck ein Maximum haben muß.[1])

1) Theoretisch wäre es richtiger, als „Normaldruck" den Binnendruck unter dem Sättigungsdruck zu bezeichnen, also auch

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{p=p_s} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial v}{dT}\right)_{p=p_s}$$

zu bilden. Bei niederen Temperaturen kann der Unterschied vernachlässigt werden.

Bei Wasser ist bei 100° C. die Ausdehnung pro Gramm 0,00078 cm³; mit $v_1 = 1{,}0434$ und $b_1 = 0{,}7487$ ergibt sich

$$\frac{1}{v-b}\left(\frac{dv}{dT}\right)_p = 0{,}00265,$$

während $\frac{1}{T} = 0{,}00268$ ist. Also fordert die Grundgleichung das Eintreten eines maximalen Normaldruckes und mit dem aus der Kompressibilität ermittelten Kovolumen findet es sich bei 100° C. Bei Alkohol und Äther, deren kritische Temperaturen ja viel niedriger liegen als die des Wassers, ist man zwischen 0° und dem Siedepunkt in einem Temperaturgebiet, welches schon hinter der Temperatur des maximalen Normaldruckes liegt und daher nimmt bei diesen Substanzen der Normaldruck mit steigender Temperatur ab und muß schließlich dem kritischen Druck gleich werden.

Damit ist auch aus der Temperaturänderung des Normaldruckes eine starke Stütze für die Annahme eines konstanten Kollisionsvolumens für jede Flüssigkeit innerhalb der angegebenen Grenzen gewonnen.

In der vorstehenden Arbeit habe ich mich darauf beschränkt, durch eine empirische Näherungsberechnung die Anwendbarkeit der van der Waalsschen Binnendruckgleichung auf Flüssigkeiten zu prüfen, ohne für die beiden van der Waalsschen Größen π und b auf Grund theoretischer Betrachtungen Annahmen einzuführen. Über diese beiden Größen besteht ja eine sehr ausgedehnte Literatur, die es aber doch nicht ermöglicht, zu entscheiden, ob und wie sich die Größe b mit dem Volumen in den dichteren Zuständen der Materie ändert, noch auch, ob der Kohäsionsdruck π eine von der Temperatur unabhängige auf der Massenanziehung der Molekeln allein beruhende mechanische Größe ist.

Bei dieser Sachlage schien es mir von Wichtigkeit auf Grund mechanisch unanfechtbaren Grundanschauungen durch die vorgelegten Berechnungen das Tatsächliche aus den Beobachtungen an Flüssigkeiten herauszuschälen, was letzten Endes jede theoretische Bearbeitung des Problems erfüllen muß.

Daß man innerhalb eines weiten Bereiches von Druck und Temperatur im flüssigen Zustand der reinen Flüssigkeiten

auf eine konstante Größe der Volumenkorrektion geführt wird, daß diese selbe Größe auch in allen Lösungen wiederkehrt, in denen keine molekularen Umlagerungen stattfinden, daß damit die merkwürdigen beim Lösungsvorgang auftretenden Volumenänderungen eine durchsichtige Deutung erfahren, daß der Kohäsionsdruck damit in seiner Größe und Abhängigkeit von Volumen und Temperatur bestimmt ist, halte ich für mechanisch gesicherte Tatsachen. Die weitere Beobachtung, daß ein Zusammenhang zwischen dem optischen Refraktionsvolumen und der kinetischen Größe des Kollisionsvolumen besteht, ist zwar nicht gesichert, aber doch mit den mechanischen Grundanschauungen so im Einklang, daß eine Verbindung zwischen den optischen und kinetischen Vorgängen verfolgbar erscheint.

Kiel, Physik. Institut der Universität, 15. April 1923.

(Eingegangen 18. April 1923.)

2. *Die Massenbewegung des Wassers bei Unterwasserexplosionen;* *von Carl Ramsauer.*

Jede Unterwasserexplosion ruft eine doppelte Wirkung hervor. Der plötzlich entstandene Überdruck überträgt sich auf die angrenzende Wasserschicht, diese gibt ihn weiter an die folgende Schicht und so fort, d. h. es entsteht eine Druckwelle, die sich mit einer der Kompressibilität des Wassers entsprechenden Geschwindigkeit in immer größeren Kugelschalen nach außen hin ausbreitet. Gleichzeitig setzt eine zweite Erscheinung, die eigentliche Volumenausdehnung der Gasmasse, ein. Die stark zusammengepreßten Gase schieben die umgebenden Wassermassen vor sich her, bis ihr Druck sich durch Volumvermehrung und Abkühlung auf den Betrag des Außendruckes vermindert hat *und* bis ferner der während dieses Prozesses in den Wassermassen angesammelte Betrag an kinetischer Energie in einer weiteren Trägheitsbewegung gegen den äußeren Überdruck verbraucht ist. Man hat es also mit zwei verschiedenen Erscheinungen, einer Druckwellenbewegung und einer Massenbewegung, zu tun, wobei allerdings die erste Bewegung der innersten Wasserschicht beiden Erscheinungen angehört.

Die folgende Arbeit stellt sich die Aufgabe, diese Massenbewegung des Wassers bei Unterwasserexplosionen nach Ausdehnung und Geschwindigkeit experimentell und theoretisch[1]) zu untersuchen.

I. Die Ausdehnung der Wasserbewegung.

Die Verwendung mechanischer Einrichtungen in der Nähe des Sprengzentrums muß ganz vermieden werden, da sich die

1) Bei der Aufstellung der Theorie und bei der Verarbeitung des Versuchsmaterials ist mir Herr cand. phys. E. Brüche sehr behilflich gewesen, wofür ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen möchte.

Bedingungen schnellster Reaktionsfähigkeit und größter Widerstandskraft nicht verbinden lassen. Diese Überlegung führte schließlich zu folgender Methode, bei welcher in der Nähe des Sprengzentrums nur unbewegliche, rein elektrisch wirkende Sonden benutzt zu werden brauchen.

Prinzip der Methode (Fig. 1). Der Strom der Batterie *B* durchfließt die Windungen des Elektromagneten *M*, gelangt zu der isolierten Stahlstange *S* und tritt aus der blanken Spitze

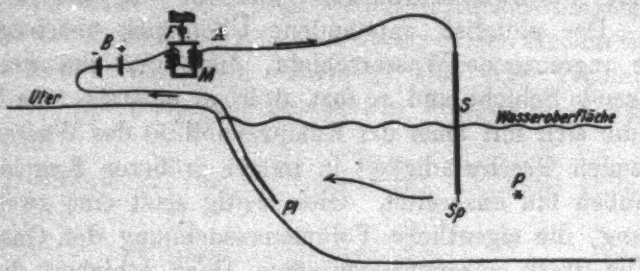


Fig. 1.

dieser Stange *Sp* in das umgebende Wasser über; die blanke Platte *Pl* nimmt die Stromfäden wieder auf und führt den Strom zur Batterie zurück.

Solange dieser Strom andauert, magnetisiert er *M* und hält den Anker *A* trotz des Gegenzuges der Feder *F* angezogen. Bringt man jetzt die Sprengpatrone *P* zur Detonation, so treiben die Sprenggase das Wasser nach allen Seiten vor sich her und bilden einen wasserfreien Raum von bestimmter Größe. Überschreitet hierbei die Gasblase die Spitze *Sp*, so reißt der Anker *A* los, erreicht sie dieselbe nicht, so bleibt der Anker haften. Man kann also den unteren Grenzwert des Gasblasenradius bestimmen, wenn man der Sprengpatrone eine Reihe von solchen Sonden mit je einem Magneten in verschiedenen Abständen unter Wasser gegenüberstellt und aus dem Losreißen bezüglich Haftenbleiben der zugehörigen Magnetanker abliest, welche Sonde als äußerste von der Gasblase überschritten worden ist. Ist auf diese Weise der ungefähre Wert des Radius festgestellt, so kann man die Einzelsonden auf einen kleineren Bereich zusammendrängen und die Größe des Gasblasenradius in engere Grenzen einschließen.

Die praktische Ausführung der Methode (Fig. 2). Zum Aufbau der ganzen Anordnung dient ein Rahmen *R* aus Winkeleisen (etwa 6 m lang, hier nur schematisch gezeichnet), welcher an starken Ketten *K K* durch einen kleinen Kran über Bord geschwenkt und auf beliebige Tiefe unter Wasser eingetaucht werden kann (Gesamtwassertiefe etwa 12 m). In der Mitte schwebt die Sprengmasse *P* — in der Regel 2120 g nasse Schießbaumwolle mit 16 Proz. Wassergehalt + 80 g trockene Schießbaumwolle in einer zylindrischen Messingbüchse von 16,0 cm Höhe, 11,2 cm Durchmesser und 0,15 cm

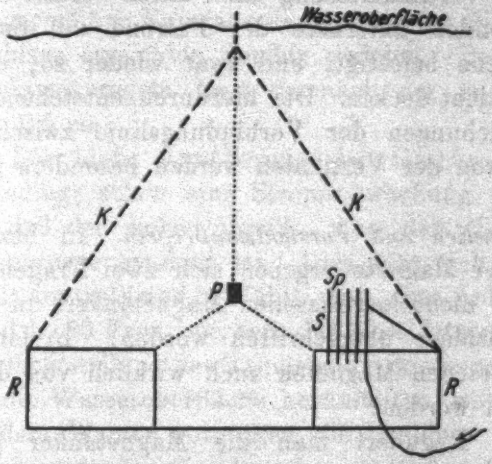


Fig. 2.

Wandstärke — an dünnen Schnüren, wie die Spinne in ihrem Netz. Beiderseits von *P* sind je 5 Sonden, nämlich 1,3 cm starke bis auf die Spitzen *Sp* mit Gummi isolierte Stahlstangen in Zwischenabständen von je 10—15 cm angebracht. Die Einzelsonden sitzen, mit ihrer blanken Spitze 60 cm oberhalb des Rahmens, in starken Haltemuffen, welche auf dem Rahmen verschoben werden können, und sind gegen Verbiegung nach rückwärts versteift (vgl. die Sonde rechts). Von oben gesehen, sind die Sonden seitlich gegeneinander derart verschoben, daß sie sich, von *P* aus gesehen, nicht decken. Jede Sonde ist mit einem Magneten verbunden (das Zuführungskabel ist bei der Sonde rechts angedeutet). Die Magnete befinden sich am Land in einigen hundert Metern Entfernung von der Sprengstelle

und sind gegenüber der Detonation erschütterungsfrei an langen Gummischnüren aufgehängt. Von der Batterie aus gehen zehn selbständige, in sich regulierbare Einzelleitungen durch je einen Magneten und je eine besondere Kabelader zu je einer Sonde. Von den Sonden gehen die Einzelströme durch das Seewasser zu der Kathode, welche jedoch nicht als *eine* Platte am Ufer, sondern in verschiedenen Flächenstücken auf der Außenisolation der Sondenstangen angebracht ist (die Gründe hierfür vgl. weiter unten), und von hier in gemeinsamer Leitung zur Batterie zurück.

Bei der Vertikalmessung nach unten werden etwas anders geformte Sonden unterhalb der Patrone auf der untersten Rahmenschiene befestigt, und zwar wieder so, daß sie sich gegenseitig nicht decken. Die hierdurch entstehenden geringen Winkelabweichungen der Verbindungslinie zwischen Patrone und Sonde von der Vertikalen werden besonders in Rechnung gesetzt.

Fehlerquellen und Vorsichtsmaßregeln. In bezug auf das Verhalten der Magnete ergeben sich zwei Fragen: a) Ist die Sonde eines nicht losgerissenen Magnetankers nicht trotzdem von der Gasblase überschritten worden? b) Ist die Sonde eines losgerissenen Magneten auch wirklich von der Gasblase überschritten worden?

Zu a). Reguliert man die Magnetanker (grob durch Messinganschlagschrauben, feiner durch Federspannung) so weit, daß sie bei einem Strome von 0,30 Weber ($\pm$ 5 Proz.) abreißen, und benutzt man Ströme pro Magnet von 0,45 Weber (vgl. zu b), so ergibt sich bei plötzlicher Unterbrechung des Stromes eine nachträgliche Haltezeit von rund 0,001 Sek., wie durch besondere Messungen mit einem Pendelunterbrecher festgestellt wurde. Setzt man die Geschwindigkeit der Gasblasengrenze bei Überschreitung der Sonde zu 5 m/sec an (dieser Wert ist nach der Geschwindigkeitstabelle, S. 275, tatsächlich schon bei 10 cm Abstand von der Maximalgrenze unterschritten!), so folgt daraus, daß der Anker sicher abreißen muß, wenn die zugehörige Sonde auch nur um 0,5 cm von der Gasblasengrenze überschritten wird, da dies wesentlich mehr als 0,001 Sek. Stromlosigkeit bedeutet. Diese Rechnung hat noch eine Lücke: Werden nämlich durch die Gasblase z. B. die P zunächst ge-

legenen drei Sonden ausgeschaltet, so wächst die Stromstärke für die übrigen Sonden erheblich und damit auch die Haltezeit, falls die Stromrückleitung durch eine einzige Kathodenplatte am Ufer vermittelt wird. Dies Wachsen der Ströme läßt sich aber vermeiden, wenn man die gemeinsame Kathode aller Ströme in Einzelstücken auf den isolierten Außenhüllen der Sonden in der Nähe der blanken Spitzen anbringt, so daß mit dem Überschreiten einer Sonde auch jedesmal ein Teil der Kathode ausgeschaltet und damit der Strom wieder geschwächt wird. Nimmt man die Kathodenflächen von Sonde 1—5 fortschreitend immer kleiner, so kann man beim Ausprobieren sogar völlige Konstanz der Ströme für die noch nicht von der Gasblase erreichten Sonden erzielen. Bei Beachtung dieser Vorsichtsmaßregeln liegt demnach der zu erwartende Fehler unter 0,5 cm.

Zu b). Die bloße Annäherung der Gasblasengrenze an die Sonde bedingt schon eine Stromschwächung. Es könnte daher sein, daß der Anker abreißt, *ohne* daß die Sonde von der Gasblasengrenze erreicht ist. Dies läßt sich aber leicht experimentell kontrollieren. Wählt man den Ankerstrom zu 0,45 Weber, d. h. 50 Proz. oberhalb des Abreißstromes, so kann man bei Senkrechtstellung des Rahmens die Sonde von unten her langsam an die Wasseroberfläche heranführen, wobei die Luftmasse über dem Wasser sozusagen die Gasblase vertritt und die Sonde sich statt der Gasblase bewegt. Der Anker bleibt dann mit Sicherheit noch haften, wenn der Abstand zwischen Sondenoberfläche und Wasseroberfläche auf 0,5 cm gesunken ist.

Insgesamt ergibt sich also, daß bei Beachtung entsprechender Vorsichtsmaßregeln die Grundüberlegung der Methode so weit zutrifft, daß das Losreißen des Ankers jedenfalls bei Überschreitung der Sonde um 0,5 cm und das Haftenbleiben bis zur Annäherung auf 0,5 cm gesichert ist. Nimmt man hierzu noch den eigenen Durchmesser der Sonde, so ergibt sich, daß der gesamte Unsicherheitsbereich unter 2,5 cm bleibt.

Hierzu kommen noch die Unsicherheiten durch die Bewegung der Sonden zum Rahmen und durch die Bewegung des ganzen Rahmens zum Patronenort infolge der Detonation. Bei der Messung in horizontaler Richtung bleibt die Bewegung

der Sonden, wie durch die Reckung von Kupferdrähten festgestellt wurde, wesentlich unter 2 cm, die eventuelle Bewegung des Rahmens gleicht sich durch das beiderseitige Anbringen der Sondengruppen aus. Bei der Messung in vertikaler Richtung nach unten war überhaupt keine Bewegung der mechanisch günstiger orientierten Sonden nachweisbar. Die Bewegung des Rahmens entzieht sich dagegen der Messung, kann aber bei der großen Masse des Rahmens und der Stärke der Halteketten, sowie bei der guten Übereinstimmung der Vertikalmessung mit der Horizontalmessung nur geringfügig sein. Dem Sinne nach wirkt dieser Fehler so, daß er den Gasblasenradius zu klein erscheinen läßt.

Versuchsbeispiel. 2120 g nasse + 80 g trockene Schießbaumwolle in Messingkapsel von 16,0 cm Höhe, 11,2 cm Durchmesser und 0,15 cm Wandstärke in 900 cm Wassertiefe. Sondenabstände von Patronenmitte:

links 1) 135; 2) 145; 3) 159; 4) 170; 5) 183 cm
rechts 6) 138; 7) 152; 8) 161; 9) 180; 10) 187 „

Ergebnis: Die Magnetanker zu 1 und 2, sowie zu 6 und 7 sind abgerissen. Also liegt der Gasblasenradius zwischen 145 und 159 cm bzw. 152 und 161 cm.

Zwei weitere Versuche unter den gleichen Bedingungen ergeben links 145/156 cm, rechts 154/165 cm, bzw. links 143/156 cm, rechts 156/167 cm. Hieraus folgt als Mittel aller unteren Grenzen 149 cm, und als Mittel aller oberen Grenzen 161 cm. Dies gibt als Mittelwert 155 cm, eine Zahl, welche übrigens mit keinem der Einzelresultate in Widerspruch steht.

Die Versuchsergebnisse. In dieser Weise wurden bei jeder Versuchsanordnung 3—5 Versuche gemacht und zu einem Mittel zusammengefaßt. Die Form der Patrone ist dabei in der Regel zylindrisch von 11,2 cm Durchmesser und einer der betreffenden Sprengstoffmenge angepaßten Höhe, bei 0,15 cm Messingwandstärke. Die Lage der Patrone ist bei den Horizontalmessungen in der Regel vertikal in bezug auf die Zylinderachse, bei den Vertikalmessungen horizontal. Alle Abmessungen rechnen von der Patronenmitte. Als Sprengstoff wird in der

Regel nasse Schießbaumwolle verwandt, die angegebenen Sprengstoffmengen sind aber auf trockene Substanz umgerechnet. Alle Ausnahmen sind besonders vermerkt.

Tabelle I.

Horizontalmessungen.

Lfde. Nr.	Versuchsbedingungen		Versuchsergebnisse		Bemerkungen
	Sprengtiefe	Sprengstoffmenge	Grenzwerte	Mittelwert	
1	200 cm	1910 g	179/192 cm	185 cm	
2	300 „	1910 „	175/188 „	181 „	
3	600 „	1910 „	165/176 „	170 „	
4	900 „	1910 „	149/161 „	155 „	
5	300 „	910 „	135/147 „	141 „	
6	300 „	455 „	108/119 „	113 „	
7	300 „	1910 „	176/188 „	182 „	Patrone liegt horizontal.
8	300 „	1070 „	142/155 „	148 „	Patronenquerschnitt quadratisch; Messung senkrecht zur Quadratfläche; Wandstärke 1 mm.
9	300 „	1070 „	146/159 „	152 „	Wie Nr. 8; jedoch Messung in Richtung der Quadratdiagonalen.
10	300 „	1910 „	177/190 „	183 „	Die ganze Sprengmasse besteht aus trockener Schießbaumwolle.
11	300 „	910 „	124/136 „	130 „	Oberhalb des Sprengstoffs ein gleich großer Luftraum.
12[1])	300 „	910 „	a) 130/142 b) 128/140	136 134 } 135	Neben dem Sprengstoff, in Richtung auf die eine Sondenseite, ein gleich großer Luftraum.

1) a) Sondenmessung in Richtung des Sprengstoffs, b) Sondenmessung in Richtung des Luftraumes.

Tabelle II.

Vertikalmessungen.

Lfde. Nr.	Versuchsbedingungen		Versuchsergebnisse		Bemerkungen
	Sprengtiefe	Sprengstoffmenge	Grenzwerte	Mittelwert[1])	
1	300 cm	1910 g	160/174 cm	166 cm	
2	600 „	1910 „	145/156 „	149 „	
3	800 „	1910 „	142/153 „	146 „	
4	300 „	910 „	120/133 „	125 „	
5	300 „	470 „	92/106 „	98 „	

Schlußfolgerungen. In folgendem werden nicht die unmittelbar gefundenen Grenzwerte der Wasserbewegung, sondern die aus ihnen berechneten Mittelwerte verwandt. Diese sind in jedem Einzelfalle um die halbe Intervallbreite unsicher, doch ist dieser Fehler beim Gesamtmittel wesentlich geringer, da die Intervalle sich von Versuch zu Versuch etwas verschieben.

Nach der Tab. I, welche in der Hauptsache benutzt werden soll, ist die Ausdehnung der Gasblase in erster Linie bedingt durch die Sprengstoffmenge an trockner Substanz und durch die Sprengtiefe, und zwar wird dieser Zusammenhang durch folgende empirisch gefundene Formel wiedergegeben:

$$r_{max.} = 159{,}3 \sqrt[3]{\frac{M}{P}} \text{ cm},$$

wo $r_{max.}$ die maximale Ausdehnung der Wasserbewegung, M die Sprengstoffmenge in Gramm an trockner Substanz und P den Gesamtdruck = äußerer Luftdruck + Wasserdruck in g/cm² bedeutet; die Zahlenkonstante ist aus der Gesamtheit der Versuche berechnet. Wie unerwartet genau sich diese Formel den Versuchen 1—10 anschließt, zeigt nachfolgende Tab. III.

Aus dieser vollständigen Wiedergabe der Versuchswerte durch die beiden Größen M und P geht andererseits hervor, daß die sonstigen Versuchsbedingungen keinen merklichen Einfluß besitzen. Es sind dies: Form der Patrone (gleicher kreisförmiger Querschnitt bei verschiedener Länge, quadratischer Querschnitt), Lage der Patrone (vertikal, horizontal, ver-

1) Korrigiert auf genaue Vertikalrichtung.

Tabelle III.

Lfd. Nr.	M g	P g/cm²	Konstante	$r_{ber.}$	$r_{beob.}$	$r_{ber.} - r_{beob.}$
1	1910	1200	158,5	186,0	185	+ 1,0
2	1910	1300	159,3	181,1	181	+ 0,1
3	1910	1600	160,3	169,0	170	− 1,0
4	1910	1900	154,8	159,6	155	+ 4,6
5	910	1300	158,7	141,4	141	+ 0,4
6	455	1300	160,2	112,3	113	− 0,7
7	1910	1300	160,2	181,1	182	− 0,9
8	1070	1300	157,8	149,3	148	+ 1,3
9	1070	1300	162,1	149,3	152	− 2,7
10	1910	1300	161,0	181,1	183	− 1,9
		Mittel:	159,3			

schiedene Orientierung der quadratischen Querschnitte), Wandstärke (1,5 mm, 1,0 mm, außerdem besondere, hier nicht aufgeführte Vergleichsversuche von 0,0 mm und 2,0 mm), Wassergehalt (im allgemeinen 16 Proz. der Hauptladung, bei Nr. 10 nur trockene Schießbaumwolle). Nur ein Luftraum neben dem Sprengstoff innerhalb der Patrone bleibt nicht ohne Wirkung und zwar verringert er $r_{max.}$ um einige Prozente, ohne daß die Lage des Luftraumes zu der Meßrichtung einen wesentlichen Einfluß hat (Nr. 11 und 12).

Die Ausdehnung der Wasserbewegung nach unten in Tab. II ist durchweg um reichlich 10 Proz. kleiner als für die Horizontalmessung. Dieser Unterschied liegt in dem zu erwartenden Sinne, da ja der Gesamtdruck nach unten hin wächst. Genauere Einzelheiten lassen sich aus dem Versuchsmaterial nicht schließen, da die Vertikalmessungen infolge der unkontrollierbaren Rahmenbewegung (vgl. S. 270) wesentlich geringere Genauigkeit haben als die Horizontalmessungen.

II. Die Geschwindigkeit der Wasserbewegung.

Die Meßmethode. Die obige Methode eignet sich fast unmittelbar auch für die Geschwindigkeitsmessung, indem man den Zeitabstand zwischen der Stromunterbrechung an einer Sonde und der nächsten Sonde bestimmt. Benutzt man hierfür den bekannten von der Firma Hahn-Kassel hergestellten Flugzeitenmesser, bei welchem im Moment der Stromunterbrechung ein Anker von einem Elektromagneten fallen gelassen wird, so kann man die schon gewonnenen Erfahrungen

über das Funktionieren der Sonden im Wasser fast vollständig verwerten, indem man die Kontrollen mit einem Helmholtzschen Pendelunterbrecher ausführt. Auf die Einzelheiten dieser an sich bekannten Zeitmeßmethode, sowie auf die verschiedenen Fehlermöglichkeiten und Vorsichtsmaßregeln soll hier nicht näher eingegangen werden; die unvermeidlich gebliebenen Fehler bleiben unter $\pm$ 10 Proz. mit Ausnahme des Messungsbereichs zunächst der Patrone, für welchen schätzungsweise bis $\pm$ 20 Proz. anzusetzen sind. Diese verhältnismäßig hohen Fehler liegen in der Schwierigkeit und Neuheit der ganzen Methode, bleiben aber auf das Hauptergebnis ohne bestimmenden Einfluß.

Bei größerer Entfernung als 100 cm genügt die Anbringung zweier Sonden der bisherigen Art. Unterhalb 100 cm wird eine Stange von 1,6 cm Durchmesser, welche bis auf die blanke Endfläche isoliert ist, der Sprengpatrone *radial* in sehr fester Montierung gegenübergestellt. Unterhalb 35 cm versagt auch diese Einrichtung, da die Detonation alles zerstört. Man gewinnt aber eine letzte Meßstelle unmittelbar an der Patronenwand, indem man ein Stück Kork mit einer kleinen, Quecksilber enthaltenden Höhlung an der Patrone festbindet und in das Quecksilber die äußersten Spitzen von zwei sonst vollständig isolierten Drähten taucht. Bei der geringsten Bewegung der Patronenwand wird dieser Kontakt unterbrochen, wobei die nachträgliche Zerfetzung der Drähte ohne Einfluß bleibt.

Versuchsergebnisse. Die einzelnen Werte sind in folgenden beiden Tabellen zusammengestellt, wobei jeder Wert das Mittel aus 3—5 Versuchen darstellt.

Aus den Daten der Tab. IV. läßt sich die Geschwindigkeit der Wasserbewegung, genauer gesagt die Geschwindigkeit der Gasblasengrenze, als Funktion der Entfernung von der Patronenmitte auf graphischem Wege bestimmen. Man zeichnet zu diesem Zwecke zunächst die Kurve der Gesamtzeiten, indem man die Entfernung von der Patronenmitte als Abszisse x und die zugehörige Gesamtzeit als Ordinate y aufträgt, wobei an den Stellen, wo die Grenzen der benutzten Intervalle nicht genau aneinander stoßen, kleine Interpolationen notwendig sind. Nachdem man dann die so erhaltene Kurve

Tabelle IV.

Die Wassergeschwindigkeit als Funktion der Entfernung. (1610 g bezogen auf trockene Schießbaumwolle; 500 cm Wassertiefe; alle Entfernungen von der Patronenwand gerechnet)

Lfd. Nr.	Entfernungsbereich in cm	Zwischenzeit in sec/10 000
1	0— 34,8	32
2	0— 54,8	79
3	0— 74,8	159
4	0— 94,5	236
5	94,2—113,8	106
6	114,7—134,4	215
7[1])	94,4—135,0	344

Tabelle V.

Die Wassergeschwindigkeit als Funktion der Sprengtiefe. (1610 g bezogen auf trockene Schießbaumwolle. Entfernungsbereich rund 95—115 cm von der Patronenwand gerechnet)

Lfd. Nr.	Sprengtiefe in cm	Entfernungsbereich in cm	Zwischenzeit in sec/10 000
1	300	94,2—113,5 = 19,3	96
2	500	94,2—113,3 = 19,1	106
3	800	94,2—113,9 = 19,7	138

graphisch innerhalb der oben angegebenen Fehlergrenzen stetig ausgeglichen hat, erhält man aus ihr die Geschwindigkeit $C_x = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ als Funktion von x. Die folgende Tabelle enthält einen Auszug aus den gewonnenen Werten:

x cm	20	30	40	50	60	80	100	120	140	163
C_x m/sec	(120)	(86)	63	50	40	28	19	12,5	7,5	0,0

Der letzte Wert ist der vorhergehenden Untersuchung über die Maximalausdehnung, für welche natürlich $C_x = 0$ wird, entnommen; er fügt sich sehr gut in die Folge der Geschwindigkeiten ein, wie man besonders bei graphischer Darstellung von C_x als Funktion von x sieht. Die zu $x = 20$ cm und

1) 7 ist ein Kontrollversuch zu 5 und 6. Addiert man die Zwischenzeiten für 5 und 6 und korrigiert so, daß 5 und 6 der gleichen Gesamtstrecke wie 7 entspricht, so erhält man für 5 und 6 die Zeit 335 gegenüber 344 bei 7, d. h. 3 Proz. Differenz.

$x = 30$ cm gehörigen Werte werden nicht mehr unmittelbar durch die Versuche gestützt, sondern sind unter der an sich unsicheren Annahme eines stetigen Anfangsverlaufs der Gesamtzeitkurve berechnet (vgl. die nähere Kennzeichnung dieser Extrapolation auf S. 281). Ein kleiner Teil dieser Unsicherheit haftet auch noch dem zu $x = 40$ cm gehörigen Werte an, während die Werte oberhalb dieser Stelle als prinzipiell gesichert gelten müssen. Sie sind natürlich mit den entsprechenden Fehlern behaftet, wie die zugrunde liegenden Messungen der Gesamtzeiten, wobei aber die Fehlergrenzen durch den graphischen Ausgleich merklich herabgedrückt sind.

III. Die idealisierte Theorie der Erscheinung.

Zunächst werde ein Gedankenexperiment behandelt, welches das in energetischer Beziehung Wesentliche des wirklichen Versuches in vereinfachter Form hervortreten läßt.

Gegeben sei ein langes, an seinem Ende durch einen Boden abgeschlossenes zylindrisches Rohr vom Querschnitt q mit wärmeundurchlässigen Wänden. In diesem Rohr gleite ein Kolben von der Masse M. Dieser Kolben werde anfänglich in einem Abstande x_0 zwischen dem Boden und der inneren Kolbenfläche festgehalten. Das so abgeschlossene Volumen $V_0 = x_0 \cdot q$ sei mit einem Gase vom Druck P_0 gefüllt; die Konstante $\varkappa$ des Gases sei gegeben. Der auf dem Kolben von außen lastende Luftdruck sei P_a. Wird der Kolben freigegeben, so setzt sich die Wärmeenergie des Gases in Arbeit gegen den Außendruck und in lebendige Kraft des Kolbens um. Beträgt bis zum Punkte x die vom Gase abgegebene Energie E_x, die gegen den Außendruck geleistete Arbeit A_x, die von M angenommene Geschwindigkeit C_x und seine lebendige Kraft L_x, so besteht die Gleichung: $E_x = A_x + L_x$,

Darin ist:

$$E_x = \int_{V_0}^{V_x} P_x \, dV_x = \int_{V_0}^{V_x} \frac{P_0 V_0^{\varkappa}}{V_x^{\varkappa}} \, dV_x = \frac{P_0 V_0}{\varkappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_x} \right)^{\varkappa - 1} \right];$$

$$A_x = P_a (V_x - V_0);$$

$$L_x = \frac{M}{2} C_x^2;$$

also:

$$\frac{P_0 V_0}{\varkappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_x} \right)^{\varkappa - 1} \right] = P_a (V_x - V_0) + \frac{M}{2} C_x^2.$$

Setzt man bestimmte Zahlenwerte ein ($P_0 = 100$ Atm., $V_0 = 2000$ cm³, $q = 100$ cm², $x_0 = 20$ cm, $P_a = 1{,}5$ Atm., $\varkappa = 1{,}67$), so erhält man unmittelbar E_x sowie A_x und mittelbar $L_x = E_x - A_x$ als Funktion von X. Auf diese Weise ergeben sich in Fig. 3 die ausgezogene E_x-Kurve, die gestrichelte

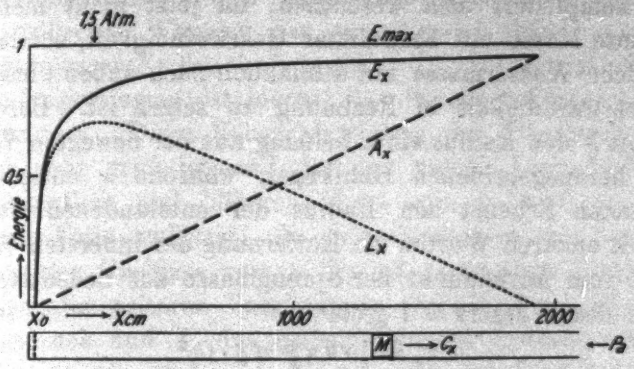


Fig. 3.

A_x-Kurve und die punktierte L_x-Kurve. L_x steigt steil an, erreicht ein Maximum für $P_x = 1{,}5$ Atm., da M nur bis hierhin Geschwindigkeitssteigerungen erfahren kann, und sinkt dann auf Null, indem die Masse M in jedem Punkte ihres Weges den Überdruck $P_a - P_x$ überwinden und schließlich zur Ruhe kommen muß. E_x würde mit beliebig wachsendem x der Asymptote $E_{max.} = \frac{P_0 V_0}{\varkappa - 1}$ zustreben, welche der gesamten im Gase enthaltenen Energie entspricht, muß aber an der Stelle abbrechen, wo M zur Ruhe kommt. Von diesem Punkte an kehrt sich die Geschwindigkeit um, und die uns nicht weiter interessierende Rückschwingung beginnt. Der Verlauf des ganzen Vorgangs ist hierbei natürlich als ideal angenommen; Reibung, Verdichtungen in der äußeren Luftsäule usw. werden nicht berücksichtigt.

Dieses Schema läßt sich nun leicht auf den wirklichen Vorgang übertragen, bei welchem ja ebenfalls ein komprimiertes Gasvolumen von einem bestimmten Moment an gegenüber einem Außendruck und einer trägen Masse zu wirken beginnt. Hierbei werde die Wirklichkeit zunächst idealisiert, indem Inkompressibilität, unendliche Ausdehnung des Wassers, allseitig

konstanter Druck und Adiabatie der Gasausdehnung vorausgesetzt werden. Man kann dann die Größen E_x, A_x und L_x unmittelbar übernehmen, indem man jetzt den Radius vom Mittelpunkt der Sprengmasse aus mit x bezeichnet. Die Formel für E_x und für A_x bleibt die gleiche, die Formel für L_x dagegen kompliziert sich wesentlich, da jetzt nicht mehr eine bestimmte Masse mit bestimmter Geschwindigkeit, sondern die unendliche Wassermasse mit allmählich nach außen abnehmender Geschwindigkeit in Rechnung zu setzen ist. Bezeichnet man mit ξ den Radius einer beliebig aus der bewegten Wassermasse herausgegriffenen Hohlkugel, während x entsprechend dem ersten Schema den Radius der entstandenen Gasblase oder mit anderen Worten die Entfernung der innersten Wasserschicht vom Mittelpunkt der Sprengmasse aus bedeutet, so ist (Dichte des Wassers = 1 g/cm³):

$$dL_\xi = \tfrac{1}{2} \cdot 4\pi \xi^2 d\xi \cdot C_\xi^2 .$$

C_ξ, die Geschwindigkeit der betrachteten Wasserschicht, läßt sich wegen der Inkompressibilität des Wassers leicht auf C_x, die Geschwindigkeit der innersten Wasserschicht, zurückführen, indem die innerhalb der gleichen Zeit Δt verdrängten Wasservolumina einander gleich sein müssen:

$$C_\xi \Delta t 4\pi \xi^2 = C_x \Delta t 4\pi x^2 ,$$

also:

$$dL_\xi = 2\pi C_x^2 x^4 \frac{d\xi}{\xi^2} ,$$

$$\int_x^\infty dL_\xi = L_x = 2\pi C_x^2 x^4 \cdot \int_x^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} ,$$

$$L_x = 2\pi C_x^2 x^3 = \tfrac{2}{3} C_x^2 V_x .$$

Um Irrtümer zu vermeiden, präzisieren wir L_x nochmal: L_x ist die lebendige Kraft der überhaupt in Bewegung gesetzten Wassermassen in dem Augenblick, wo die Gasblasengrenze die Entfernung x von dem Mittelpunkt der Sprengpatrone erreicht hat.

Insgesamt erhält man also:

$$\frac{P_0 V_0}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_0}{V_x}\right)^{\varkappa - 1}\right] = P_x (V_x - V_0) + \tfrac{2}{3} \cdot C_x^2 V_x .$$

Zur Berechnung der drei Kurven E_x, A_x, L_x als Funktion von x muß man die zugehörigen Zahlenwerte einsetzen, wobei

zwecks späterer Vergleichung des Versuches mit der Theorie die Bedingungen des Abschnitts II zugrunde gelegt werden. Der einzig sichere Wert ist hierbei die leicht zu messende Gesamtenergie W des Sprengstoffs, welche in unserem Falle — vom absoluten Nullpunkt an gerechnet — rund 1100 Cal/kg beträgt. Mit Hilfe von W erhält man aus den Mengen und den spezifischen Wärmen der entstehenden Gase, sowie dem Anfangsvolumen V_0 den Anfangsdruck P_0 zu rund 12500 Atm.[1]) Als Anfangsvolumen ist hierbei das Sprengstoffvolumen selbst angenommen. Diese Vernachlässigung des Covolumens, das an sich sehr groß ist und für den ersten Augenblick einen außerordentlich viel höheren Wert von P_0 bedingt, ist in unserem Falle zulässig, da das Covolumen bei der Ausdehnung der Gasblase seinen Einfluß fast sofort verliert, so daß also alle weiteren Vorgänge so verlaufen, als ob P_0 der Anfangsdruck und V_0 das Anfangsvolumen gewesen wären.

Mit der Annahme von P_0 ist auch die Größe von $\varkappa$ gegeben, da bei Umrechnung auf gleiche Einheiten $\frac{P_0 \cdot V_0}{\varkappa - 1} = W$ sein muß. Das $\varkappa$ ergibt sich nach dieser Formel zu rund 1,2. Dieser Wert ist wesentlich niedriger als der Durchschnittswert von etwa 1,36 der entwickelten Gase bei 0° C, wird aber sofort verständlich, wenn man das sehr starke Anwachsen von c_v für CO_2 und H_2O und das merkliche Anwachsen für CO und N_2, wie es der Berechnung von P_0 zugrunde liegt, mit allen Konsequenzen in Rechnung setzt. Genau genommen dürfte man natürlich nicht mit dem Durchschnittswert von $\varkappa$ rechnen, sondern müßte für jede Phase des Vorganges das zugehörige $\varkappa$ einsetzen. Diese Rechengenauigkeit wäre aber übertrieben, da die ganzen Grundlagen der Berechnung von P_0 und $\varkappa$ für die hohen Temperaturbereiche aus mehrfachen Gründen sehr unsicher werden. Falls man übrigens auf Grund anderer Annahmen, z. B. durch Berücksichtigung einer anfänglichen Dissoziation der Gase, einen anderen Durchschnittswert von $\varkappa$ vorzöge, so würde das am Charakter des ganzen Vor-

1) Über die Berechnungen vgl. Escales, Die Schießbaumwolle (Veit & Comp., Leipzig 1905). Die prozentualen Gewichte der hauptsächlich entwickelten Gase sind N_2 18 Proz., CO 30 Proz., CO_2 34 Proz., H_2O 17 Proz., CH_4 4 Proz.

gangs nichts wesentliches ändern, zumal mit der Vertauschung von x eine entsprechende Vertauschung von P_0 zwangsmäßig verbunden ist, welche den Einfluß der Veränderung von x zum großen Teile wieder aufhebt.

Die noch fehlenden Zahlenwerte sind: der Außendruck $P_a = 1{,}5$ Atm., entsprechend dem für die Horizontalausdehnung in 5 m Sprengtiefe geltenden Verhältnissen, das Anfangsvolumen $V_0 = 1240$ cm³ entsprechend der Sprengstoffmenge von 1610 g, $x_0 = 6{,}7$ cm als Radius des als kugelförmig anzunehmenden V_0 und endlich die annähernd berechenbare Anfangstemperatur $T = 3000°$ abs., zur Berechnung der wichtigsten Temperaturpunkte.

Bei Einsetzung aller dieser Zahlenwerte erhält man den Verlauf von E_x, A_x und L_x als Funktion von x, indem man die Volumina durch die zugehörigen Radien ausdrückt. Der Kurvenverlauf entspricht in allen Teilen dem Schema der Fig. 3, nur daß die Kurven infolge der Proportionalität von V_x mit x^3 einen etwas anderen Verlauf nehmen (Fig. 4).

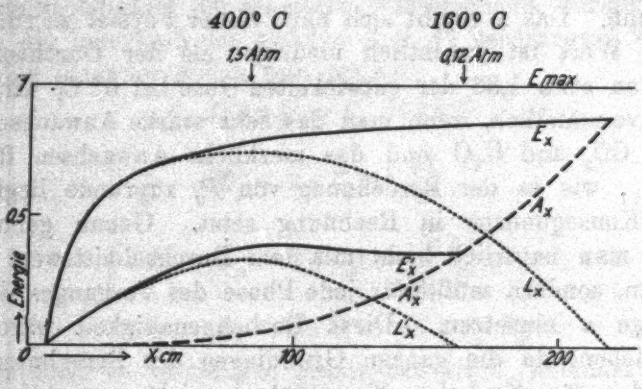


Fig. 4.

IV. Vergleich der Versuchsergebnisse mit der idealisierten Theorie.

Zum Vergleich tragen wir jetzt in dieselbe Figur die Versuchswerte E_x', A_x', L_x' ein, wobei nicht wie oben L_x als Differenz $E_x - A_x$, sondern E_x' als Summe der aus den Versuchsresultaten leicht berechenbaren Kurven $A_x' + L_x'$ gefunden wird. A_x' fällt genau mit A_x zusammen, L_x' muß aus den experi-

mentell gefundenen Geschwindigkeiten C_x und den zugehörigen Radien x nach der Formel $L = 2\pi C_x^2 x^3$ berechnet werden.[1])

Die L_x'-Kurve kann hierbei nur von etwa $x = 40$ cm an als experimentell gesichert gelten, die Strecke von 6,7 bis 40 cm ist sozusagen extrapoliert. Diese Extrapolation muß folgendermaßen verstanden werden. Tatsächlich ist die Bewegungsenergie der Wassermassen in unmittelbarer Nähe der Sprengpatrone außerordentlich groß, der Hauptteil der Energie breitet sich aber sofort als Druckwelle mit Schallgeschwindigkeit bzw. Überschallgeschwindigkeit in dem Medium aus. Der Anfang der L_x'-Kurve entspricht daher nur dem Teil der ursprünglichen Gesamtenergie, welcher in der weiteren Wasserbewegung seine stetige Fortsetzung und Vermehrung findet.

Der Vergleich der Versuchsresultate mit der idealisierten Theorie führt zu folgenden Ergebnissen:

1. *Der Gesamtverlauf.* Die experimentellen Kurven zeigen im großen und ganzen den gleichen Verlauf wie die theoretischen, nur im verkleinerten Maßstabe. Im einzelnen sind die L_x'- und die E_x'-Kurve in ihrem Anfangsverlauf zu flach; im Endverlauf entspricht L_x' ganz dem Schema, während E_x' statt geringen Anstiegs bei E_x einen leisen Abfall zeigt. Besonders hervorgehoben sei die gleiche Lage der Maxima für L_x' und L_x.

2. *Druck- und Temperaturwerte.* Für die wichtigsten Punkte, nämlich für das Maximum und den Endpunkt der L_x'-Kurve, sind die zugehörigen Drucke und Temperaturen oberhalb des Kurvenbildes eingetragen. Am bemerkenswertesten ist, daß das Maximum der experimentellen L_x'-Kurve mit $P_x = 1{,}5$ Atm. gut zusammenfällt, d. h. die experimentell bestimmte kinetische Energie der Wassermassen wächst tatsächlich so lange, wie $P_x - P_a > 0$ ist, und nimmt von $P_x - P_a \gtrless 0$ an wieder ab, genau so, wie es auch ohne ausführliche Theorie durchaus ge-

1) Dieser Ausdruck ist sehr empfindlich gegen Änderungen von C_x; daher kommt es, daß die Kurve bei Benutzung der C_x-Werte, welche man zunächst bei dem graphischen Ausgleich der Zeitwerte erhält (vgl. S. 274), einzelne Unregelmäßigkeiten zeigt. Diese sind aber nicht reell, da die zu ihrer Beseitigung notwendigen Änderungen der C_x-Werte dem stetigen Verlauf und den Fehlergrenzen der Ausgangskurven nicht widersprechen. Mit anderen Worten: der graphische Ausgleich läßt sich so lange fortsetzen, bis die Zeitkurve, die Geschwindigkeitskurve und die Energiekurve stetig und innerhalb der Beobachtungsfehler verlaufen.

fordert werden muß. Der zweite Druckwert zeigt, daß für das experimentelle Maximalvolumen der Gasblase der Innendruck fast auf Null gesunken ist. Die Temperaturwerte zusammen mit dem Druckverlauf ergeben, daß Kondensation des Wasserdampfes, welcher bei der trockenen Schießbaumwolle etwa 25 Proz. und bei der nassen Schießbaumwolle etwa 40 Proz. des Gesamtvolumens ausmacht, selbst bis zur Maximalausdehnung der Gasmassen nicht zu erwarten ist. Dies ist deswegen von Wichtigkeit, weil die Kondensation des Wasserdampfes Komplikationen im Verlauf der Kurven bedingen würde.

3. *Energetisches.* Die Energie, welche für die gesamte Wasserbewegung verbraucht wird, läßt sich am zuverlässigsten für die Stelle berechnen, wo die Gasblase ihre Maximalausdehnung erreicht hat, da dieser Wert nicht mehr von der Geschwindigkeitsmessung abhängt, sondern durch den ganzen Abschnitt I mit größter Genauigkeit bestimmt ist. Diese Energie beträgt etwa 36 Proz. der Gesamtenergie des Gases, vom absoluten Nullpunkt an gerechnet, und etwa 41 Proz. der Energie, welche im theoretischen Idealfalle für die gesamte Wasserbewegung verbraucht werden würde. Ein Energieverlust von dieser Höhe ist qualitativ durchaus plausibel, da wir ja bei dem idealen Schema von dem Energieverlust durch Druckwellen, durch Reibung und Wärmeabgabe ganz abgesehen haben, die genauere Diskutierung der Kurven führt aber hierüber hinaus zu quantitativen Angaben über die Verwendung dieser

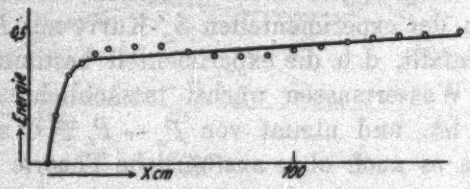


Fig. 5.

Energie. Trägt man die Differenz zwischen E_x und E_x' als Funktion von x auf, so erhält man für den Energieverlust die Kurve der Fig. 5.[1]) Danach zerfällt dieser Verlust in zwei

1) Da die Energieverluste mit wachsendem x ständig zunehmen müssen, so können die Schwankungen der experimentellen Kurve (ooo) nicht reell sein. Sie liegen völlig innerhalb der Versuchsfehler und

leicht zu trennende Teile: etwa $^4/_5$ erfolgen auf der kleinen Strecke bis $x = 20$ cm, der Rest von $^1/_5$ erfolgt allmählich von $x = 20$ cm bis zur Maximalausdehnung der Gasblase. Die Deutung ist einfach: der Hauptbetrag von $^4/_5$ ist nichts anderes als die Energie der sich unmittelbar nach der Detonation loslösenden Kompressionswelle, der Restbetrag wird allmählich bei der weiteren Wasserbewegung durch Wärmeabgabe und Reibung verbraucht. Durch die Reibung allein erklärt sich auch der langsame Abfall der E_g'-Kurve, indem die Wirkung der Reibung den zum Schluß nur noch geringen Energiezufluß überkompensiert.

4. *Energiebilanz.* Die gesamte Energie des Sprengstoffes, vom absoluten Nullpunkt an gerechnet, zerlegt sich unter den benutzten Versuchsbedingungen in folgende Teile[1]):

a)	für die Massenbewegung des Wassers, d. h. im Endeffekt für die Schaffung eines Hohlraumes gegen den Außendruck	36 Proz.
b)	für die Kompressionswelle	40 „
c)	für Reibung und Wärmeabgabe	10 „
d)	als Energierest der Sprenggase	14 „

V. Zusammenfassung.

1. Es wird eine rein elektrische, von keinen mechanischen Fehlern beeinflußte Methode zur Messung der Wasserbewegung in der Nähe eines Sprengzentrums nach Maximalausdehnung und Geschwindigkeit angegeben und für verschiedene Versuchsbedingungen durchgeführt.

2. Die Maximalausdehnung wird mit großer Genauigkeit durch die empirische Formel

$$r_{max} = \text{const} \cdot \sqrt[3]{\frac{M}{P}}$$

wiedergegeben, wo M die Masse an trockenem Sprengstoff und P den gesamten Außendruck bedeutet.

---

würden sich bei genügend weit getriebenem graphischen Ausgleich der ursprünglichen Messungen ganz beseitigen lassen; viel Zweck hat diese große Mühe aber nicht, da der feinere Verlauf der Kurve doch zweifelhaft bleiben würde.

1) Mit dem bekannten thermodynamischen Ökonomiegrad hat die Berechnung selbstverständlich nichts zu tun, da es sich nicht um einen Kreisprozeß, sondern um einen einmaligen Vorgang handelt.

3. Die Theorie der Wasserbewegung wird für ideale Verhältnisse entwickelt, wobei die Ausdrücke für die vom Gase abgegebene Energie, für die gegen den Außendruck geleistete Arbeit und für die von den Wassermassen aufgenommene lebendige Kraft berechnet und graphisch dargestellt werden.

4. Der Vergleich dieser Theorie mit der Erfahrung gibt ein einwandfreies Gesamtbild der Erscheinung und eine sehr gute Bestätigung des einzigen einer unmittelbaren Prüfung zugänglichen Versuchswertes, indem das experimentell gefundene Maximum der lebendigen Kraft an der Stelle liegt, wo der Innendruck der Gase gleich dem äußeren Gesamtdruck wird.

5. Die weitere Diskussion der Versuchsresultate ergibt die prozentuale Verteilung der Gesamtenergie des Sprengstoffs auf die Massenbewegung des Wassers bzw. die Arbeit gegen den Außendruck, auf die Kompressionswelle, auf Reibung und Wärmeabgabe, auf den Energierest der Sprenggase.

Danzig, April 1923.

(Eingegangen 26. April 1923.)

3. *Einfluß der Rotation auf die Empfindlichkeit einer absoluten Druckwage; von A. Michels.*

Zur Messung von hohem Druck wird jetzt, wie bekannt, nur der sogenannte Amagatkolben gebraucht, es sei, daß man ihm die einfache Gestalt gibt eines einzigen Kolben, es sei, daß man nach Schäffer und Budenberg einem Differentialkolben den Vorzug gibt. Sämtliche Apparate sind beschrieben von G. Klein.[1])

Die Größe der Empfindlichkeit wird nun direkt von der Reibung beeinflußt.

Die erste Wage hatte gar keine Vorrichtung um die Reibung zu vermindern. So versuchte u. a. Wiebe durch Klopfen mit einem Holzhammer die Reibung herunterzudrücken. Erst später kam man auf die Gedanken, einmal mit drehen zu versuchen. Dieses lieferte ganz gute Resultate. So gibt u. a. Klein (a. a. O. S. 15) untenstehendes Versuchsresultat:

Druck in Atm.	Reibung in ‰			
	ohne Klopfen	mit Klopfen	ohne Rotieren	mit Rotieren
100	18,1	1,1	20,5	0,2
200	14,7	1,3	13,2	0,1
300	16,1	2,2	12,3	0,3
400	17,9	4,0	17,0	0,5

Holborn[2]) hat später auch mit gutem Erfolg eine Schwankung gebraucht.

Klein versuchte damals eine theoretische Erklärung von dem Einfluß der Rotation zu geben. Er schreibt (a. a. O. S. 18).

1) G. Klein, Untersuchung und Kritik von Hochdruckmessern. Diss. Berlin 1908. Zeitschr. d. V. d. Ingenieure 1909.

2) L. Holborn, Ann. d. Phys.

Um sich vor Augen zu führen wie die Verhältnisse bei der Reibung liegen, wenn eine Relativbewegung zwischen Dichtung und Kolben stattfindet, denke man sich einen mit Manschetten vollkommen dicht abgeschlossenen Kolben, der in einem Zylinder gleitet und der mit Gewichten belastet ist, welche in der Flüssigkeit des Zylinders einen Druck erzeugen. Der Kolben gleitet langsam abwärts und wurde hierbei durch eine Vorrichtung in Rotation versetzt. Ein beliebiger Punkt der Kolbenoberfläche hat dann zwei Geschwindigkeiten (Fig. 1) infolge des Heruntergleitens eine Axialgeschwindigkeit v_a und infolge der Drehbewegung eine Tangentialgeschwindigkeit v_t, beide ergeben die resultierende Geschwindigkeit v.

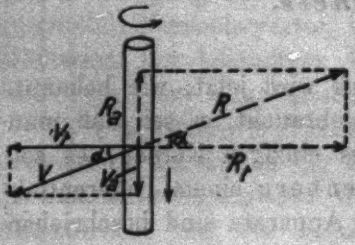


Fig. 1.

Die dem Druck ausgesetzten Manschetten werden eine Reibung hervorrufen, deren Richtung nach dem Grundgesetz der Reibung der Bewegung stets entgegengesetzt ist. Diese Manschettenreibung R muß also der resultierenden Geschwindigkeit v entgegengesetzt gerichtet sein, also in die Rückwärtsverlängerung derselben fallen. Man kann sie wiederum zerlegen in eine Axial- und Tangentialkomponente. Die Axialkomponente R_a ist allein für die Druckmessung von Bedeutung, da sie eine Zusatzbe- bzw. entlastung der Belastungsgewichte darstellt. Man wird bestrebt sein, sie soweit als möglich zu vermindern. Theoretisch wird sie Null in zwei Fällen.

1. wenn $v_a = 0$,
2. wenn $v_t = \infty$ ist.

In beiden Fällen wird der Winkel, der die Reibung R mit der Horizontalen bildet, 0 und die Axialkomponente verschwindet. Der erste Fall tritt ein, wenn ich absolut dichte Manschetten und absolut dichte Leitungen habe; das ist aber nur selten der Fall, oft wird sich ein geringes Absinken ergeben. Dann kann ich nach dem zweiten Fall die Reibung, wenn auch nicht auf Null, so doch auf sehr geringe Beträge bringen, wenn ich die Umdrehung bzw. Tangentialgeschwindigkeit nur genügend hoch wähle, die Axialgeschwindigkeit

möglichst klein. Letzteres ist leicht möglich: wie die Versuche ergaben, betrug sie bei den drei Instrumenten (welche Klein untersucht) höchstens 0,01 mm/sec gute Wartung vorausgesetzt. Die Tangentialgeschwindigkeit ließ sich bei der Stückrattschen Wage nicht über 200 mm steigern (bei den anderen Instrumenten kann man mit Leichtigkeit auf 800 m/sec kommen). Aus beiden Angaben folgt, daß der

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{0{,}01}{200} = 0{,}00005$$

Winkel $\alpha = \sim 1$ Minute also

$$R_a = R \operatorname{tang}\alpha = 0{,}00005\, R,$$

was auf sehr kleine Reibungsbeträge R_a schließen läßt.

Mit dieser Theorie von Klein kann ich gar nicht einverstanden sein. Nach seiner Meinung ist aus

$$R_a = R_t \operatorname{tang}\alpha$$
$$= R_t \frac{v_a}{v_t}$$

zu schließen, daß für $v_t = \infty$ $R_a = 0$ ist.

Dies wäre nur, wenn R konstant ist. Aber im Gegenteil für $v_t = \infty$ ist auch $R_t = \infty$ also

$$R_a = \frac{\infty}{\infty} v_a = \text{unbestimmt.}$$

Überhaupt läßt sich aus dieser Gleichung nicht ableiten, ob eine, und wenn, welche Beziehung zwischen v_t und R_a besteht, da man vorher sich vollständig klar sein müßte über den Zusammenhang zwischen R_t und v_t. Sind diese proportional, dann existiert gar keine Beziehung. Die Funktion nun

$$R_t = f(v_t)$$

läßt sich schwer ableiten, wenn man keinen vollkommenen Einblick hat in das Wesen der Reibung, welche der Kolben in axialer und tangentialer Richtung erfährt.

Noch eigentümlicher mutet diese Erklärung von Klein an, wenn man in Betracht zieht, daß schon Sommerfeld[1]) im Jahre 1904 eine Abhandlung über die Reibung, besonders bei geschmierten Lagern geschrieben hat, aus der man ein ganz anderes Bild von dieser Erscheinung bekommt.

1) A. Sommerfeld, Zeitschr. f. Math. u. Physik 1914. Arch. f. Elektrotechnik 1914.

Ausgehend von einer Veröffentlichung von Petroff[1]) und Reynold[2]) trachtete Sommerfeld eine Lösung für folgendes Problem zu finden.

Wenn sich eine horizontale Achse in einem gut geschmierten Lager dreht, erhält man bei geringer Rotationsgeschwindigkeit das Bild einer sogenannten trockenen Reibung; d. i. mit großer Annäherung die gleiche Reibung, welche zwei einander berührende und sich gegeneinander bewegende Flächen erfahren. Sie ist unabhängig von der relativen Geschwindigkeit und nur proportional dem gegenseitigen Druck. Bei großer Rotationsgeschwindigkeit ändert sich das Bild ganz und gar und man bekommt eine Erscheinung wie bei der Reibung in einer Flüssigkeitsströmung, d. h. die Reibung wird unabhängig vom Druck, aber proportional der relativen Geschwindigkeit.

Sommerfeld erklärt nun diese Erscheinung mit der Annahme, daß Lager und Achse bei großer Rotationsgeschwindigkeit sich nicht direkt berühren, sondern sich stets zwischen beiden eine dünne Ölschicht befindet.

Nehmen wir mit Sommerfeld an, eine Achse habe in ihrem Lager eine exzentrische Lage, wie in Fig. 2 gezeigt ist; die Drehung finde in der angegebenen Richtung statt. Um die Frage zu vereinfachen, vernachlässigen wir die parallel der Achse auftretenden Flüssigkeitsströmungen.

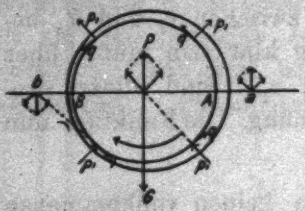


Fig. 2.

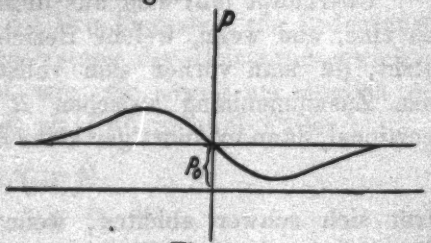


Fig. 3.

Sommerfeld beweist nun, daß in der Olschicht verschiedene Drucke auftreten, die man sich folgendermaßen vorstellen kann. Oberhalb der durch den Mittelpunkt von Lager und Achse gehenden Linie *ab*

durch $p_0 - p_1$,

unterhalb durch $p_0 + p_1$.

1) Petroff, Neue Theorie der Reibung, Hamburg 1886.
2) O. Reynold, Phil. Transakt. London 1886.

Von den obenstehenden Werten ist p in der Ölschicht überall konstant, während p_1 sich ändert, doch in dem Sinne, daß es in zwei bezüglich ab symmetrisch gelegenen Punkten die gleichen Werte hat. In A und B ist p_1 gleich Null, dazwischen erreicht es ein Maximum.

Die graphische Darstellung von p_1 ist in Fig. 3 gegeben. Durch ein Steigen der Rotationsgeschwindigkeit, wie durch Erhöhung der Exzentrizität und der Viskosität steigt das Maximum von p_1 und verschiebt sich gleichzeitig gegen den Punkt der dichtesten Berührung (B), um im Grenzfalle unendlich zu werden und mit B zusammenzufallen.

Fragen wir uns nun, welchen Einfluß dieser Druck auf die Achse ausübt, dann fällt sofort p_0 weg, da seine Resultierende gleich Null ist. Die Kraft p_1 tritt oberhalb von ab als eine Zug- und unterhalb als eine Druckkraft auf. Es muß also eine nach oben gerichtete Resultierende entstehen. Außer dem Druck wirkt noch eine Flüssigkeitsreibung q (Fig. 2). Dieser Wert ist auch nicht überall gleich groß.

Die Resultierende aller dieser Kräfte wurde durch Sommerfeld berechnet. Er bekommt eine nach oben gerichtete, im Mittelpunkt der Achse angreifende und auf ab senkrecht stehende Kraft P.

Diese Kraft nun steigt mit der Viskosität, der Umdrehungsgeschwindigkeit und Exzentrizität und sie ist es, welche die Achse trägt. Sommerfeld ging nun das Problem von einer anderen Seite an und stellte sich die Frage: Wie groß muß die Exzentrizität sein, damit die Kraft P gleich und entgegengesetzt sei dem Gewichte der Achse. Wenn er einen bestimmten Wert für die Exzentrizität findet, betrachtet er diese Stellung als ein Gleichgewicht. Bei Veränderung der Umdrehungsgeschwindigkeit stellt sich von selbst die dazugehörige Exzentrizität ein. Hierauf geht Sommerfeld über zu der Berechnung der Reibung, ausgehend von der Voraussetzung, daß die Reibung stets obenstehendes Bild gibt und kommt so zu ganz brauchbaren Resultaten.

Sommerfeld selbst weist schon auf die Ungenauigkeiten seiner Theorie hin. Will er z. B. auch bei sehr geringer Rotationsgeschwindigkeit eine nach oben gerichtete Kraft bekommen, die imstande ist, die Achse zu tragen, dann muß die

Exzentrizität sehr groß sein. Werden dann nicht die Unebenheiten ineinander greifen? Und weiter, was geschieht mit $p_0 - p_1$, wenn p_1 viel größer als p_0 wird?

Soweit man dem Verhalten der Achse experimentell nachgehen kann, sieht man auch, daß bei geringen Geschwindigkeiten eine ganz andere Reibung statthat. Beginnt die Achse sich zu drehen, dann muß anfänglich trockene Reibung auftreten. Die Abweichung erfolgt gerade nach der anderen Seite, als Sommerfeld annimmt. Die Achse läuft gegen das Lager an. Bei Vermehrung der Tourenzahl greifen die Unebenheiten nicht mehr ineinander (halbe Ölreibung) und bei genügender Schnelligkeit tritt der Fall ein, den Sommerfeld erwähnt, die Achse geht nach der anderen Seite über. Ist p_1 zu groß, dann tritt eine Zerreißung der Ölschicht ein.[1])

Eine andere Frage, die bei Sommerfeld unbeantwortet bleibt, ist: Welches sind die Kräfte, die das Gleichgewicht einstellen? Eine zweite gewichtige Frage schließt sich dieser an: Ist das Gleichgewicht stabil?

Vielleicht kann folgendes einen Begriff von dem Mechanismus der Kräfte geben, welche nacheinander auftreten.

Besprechen wir zunächst die Frage von der trockenen Reibung. Fig. 4 gibt ein Bild von dem Augenblick, da die Umdrehungsgeschwindigkeit noch so gering ist, daß die trockene Reibung statthat. Auf die Achse wirken nun die folgenden Kräfte:

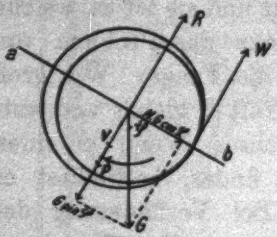


Fig. 4.

das Gewicht G,
die Reibung W,
der hydrodynamische Druck,
die Ölreibung, die auf jene Teile der Achse wirkt, die nicht das Lager berühren.

Durch die exzentrische Lage nach rechts müssen nun die tieferen hydrodynamischen Drucke unter der Linie $a\,b$, die höheren über dieser zu finden sein. Die Resultierende

1) Gümbel, Das Problem der Lagerreibung, Monatsbl. d. Berl. Bez.-Vereins d. Ing. Nr. 5 u. 6. 1914. S. 9. 1916. Jahrbuch der Schiffbautechn. Gesellschaft 1917; V. Vieweg, Archiv f. Elektrotechnik S. 864. 1920.

der Druckkräfte ist dann nach abwärts gerichtet (in der Figur *P*).

Zerlegen wir die Kraft *G* in eine auf *a b* senkrechte und eine Parallele zu $a - b$, so liefert die letztere den normalen Druck *N*

$$N = G \cos \varphi .$$

Die Reibungskraft wird dann ausgedrückt durch:

$$W = \mu G \cos \varphi ,$$

worin μ den Reibungskoeffizienten vorstellt. Überführen wir auf die gebräuchliche Weise *W* durch ein Kräftepaar in eine Kraft *R*, die im Mittelpunkte angreift. Auf die gleiche Weise ist die Flüssigkeitsreibung in ein verzögerndes Kräftepaar und in eine Kraft, die im Mittelpunkt mit *P* zusammenfällt, zu zerlegen. Diese Kraft nennen wir *V*. Die hemmenden Kräftepaare werden durch den Antrieb aufgehoben und fallen dadurch außerhalb der gestellten Frage.

Als resultierende Kraft erhalten wir dann eine Parallele zu *a b*,

$$N = G \times \cos \varphi ,$$

welche durch das Lager aufgefangen wird, und eine Kraft, welche lotrecht auf *a b* steht,

$$P + V + G \times \sin \varphi - \mu G \cos \varphi .$$

Es kann nur dann Gleichgewicht bestehen, wenn diese letzten Kräfte einander aufheben und wenn also:

$$\mu G \cos \varphi = P + V + G \sin \varphi ,$$
$$P + V = G(\mu \cos \varphi - \sin \varphi).$$

Hierin steigt $P + V$ mit der Umdrehungsgeschwindigkeit *U* und mit der Exzentrizität. Im Ruhestand ist diese Summe gleich Null. In diesem Falle verschwindet aber auch die Reibung, so daß

$$0 = -G \sin \varphi$$

und somit

$$\varphi = 0$$

wird. Bei kleinen Werten von *U* wird das linke Glied positiv, aber klein. Wäre *P* und *V* bekannt, dann ist φ zu berechnen. Hierbei tritt einer der Einflüsse auf, von welchem wir oben schon gesprochen haben, nämlich das Entstehen von einem

großen p_1. Vorher besprachen wir schon, wie der Druck in Fig. 2 vorzustellen ist, nämlich

$$\text{oberhalb } a\,b \text{ durch } p_0 - p_1,$$
$$\text{unterhalb } a\,b \text{ durch } p_0 + p_1.$$

Nur wechselt hier oben und unten, da die Exzentrizität nach der anderen Seite zu liegt. Nun folgt aus den Berechnungen von Sommerfeld, daß bei einem Steigen der Exzentrizität p_1 zunimmt, um für den Fall der vollkommenen Berührung zwischen Lager und Achse unendlich zu werden. Hierbei macht er aber die Voraussetzung, daß vollkommen glatte Oberflächen vorliegen, so daß bei dieser Berührung kein Öl mehr dazwischen kommen kann. Nun ist in der Praxis dieses aber unmöglich, so daß in Wirklichkeit ein Unendlichwerden von p_1 ausgeschlossen ist. Bei zunehmender Umdrehungsgeschwindigkeit muß aber doch wohl bei unserer trockenen Reibung, wo also große Exzentrizität vorliegt, p_1 so stark steigen können, daß sie größer wird als P_0. Dies ist für die Seite mit dem hohen Drucke kein Hindernis, wohl aber für die andere Seite, da dann dort negative Drucke auftreten sollen.

Negative Drucke aber von einiger Größe vertragen Flüssigkeiten nicht, da dann Verdampfung eintritt. Für den Augenblick wird der in der Richtung von $a\,b$ wirkende Teil der Druckkräfte nicht mehr aufgehoben, so daß außer der Kraft P eine Kraft längs $a\,b$ entsteht. Die Richtung von dieser Kraft ist in dem von uns bezeichneten Fall nach links, dies folgt daraus, daß das Maximum von p_1 mit dem Steigen der Exzentrizität und Umdrehungsgeschwindigkeit sich nach dem Punkt der dichtesten Berührung verschiebt, um in dem Grenzfall mit diesem zusammenzufallen.

Die Achse gehorcht dieser neuen Kraft und das Öl dringt zwischen Achse und Lager. Die vollkommene Ölreibung tritt ein.

Nun gilt aber die Theorie von Sommerfeld. Von allen Kräften bleibt nur ein verzögerndes Moment, welches U proportional ist und eine Resultierende lotrecht auf $a\,b$, die zusammengesetzt ist aus Einflüssen der Reibung und des hydrodynamischen Druckes. Diese Resultierende, welche wir fernerhin abweichend von obenstehender Bezeichnung P nennen wollen, steigt weder mit der Exzentrizität, Viskosität und Umdrehungs-

geschwindigkeit und ist in Fig. 5 wiedergegeben, worin wir die Bezeichnung von Sommerfeld übernehmen.

Die Resultierende von P und dem Gewichte G wird die Achse verschieben, die Exzentrizität wird anfangs ein wenig größer, da die Resultierende nach auswärts gerichtet ist, hier-

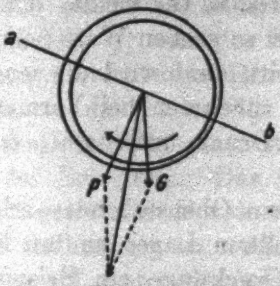


Fig. 5.

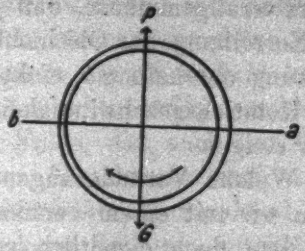


Fig. 6.

durch steigt aber wieder P, während es gleichzeitig ein wenig seine Richtung verändert, da auch $a\,b$ sich etwas verschoben hat, und die Verschiebung setzt sich fort.

Gleichgewicht ist erst dann zu erreichen, wenn P und G entgegengesetzt gerichtet sind, wenn also der Stand erreicht ist, wie Fig. 6 zeigt.

Wenn in dieser Stellung P größer ist als G, wird sich die Achse heben. Zugleich ändert sich Richtung und Größe der Exzentrizität (Fig. 7). Die Resultierende zeigt nun nach

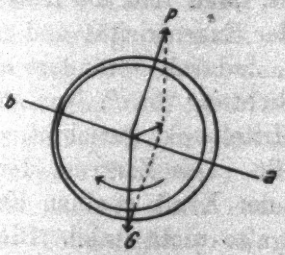


Fig. 7.

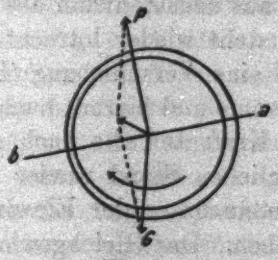


Fig. 8.

rechts; folgt nun die Achse dieser Kraft, dann vermindert sich die Exzentrizität, wodurch wieder P fällt und die Achse auf ihren ursprünglichen Stand zurückkommt. Ist aber P kleiner als G, dann senkt sich die Achse. Die Exzentrizität ändert sich in der Richtung und die Resultierende zeigt nun nach links (Fig. 8).

Folgt die Achse wieder, dann steigt die Exzentrizität und hiermit P, wodurch wiederum die Achse auf ihren ursprünglichen Stand zurückgebracht wird.

Man muß also das durch Sommerfeld behandelte Gleichgewicht als stationär auffassen.

Soll man aber, wie Gümbel (a. a. O.) meint, den Fall derart verallgemeinern, daß p_1 einen so großen Wert bekommt, daß Zerreißung der Ölschichte eintritt, dann wird die saugende Wirkung oberhalb $a\,b$ nicht mehr zunehmen bei Vermehrung der Rotationsgeschwindigkeit, der Druck unterhalb $a\,b$ aber wohl steigen.

Welche Veränderungen soll nun Obenstehendes erleiden, wenn wir mit einem vertikal gestelltem Lager zu tun haben, von dem doch eigentlich unsere Druckwage ein Beispiel ist.

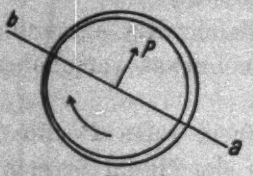


Fig. 9.

Nehmen wir zuerst an, daß es möglich ist, die Achse ganz genau vertikal zu stellen. Dann verschwindet aus unserer Theorie die Größe G als Kraft vollständig. Wir können nur dann ein Gleichgewicht erwarten, wenn auch P gleich Null wird, mit anderen Worten, wenn die Exzentrizität Null ist und die Achse sich vollkommen senkrecht im Lager dreht. Wie steht es nun aber mit der Stabilität? Verschiebt sich die Achse durch die eine oder andere Ursache ein wenig aus dem Zentrum des Lagers, dann tritt die Kraft P auf. Diese steht wieder lotrecht auf der Exzentrizität und gibt der Achse eine Verschiebung (Fig. 9), dadurch verändert sich die Lage von e und hiermit auch die Richtung von P. Nun aber tritt keine Kraft auf, die nach dem Mittelpunkt gerichtet, den ursprünglichen Stand wieder herstellt. Das Zentrum der Achse wird stets unter der Einwirkung der Kraft P einen Kreis beschreiben. Das Gleichgewicht ist also nicht stabil. Bleibt der störende Einfluß bestehen, dann nimmt e stets zu, bis wieder an einer Seite die Annäherung an die Wand des Lagers so groß geworden ist, daß ein negativer Druck auftritt, worüber schon bei dem Übergang von trockener Reibung in die reine Ölreibung gesprochen wurde. Es tritt ebenfalls wieder ein Druck auf, der die Achse von dem Lager abdrückt. Gleichgewicht ist dann erreicht, wenn dieser Druck gleich ist der

Größe des störenden Einflusses. Da im allgemeinen der störende Einfluß nicht groß sein kann, braucht auch dieser Druck keine großen Werte anzunehmen. Soweit man aus den früher angeführten Betrachtungen schließen kann, ist das Auftreten von oben stehendem Druckeinfluß dort zuerst zu erwarten, wo p_0 am kleinsten ist. Bei einer Druckwage verändert sich p_0 mit der Höhe und zwar von den unter dem Kolben herrschenden Druck bis zu einer Atmosphäre an der Stelle, wo das Öl an der Außenspalte zum Vorschein kommt. Dieser Druck von einer Atmosphäre ist natürlich unabhängig von der Belastung. Das hat zur Folge, daß auch der Augenblick, wenn der Druck nach dem Mittelpunkt auftritt, von jener unabhängig ist. Auch die kritische Tourenzahl (d. i. die Tourenzahl, unter der wieder trockene Reibung auftritt) kann also keine Belastungsfunktion sein.

Nun sind freilich störende Kräfte stets vorhanden. Zu erwarten ist also, daß die Achse einen Gleichgewichtsstand nicht erreicht, sondern bei einem konstanten U sich mit einer konstant bleibenden Exzentrizität im Lager herumlaufen wird.

Bei unseren Entwicklungen haben wir einige Voraussetzungen gemacht, die nicht praktisch zu verwirklichen sind.

Zuerst nahmen wir an, daß sowohl Lager, als Achse vollkommen zylindrisch sind. Eine Folge der Tatsache, daß dies in der Praxis nicht der Fall ist, muß sein, daß der minimale Abstand zwischen Lager und Achse sich fortlaufend ändert und die Bewegung nicht so regelmäßig stattfinden kann, als aus unseren obenstehenden Betrachtungen folgen sollte. Da die Bewegung sich fortwährend an der Grenze der trockenen Reibung abspielt, ist es auch möglich, daß dann und wann eine direkte Berührung auftritt, wenn gerade ein erhabener Teil der Achse einen ebensolchen des Lagers passieren will. Ist die Tourenzahl groß genug, dann wird natürlich dieser Kontakt direkt wieder unterbrochen. War die Tourenzahl aber bereits klein, dann besteht die Möglichkeit, daß diese Berührung eine genügende Verzögerung gibt, um die trockene Reibung bestehen zu lassen. Läßt man die Achse ohne anderen Widerstand ablaufen, als diese Lagerreibung, dann ist der Augenblick von dem Auftreten der trockenen Reibung nicht immer genau der gleiche.

Eine zweite Voraussetzung, die nicht ausführbar ist, ist das Vertikalstellen der Achse. Ist die vertikale Stellung nicht vollkommen erreicht, dann muß, wenn auch sehr klein, die Kraft G auftreten. Bei sehr genauem Arbeiten ist dieser Einfluß aber auf ein Minimum zu bringen.

Wir wollen nun prüfen, zu welchen Folgen unsere Vorstellungen führen. Nehmen wir an, daß die Schnelligkeit so groß ist, daß die reine Ölreibung stattfindet, dann muß nach Sommerfeld die Reibung proportional sein der Umdrehungsgeschwindigkeit, der Oberfläche und der Viskosität. Wir können also die Tangentialreibung in folgender Gleichung

$$W_1 = \int c\, 2\pi R\, dh\, U\eta$$

wiedergeben, worin c eine Funktion der Spaltenweite und der Exzentrizität ist. Für den Fall, daß keine axiale Strömungen vorhanden wären, ist diese Funktion durch Sommerfeld besprochen. η und c sind Druckfunktionen und also abhängig von h. Mit großer Annäherung ist R konstant zu setzen. Nennen wir die Winkelgeschwindigkeit ω, dann ist

$$U = R\omega,$$

$$W_i = 2\pi R^2 \omega \int c\eta\, dh,$$

also das Reibungsmoment

$$M_i = 2\pi R^3 \omega \int c\eta\, dh,$$

setzen wir für das Integral J_1

$$M_i = 2\pi R^3 \omega J_1.$$

Bei der von uns gebrauchten Druckwage waren drei solche Reibungsmomente vorhanden, nämlich eines für den dicken Teil des Kolbens, eines für den dünnen und eines an der Unterseite für die Führung nach Anbringung der später besprochenen Verbesserungen. Das totale Moment ist also:

$$M_i = 2\pi\omega\{R_1^3 J_1 + R_2^3 J_2 + R_3^3 J_3\}.$$

Gibt man nun der Druckwage eine genügende Anfangsgeschwindigkeit und läßt man die Bewegung auslaufen, dann wird eine Verzögerung auftreten. Nennen wir die Verzögerung φ, dann ist

$$-\varphi = \frac{M}{T} \quad (T = \text{Trägheitsmoment}),$$

$$M = 2\pi\omega\{R_1^3 J_1 + R_2^3 J_2 + R_3^3 J_3\},$$

$$-\varphi = \frac{2\pi\omega\{R_1^3 J_1 + R_2^3 J_2 + R_3^3 + J_3\}}{T},$$

$$-\varphi = A\varphi,$$

worin A eine Konstante ist.

$$A = \frac{2\pi\{R_1^3 J_1 + R_2^3 J_2 + R_3^3 J_3\}}{T}.$$

Setzen wir den zurückgelegten Winkel gleich a

$$\omega = \frac{da}{dt},$$

$$\varphi = \frac{d^2a}{dt^2},$$

$$-\frac{d^2a}{dt^2} = A\frac{da}{dt}.$$

Diese Gleichung liefert bei Beachtung des Anfangsschlusses

$$a = \frac{\Omega}{A}(1 - e^{-At}),$$

worin Ω die Anfangsrotationsgeschwindigkeit vorstellt. Solange also die Voraussetzung für die Ölreibung erfüllt ist, gilt diese Gleichung. Beginnt die halb trockene oder trockene Reibung, dann steigt das Reibungsmoment und A bekommt einen größeren Wert.

Die Erwartung ist also, daß für A eine Konstante gefunden werden kann, welche unter einem bestimmten Werte von ω nicht mehr gilt. Diese Rotationsgeschwindigkeit nennen wir die kritische, wofür wir das Zeichen ω_k einführen.

Das Instrumentarium.

Es war beabsichtigt, obenstehende Ansichten experimentell zu prüfen. Hierzu wurde die sogenannte kleine Druckwage von dem v. d. Waalsfonds verwendet, die aufgestellt ist in dem naturwissenschaftlichen Laboratorium zu Amsterdam.[1]) Diese Druckwage von der Type Schäffer & Budenberg besitzt einen Kolben, dessen großer und kleiner Durchschnitt um einen cm^2 verschieden sind, während die maximale Belastung 250 kg beträgt. Um für unsere Untersuchungen ge-

1) Ph. Kohnstamm-Walstra, Versl. Ac. Am. 1914.

eignet zu sein, mußten einige Abänderungen angebracht werden.

Vorerst war es notwendig, für eine genügende Rotationsgeschwindigkeit zu sorgen. Die Drehung wurde bisher durch Antrieb mit der Hand gegeben. Damit waren zwei Unannehmlichkeiten verbunden. Zuerst war es nicht sicher, daß eine genügend große Schnelligkeit erreicht wurde, und andererseits war die Anfangsschnelligkeit nicht bei jeder Ablesung gleich zu wählen. Letzteres ist nun wohl nicht direkt notwendig, aber doch sehr zu wünschen.

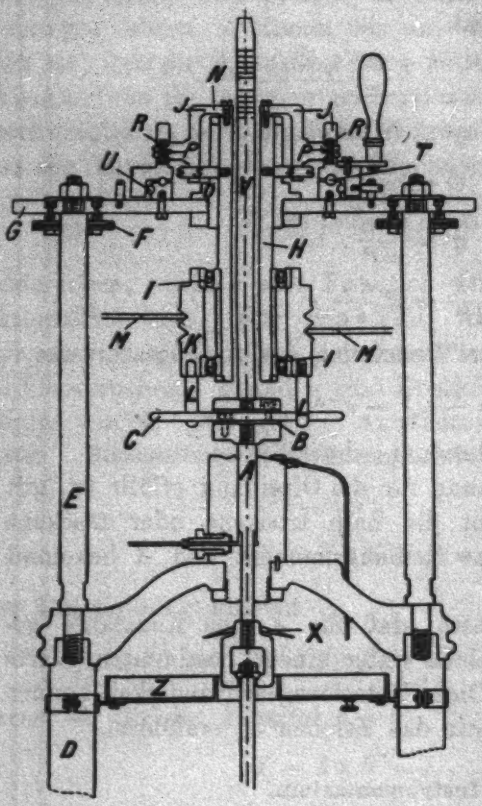


Fig. 10.

Ein anderer Nachteil des Handantriebes ist in der Tatsache gelegen, daß hierbei unbedingt ein seitlicher Druck ausgeübt wird. Im Augenblick des Loslassens ist es also nicht sicher, daß der Gleichgewichtszustand herrscht. Das hat zur Folge, daß wahrscheinlich zu Beginn der Reibung keine reine Flüssigkeitsreibung statthat.

Es mußte also ein mechanischer Antrieb konstruiert werden, der diese Fehler nicht hatte. Hierzu wurde eine in Fig. 10 wiedergegebene Aufstellung gewählt.

Auf dem Kopf von dem Kolben *A* wird eine Platte *B* befestigt, wodurch ein Stahlstift *C* getrieben wird. Platte *B* war verstellbar und wird so angebracht, daß die Achse von *C* die Achse von dem Kolben schneidet. Die Ständer *D* von der Druckwage werden mit Stahlstangen *E* verlängert, worauf

mit Stellschrauben *F* verstellbar eine dreiseitige Platte *G* befestigt wird. In der Mitte der Platte wird ein bronzenes Lager *H* gebaut, worauf auf zwei Kugellagern *I* der Teil *K* sich drehen kann. *K* trägt zwei Stifte *L*, welche gegen den Stift *C* stoßen können. Die Platte *G* wird so gestellt, daß beide Stifte *L* gleichzeitig gegen *C* ragen. *K* wird durch einen Drehstrommotor mit Zwischenschaltung einer Transmission. um die Tourenzahl regeln zu können, angetrieben. Um ein Wegdrücken von *K* durch einen einseitigen Druck zu verhindern, wird die Andrehung doppelseitig gemacht, hierzu die beiden Riemen (*M*). Ist die Tourenzahl erreicht, dann müssen die Stifte *L* entfernt werden können. Zu dem Zwecke wird es möglich gemacht, *H* und *K* so hoch zu heben, daß *C* frei unter *L* sich durchdrehen kann. Dazu wird *H* nicht an der Platte selbst festgemacht, sondern an den bronzenen Fortsatz *N* und wird auf seinem Platz durch die Führung *O* gehalten. An *N* sind zwei Spitzen *B* festgenietet, worauf zwei Kugellager *R* gebaut sind.

Diese ruhen auf zwei drehbaren, geneigten Flächen *S*. Durch Drehen von *S* schieben die Kugellager hiermit das gesamte Gestell *N*, *H* und *K* empor. Um zu verhindern, daß das Lager *H* sich dreht, sind in der Führung zwei Nuten angebracht, worin die Stifte *S* gleiten. Um ein leichteres Laufen zu erzielen, bewegt sich *S* auf Kugellagern, während das Kugellager *U* die zeitliche Bewegung verhindert. Außerdem ist ein Fangschirm angebracht, um das Öl, welches zwischen Zylinder und Achse austropft, aufzufangen und in den Behälter *Z* zu leiten; sonst würde dieses Öl auf die Gewichte fallen und die Belastung vermehren.

Um die Höhe von dem Kolben bestimmen zu können, wird dieser mit einer Stange *V* verlängert, welche über die gesamte Apparatur hinausreicht und auf welcher am Ende eine Skaleneinteilung angebracht ist.

Die Tourenzahl, wobei die meisten Wahrnehmungen gemacht wurden, da sie immer noch hoch genug war, war ungefähr 60 in der Minute. Ganz konstant war diese nicht, da bei höherer Belastung eine große Verschleppung in der Transmission auftrat. Wie aus der späteren Abhandlung folgen soll, war dies aber nicht hinderlich.

Ein anderer Unterteil, der Verbesserungen notwendig hatte, war die Unterseite der Druckwage. Die Belastung von dem Kolben wird, wie bekannt, durch Aufhängen von Gewichten an der verlängerten Kolbenstange erhalten. An dem äußersten Ende trägt diese verlängerte Stange eine Platte. Darauf wurden die Gewichte aufgelegt (Fig. 11). Um konische Schwingungen zu verhindern, ist nun unter dieser Platte wieder eine kleine Achse angebracht (*A*). Diese Achse läuft in einem bronzenen Lager *B*. Da dieses Lager nicht geschmiert war,

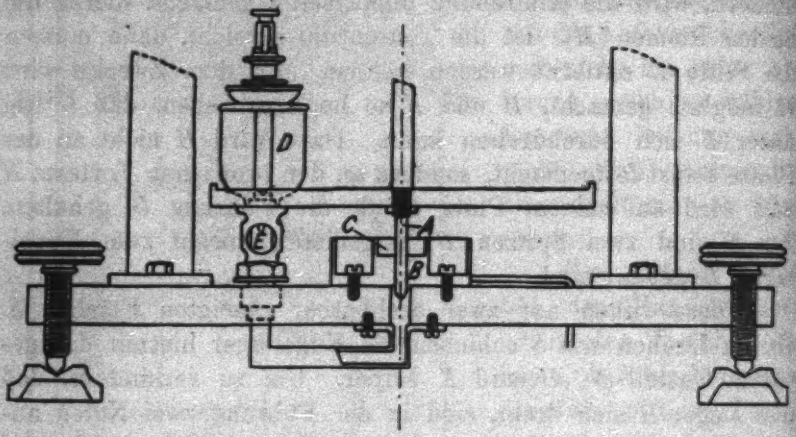


Fig. 11.

hat man hier eine reine Metallreibung. Für unsere Untersuchungen war dieses sehr hinderlich, da zwei verschiedene Arten von Reibung verzögernd auf die Rotation wirkten. Um nun auch diese Reibung von derselben Art zu machen, wie bei dem Kolben, wurde unter dem Fußstück ein Ölreservoir *C* angebracht, das aus dem Ölfaß *D* gefüllt wurde. Das Niveau wurde in *E* stets so hoch gehalten, daß es höher stand als der obere Rand des Bronzelagers. Hierdurch erreichten wir, daß stets der gesamte Raum zwischen Lager und Achse mit Öl gefüllt war. Für unsere Untersuchungen ergab es sich, daß diese Schmierung wirklich eine Verbesserung für das Funktionieren der Druckwage war, denn bei der Demontierung vor der Anbringung obenstehender Verbesserungen war die Metall- auf Metallreibung nicht ohne Einfluß auf den Zustand von Lager und Achse. Die Schmierung hatte dann auch eine

merkbar größere Empfindlichkeit der Druckwage zur Folge. Eine dritte Verbesserung war von ganz anderer Art. Als obenstehende Änderungen schon angebracht waren und man also annehmen konnte, daß die Anfangsgeschwindigkeit mit großer Annäherung stets gleichgesetzt werden konnte, war zu ersehen, daß die Zeit, welche zwischen dem Ausschalten der Andrehung und dem Augenblick, daß der Kolben stillstand, bei der gleichen Belastung nahezu konstant war. Unerwartet traten aber Abweichungen von etwa 50% und mehr auf, um ebenso unerwartet zu verschwinden. Nach langem, vergeblichen Suchen kamen wir auf den Gedanken, ein Stetoskop zu Hilfe zu nehmen. Die Schallplatte von einem gewöhnlichen medizinischen Stetoskop wurde durch ein Plättchen aus Glimmer ersetzt, in welches mitten ein Kupferstift befestigt wurde. Hiermit wurde die Druckwage abgesucht und nun fand man, daß in jenen Fällen, da die Reibung so merkbar größer war, ein surrendes Geräusch in der Druckwage in der Höhe von dem Kolben zu hören war. Nach Auseinandernahme des Apparates fand man jedesmal zwischen Kolben und Zylinder ein fast mikroskopisch kleines Lederfleckchen. Diese Lederteilchen stammten von den Lederpackungen an der Cailletepumpe, womit der Druck erhalten wurde. Um diesem Übel abzuhelfen, wurden alle Lederpackungen durch Fiberpackungen ersetzt. Bei dem Kolben von der Pumpe selbst war dies aber nicht möglich; deshalb wurde in der Zuführung von der Pumpe zur Druckwage ein Filter von sehr feinem Kupferdraht eingeschaltet, das in mehreren Lagen gelegt wurde. Hinter diesem Filter wurden nur mehr Rotkupferpackungen oder Stahl auf Stahlverschluß verwendet.

Die Methode der Ablesung.

Um die Theorie prüfen zu können, mußte untersucht werden, in welcher Art der zurückgelegte Winkel von der Zeit abhängig ist. Hierzu wurde auf der Achse ein Zeichen angebracht, die Rotation eingesetzt und nach Erhalt einer stationären Geschwindigkeit die Andrehung ausgeschaltet. Mit Hilfe von zwei Stoppuhren wurde der Zusammenhang zwischen zurückgelegter Tourenzahl und gebrauchter Zeit untersucht. Im Augenblick der Ausschaltung der Andrehung

wird die erste in Gang versetzt. Nach einer bestimmten Tourenzahl, z. B. 7, wird das Uhrwerk gestoppt und gleichzeitig das zweite in Gang gebracht. So kann man den Zusammenhang zwischen Tourenzahl und Zeit leicht finden. Die totale Tourenzahl jedoch, die in einem bestimmten Augenblick zurückgelegt ist und die wir ν nennen wollen, bekommt man durch eine einfache Addition der Zahlen.

Nehmen wir an, daß es stets möglich ist, auf $^1/_5$ Sekunde genau abzulesen, dann ist der bei jedem Werte im Maximum zu erwartende Fehler für $t = ^2/_5$ Sek. ($^1/_5$ für den Beginn und $^1/_5$ für das Ende der Wahrnehmung). Bei der Addition der Zahlen werden die Fehler nicht summiert, da es mit sehr großer Genauigkeit erreichbar ist, daß die eine Stoppuhr im gleichen Moment gestoppt, als die andere in Gang versetzt wird. Von Einfluß auf den Fehler ist dann allein die Ungenauigkeit der Ablesung bei Beginn der ersten und beim Ende der letzten Wahrnehmung.

Die erste Beobachtungsserie lieferte folgende Zahlen:

Tourenzahl	Zeit	ν	t
7	7,4	7	7
7	7,4	14	14,4
7	8	21	22,4
7	8,4	28	30,8
7	9	35	39,8
6	8,4	41	48,2
6	9	47	57,2
6	9,6	53	66,8
5	8,4	58	75,2
5	9,2	63	84,4
5	10,2	68	94,6
4	8,6	72	103,2
4	9,8	76	113,0
4	10,8	80	123,8
3	9,4	83	133,2
3	10,4	86	143,6
2	8,6	88	152,2
1,6	11,8	89,6	164

Die Prüfung der Formel

$$a = \frac{\Omega}{A}(1 - e^{-At})$$

führt nun zu eigenartigen Schwierigkeiten, denn die Funktion eignet sich schlecht dazu, aus den wahrgenommenen Werten

von a, A zu berechnen und auf ihre Konstanz zu untersuchen. Darum wählen wir einen andern Weg.

Nehmen wir an, daß n die totale Tourenzahl ist, die der Kolben zurücklegt, wenn bis zum letzten Augenblick die Flüssigkeitsreibung bestehen bleiben würde. Stillstand wird dann erreicht für $t = \infty$

$$2\pi n = \frac{\Omega}{A}.$$

Ist ν die Tourenzahl nach der Zeit t, dann ist

$$2\pi\nu = \frac{\Omega}{A}(1 - e^{-At}),$$

$$= 2\pi n(1 - e^{-At}),$$

$$\nu = n(1 - e^{-At}),$$

$$1 - \frac{\nu}{n} = e^{-At},$$

$$A = \frac{\lg\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)}{\lg e} = \frac{\lg\frac{n-\nu}{n}}{+\lg e}.$$

Einige Mühe machte es nun, n zu bestimmen, da dieses für die wahrgenommenen Werte nicht jedesmal gleich ist. n wird dann auch durch Probieren und Interpolieren gefunden. Man faßt die Frage so auf: Ist für n ein Wert zu finden, welcher in die Formel substituiert, ein konstantes A liefert? Nehmen wir als Beispiel für die Berechnung obenstehende Beobachtungsserie:

für $\nu = 35$ ist $t = 39{,}8$

$\quad 72 \quad\quad 103{,}2$

Setzen wir nun $n = 120$, dann bekommen wir für A

für n: 120	A: 0,008664	bzw. 0,008878
115	0,009118	0,009584
125	0,008254	0,008314
127	0,008101	0,008109

Wir nehmen deshalb als den besten Wert für n 127,2

ν	$A \cdot 10^4$	ν	$A \cdot 10^4$
7	80,8	63	81,0
14	81,0	68	81,0
21	80,5	72	80,9
28	80,7	76	80,5
35	80,9	80	80,1
41	80,7	83	79,4
47	80,6	86	78,5
53	80,7	88	77,3
58	80,9	89,6	74,3

Um sich über diese Resultate ein richtiges Urteil bilden zu können, muß man auch den erreichbaren Grad der Genauigkeit von $^2/_5$ Sekunden mit in Rechnung ziehen. Man kann dann als Mittelwert für A setzen $80{,}9 \cdot 10^4$ und bekommt dann folgende Tabelle:

ν	t	$A \cdot 10^4$	Maximale Genauigkeit	Abweichung
7	7	80,8	4,4	0,1
14	14,4	81,0	2,8	0,1
21	22,4	80,5	1,5	0,4
28	30,8	80,7	1,1	0,2
35	39,8	80,9	0,8	0
41	48,2	80,7	0,7	0,2
47	57,2	80,6	0,6	0,3
53	66,8	80,7	0,5	0,2
58	75,2	80,9	0,5	0
63	84,4	81,0	0,4	0,1
68	94,6	81,0	0,4	0,1
72	103,2	80,9	0,3	0
76	113,0	80,5	0,3	0,4
80	123,8	80,1	0,3	0,8
83	133,2	79,4	0,3	1,5
86	143,6	78,5	0,3	2,4
88	152,2	77,3	0,3	3,6
89,6	164,0	74,3	0,2	6,6

Innerhalb der erreichbaren Genauigkeit ist also das Resultat in voller Übereinstimmung mit der Berechnung. Zur Kontrolle können wir Ω berechnen aus

$$\Omega = 2\pi A,$$

die Anfangstourenzahl in der Minute ist dann

$$n \cdot 60 \cdot A = 12{,}7 \cdot 2 \cdot 60 \cdot 80{,}9 \cdot 10^{-4} = 61.$$

Während Beobachtung $60 \cdot 2$ ergab. Die Übereinstimmung ist also gut.

Der Augenblick, in dem die Flüssigkeitsreibung endigt, liegt hier somit, wie aus der Tabelle zu sehen ist, zwischen 72 und 76 Umdrehungen. Berechnen wir die Rotationsgeschwindigkeit für diese zwei Augenblicke, dann wissen wir, daß die kritische Rotationsgeschwindigkeit zwischen den beiden gefundenen Werten liegt. Die Berechnung ist ganz analog der oben stehenden für n, nur haben wir an Stelle von n die Anzahl von Umdrehungen einzusetzen, die, in der Voraussetzung, daß die Flüssigkeitsreibung noch bestehen bleibt, noch zurückgelegt würde. Nach 72 Umdrehungen finden wir hierfür:

$(127{,}2 - 72) \cdot 60 \cdot 80{,}9 \cdot 10^{-4} = 29$ Touren pro Minute,

nach 76 Umdrehungen:

$(127{,}2 - 76) \cdot 60 \cdot 80{,}9 \cdot 10^{-4} = 27{,}4$ Touren pro Minute.

Die kritische Rotationsgeschwindigkeit liegt also zwischen 27,8 und 29 Umdrehungen in der Minute.

Eine andere Beobachtungsreihe lieferte folgende Werte:

Serie 2. $n = 100$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	Zulässiger Fehler	Wahrgenommene Abweichung
7	7,2	100,8	7	2,2
15	16,2	100,3	3	2,7
23	25,9	101,3	2	1,7
31	36,2	102,5	1,5	0,5
37	44,8	103,1	1,1	0,1
43	54,6	103,0	0,9	0
49	65,0	103,5	0,8	0,5
54	75,4	103,0	0,7	0
59	86,8	102,7	0,6	0,3
63	97,4	102,1	0,5	0,9
67	110,2	100,6	0,5	0,4
70	122,6	98,2	0,4	4,8
71,3	132,4	94,2	0,4	8,8

Mittelwert für $A \cdot 10^{-4} = 103$. Anfangstourenzahl 61, beobachtet 60.

Serie 3. $n = 131{,}2$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	Maximale Genauigkeit	Abweichung
7	7,0	78,7	4,6	2,6
16	16,2	80,3	2,0	1,0
25	26,0	80,7	1,2	0,6
33	35,6	81,4	0,9	0,1
41	46,0	81,5	0,7	0,2
48	56,0	81,3	0,6	0,0
54	65,2	81,3	0,5	0
60	75,2	81,3	0,5	0
66	86,0	81,3	0,4	0
71	95,8	81,3	0,4	0
75	104,6	81,0	0,3	0,3
80	117,2	80,3	0,3	1,0
83	128,2	78,1	0,3	3,2
84,1	139,2	73,6	0,3	7,7

Mittelwert für $A \cdot 10^4 = 81{,}3$. Anfangstourenzahl 64, beobachtet 60,5.

Bei genauer Betrachtung obenstehender Resultate fallen besonders zwei Umstände auf.

Vorerst folgt aus den substituierten Werten, daß wir, als wir in der ersten Beobachtungsserie 115, 125 und 127 für n annahmen, die Änderungen für A ziemlich groß waren, während der Unterschied der A-Werte untereinander sich wenig veränderte. Ist dann auch oben stehende Methode sehr brauchbar, um die Möglichkeit von einem konstanten A zu beweisen. Die genaue Bestimmung der wirklichen Werte von A ist nicht so gut. Dies ersieht man auch aufs Neue bei der Bestimmung der Anfangstourenzahl. Wir haben einen Unterschied von 3,5 bei 60 bekommen.

Zweitens mutet es etwas fremd an, daß nach Beendigung der Flüssigkeitsreibung A zu fallen scheint. Man sollte daraus schließen, daß sich die Reibung vermindere. Der Grund liegt in der Tatsache, daß, sobald A seinen konstanten Wert verliert, sich auch n verändern muß. Hiermit wurde nicht gerechnet, so daß dann die Werte von den Zählern zu klein genommen wurden. Um dem Verlauf genau nachzugehen, muß man A allein aus den letzten Gliedern der Beobachtungsserie ausrechnen. Für die erste Beobachtungsserie haben wir das getan. Die Resultate waren folgende:

Beginnen wir beim vierten Glied.

$n = 127{,}2 - 28 = 99{,}2.$

ν	t	$A \cdot 10^4$
7	9	81,3
13	17,4	80,7
19	26,4	80,5
25	36,0	80,7
30	44,4	81,1
35	53,6	81,1
40	63,8	80,9
44	72,4	80,9
48	82,2	80,5
52	93,0	79,9
55	102,4	78,9
58	112,8	77,9
60	121,4	76,5
61,6	133,2	72,8

Hieraus bekommt man also noch die gleichen Ergebnisse in Hinsicht auf den Wert von n, und auf dem Augenblick, da die Flüssigkeitsreibung endigt.

Beginnen wir mit dem siebenten Glied, dann können wir für n setzen

$$127{,}2 - 41 = 86{,}2, \quad \text{für } A \cdot 10^4.$$

80,2	81,3	80,4	77,4
80,6	80,9	79,7	75,8
81,4	81,0	78,6	71,6

Also wiederum die gleichen Werte für A und dieselbe Grenze für die Ölreibung.

Nehmen wir aber die fünf letzten Glieder allein, dann bekommen wir, wenn wir für $n = 28$ setzen, folgende Werte:

v	t	$A \cdot 10^4$
4	10,8	143
7	20,2	142
10	30,6	144
12	39,5	143
13,6	51,0	130

Die Werte von A und hiermit die Reibung haben also zugenommen. Bei den Versuchen fielen gleichzeitig einige Dinge auf. Während der Drehung senkte sich der Kolben. Wollte man nun durch Einpressen von Öl den Kolben wieder auf die Höhe bringen, dann wurde dadurch das Gleichgewicht gestört. Besonders bei einer geringen Tourenzahl war der Einfluß groß.

Zweitens war zufolge der einigermaßen konischen Form des Kolbens die Reibung abhängig von der Höhe. Bei geringer Belastung war dies von minimalem Einfluß, weil dann die Senkungsgeschwindigkeit sehr klein ist. Man mußte nur dafür sorgen, daß stets bei der gleichen Höhe gearbeitet werde, da andernfalls die Resultate nicht zu vergleichen waren. Bei größerer Belastung senkt sich aber der Kolben weit rascher, so daß während des Versuches Öl eingepreßt werden mußte, was aber wieder zu dem erst genannten Fehler Veranlassung gab. Glücklicherweise nahm bei steigender Belastung der störende Einfluß, der durch das Einpressen des Öles bedingt war, ab, so daß bei vorsichtigem Arbeiten die Störung nicht hinderlich wurde.

Wir konnten also dazu übergehen, die Größe A für verschiedene Drucke zu berechnen. Da die Temperatur einen großen Einfluß auf die Viskosität des Öles hat, wurden für

jede Belastung zwei Versuche bei verschiedenen Temperaturen gemacht, und zwar bei 12,5 und bei 16,5°. Bei jedem der Punkte wurde eine Beobachtungsserie mit den gefundenen Werten von A aufgenommen. Im ganzen wurden 59 Serien beobachtet, welche aber aus Raumersparnis nicht alle mitgeteilt werden können.

Bei der Berechnung ergaben sich als Mittelwerte für $A \cdot 10^4$:

Belastung	$T = 12{,}5$	$T = 16{,}5$
226,488	38,5	29,5
201,488	41	36
176,488	57	42
151,488	77	51
126,488	83	57
101,488	96	72,5
76,488	122	104
51,488	163	145

Da die Beobachtungen ergaben, daß die Genauigkeit nicht größer als $^1/_2$ einzuschätzen ist, sind die Werte von A auf $^1/_2$ abgerundet worden.

Für Belastungen unter 50 kg ist es nicht zulässig, aus den gefundenen Werten mit genügender Genauigkeit eine Berechnung aufzustellen. In der Tabelle ist zugleich auch die kritische Tourenzahl aufgenommen. Als zusammenfassende Resultate bekommen wir folgende Werte:

Belastung	Kritische Tourenzahl $T = 12{,}5$	Kritische Tourenzahl $T = 16{,}5$
226,488	24	36
201,488	28	27
176,488	32	32
151,488	27	35
126,488	28	34
101,488	28	32
76,488	29	27
51,488	32	30

Aus den schon früher besprochenen Gründen waren diese Zahlen nicht als konstant zu erwarten. Wohl nimmt der Mittelwert mit steigender Temperatur wegen der Abnahme der Viskosität des Öles zu. Das Ergebnis entspricht also vollkommen den Erwartungen. Wollen wir stets die Sicherheit

haben, daß die Druckwage gut funktioniert, dann müssen wir in unserem Fall stets dafür sorgen, daß die Tourenzahl oberhalb w_k liegt. Die kritische Rotationsgeschwindigkeit finden wir als jene Tourenzahl pro Minute. w_k ist also hier

für 12,5 rund 3,1,
„ 16,5 „ 3,5.

Es mag etwas sonderbar erscheinen, daß die Zahlen für die Belastung nicht einfacher gewählt sind. Die Ursache liegt an den Verbesserungen, die an der Druckwage angebracht wurden, um eine zweckmäßigere Andrehung zu bekommen. Früher wog der Kolben *A* mit Kopf und Belastungsstange zusammen 5 kg. Nach der neuen Methode wurde das Gesamtgewicht 6,488 kg. Zur Belastung wurden ferner Gewichte von 20 und 25 kg genommen.

Berechnung des Reibungsmomentes.

Aus der Größe *A* läßt sich leicht das Reibungsmoment berechnen, denn:

$$-\varphi = \frac{M}{T} = A\omega,$$
$$M = T \cdot A \cdot \omega.$$

Nennen wir $T \cdot A$ das spezifische Reibungsmoment r. Für die Berechnung von r müssen wir die Trägheitsmomente kennen. Diese werden wie folgt bestimmt:

Kolben *A* mit Kopf und Belastungsstange wird aus der Druckwage genommen, die Stange *V* durch einen Bolzen ersetzt, an diese Stange ein Stahldraht gelötet und daran das Ganze aufgehangen. Hierauf wird von dem Ganzen die Schwingungszeit bestimmt. Um aus dieser Zeit die Trägheitsmomente zu berechnen, wird auch eine Belastung angebracht mit zwei rechtwinkligen und gleich langen Eisenstäben, wovon nach bekanntem Verfahren das Trägheitsmoment einfach durch Berechnung zu finden war. Ein Vergleich hiermit gab als Trägheitsmoment vom

unbelasteten Kolben mit Zubehör	I_0	268,6 g/cm,
belastet mit 20 kg	I_{20}	1589,3
„ „ 25 „	I_{25}	1904,8

während durch Berechnung für die Stange *V* 0,4 gefunden wurde.

Zu bemerken ist, daß eine größere Genauigkeit als vier Dezimalstellen zwecklos war.

Belastung	Trägheitsmoment
6,488	269
26,488	1 858
51,488	3 763
76,488	5 667
106,488	7 572
126,488	9 477
151,488	11 380
176,488	13 290
201,488	15 190
226,488	17 100

Als Einheit wurde das kleine statische System angenommen.

Aus diesen Werten und aus den für A gefundenen bekommen wir für r

$$r = A \times T.$$

Belastung	Trägheitsmoment r für $T = 12{,}5$	r für $T = 16{,}5$
226,488	658	504
201,488	623	547
176,488	757	558
151,488	876	580
126,488	786	540
101,488	727	549
76,488	691	589
51,488	614	546

Aus Obenstehendem ersieht man, daß bei zunehmendem T die Reibung abnimmt, was auch auf eine Ölreibung hinweist; denn bei steigender Temperatur fällt die Viskosität. Der Grad der Genauigkeit, womit A bestimmt werden kann, darf nicht allzu hoch eingeschätzt werden. Schon oben wurde auf eine Ursache hingewiesen. Ein anderer Grund ist darin zu suchen, daß die Temperaturschwankungen des Versuchsraumes nur sehr langsam von A angenommen werden. So wurde an einem kalten Tag, nachdem schon 5—6 Stunden die Zimmer auf konstante Temperatur gebracht worden waren, die Werte von A noch zu groß, in einer kalten Nacht nach einem warmen Tag, die Zahlen für A zu klein gefunden. Da es unmöglich ist, die Temperatur des Öles im Lager zu messen, war man

nicht sicher, ob schon mit dem Versuch begonnen werden konnte.

Eine Folge der Ungenauigkeit, die den Größen A und damit auch r anhaftet, ist, daß unsere Zahlen keinen Schluß gestatten über den Einfluß des Druckes auf r. Dieser Einfluß ist mit Sicherheit zu erwarten, da sowohl die Größe des Spaltes zwischen Achse und Lagerwand als die Viskosität Druckfunktionen sind. Die Änderungen von r, die durch p bedingt sind, fallen aber bei unseren Resultaten innerhalb der Genauigkeitsgrenzen bei den Ablesungen.

Als Mittelwert können wir A setzen

für T	r
12,5	700
16,5	550

Zur Ergänzung über das oben Ungemerkte, den Temperatureinfluß betreffend, diene noch folgendes:

Infolge der Reibung wird in der Ölschicht eine Temperaturerhöhung auftreten.

Erst nach einiger Zeit wird ein Gleichgewicht entstehen, das ist dann, wenn die gelieferte Wärme genau ebenso groß ist als die durch Achse und Wand weggeleitete. Eine Folge davon ist, daß die angegebenen Temperaturen nicht die wirklich in der Flüssigkeitsschicht herrschenden sind, während für das Experiment folgt, daß es nicht gestattet ist, gleich nach Ansetzung des Versuches die Ablesung zu machen. Man muß solange warten, bis man mit Sicherheit annehmen kann, daß ein Temperaturgleichgewicht sich eingestellt hat.

Welche Folgen hat nun Obenstehendes, für die Empfindlichkeit unserer Druckwage?

Hat die Umdrehungsgeschwindigkeit einmal für die Bildung einer Ölschicht zwischen Achse und Wand gesorgt, dann muß natürlich auch für den Fall einer axialen Verschiebung eine reine Flüssigkeitsreibung auftreten. Hierfür ist keine minimale Verschiebung notwendig. Die reine Flüssigkeitsreibung ist proportional der Geschwindigkeit und da die axiale Verschiebung so gering ist, im Verhältnis mit der Umdrehungsgeschwindigkeit (bei der maximalen Belastung ist die Schnelligkeit nur etwa 1 cm per 56 sec. für D 12,5) wird axial die Reibung sehr gering sein.

Hier wird die Sache aber wieder auf eine andere Weise kompliziert und zwar deswegen, weil es unmöglich ist, auf einfache Weise die eine Reibung von der andern abzuleiten. Unter dem Eindruck des starken Druckabfalls in der Spalte entsteht eine Flüssigkeitsströmung parallel der Achse. Deshalb sind auch die Berechnungen von Sommerfeld nicht anwendbar, da diese ausdrücklich axiale Strömungen ausschließen. Wir hoffen später noch darauf zurückzukommen.

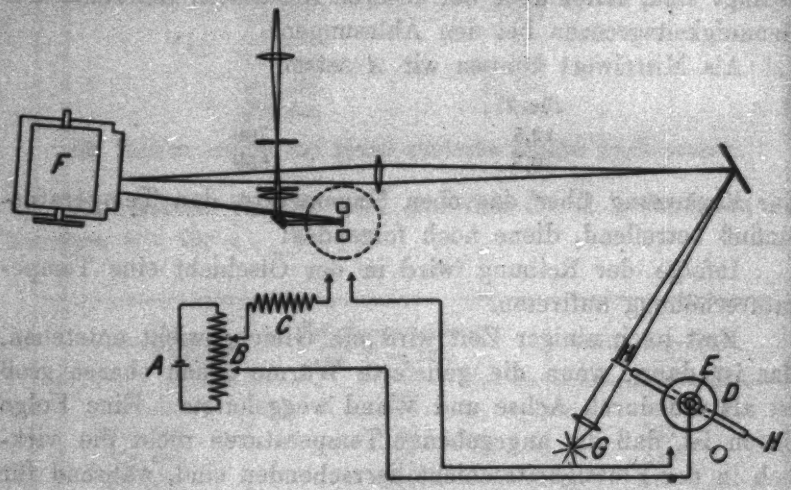


Fig. 12.

Noch auf eine andere Methode wurde versucht, einen Einblick in die Wirkung der Reibung zu erhalten. Einmal ausgehend von der Tatsache, daß oberhalb der kritischen Tourenzahl nur reine Flüssigkeitsreibung auftreten kann, mußte angenommen werden, daß dann auch ein, wenn auch sehr geringer Isolationswiderstand zwischen Kolben und Gestell bestehen muß. Dieser Widerstand darf nicht als gar zu hoch erwartet werden, da in unserem Falle die Ölschicht äußerst dünn und ihre Oberfläche sehr groß ist. Der Widerstand wird nun gemessen mit einer Apparatur, der schematisch in Fig. 12 angegeben ist. Die Figur gibt die von oben gesehene Aufstellung wieder, *A* ist ein Normalelement. Mit dem Nebenschluß *B* wird eine Spannung von 1/8000 erreicht. Der Strom lief durch den Widerstand *C* zu dem Galvanometer, von hier zu

der Masse der Druckwage *D* und durch die Ölschicht zu dem in Drehung versetztem Teil *E*. Auf diesem war ein Quecksilberbad in einer eisernen Schale angebracht, worin ein Platinkontakt stak. Von hier kehrte der Strom nach *B* zurück. Die Ausschläge des Galvanometers wurden photographisch registriert, auf der Registriertrommel *F*. Um den Zusammenhang zwischen Tourenzahl und Widerstand finden zu können, wurde noch eine Lichtquelle *G* aufgestellt, von der die Strahlen auch auf das photographische Papier gebracht werden konnten. Die Strahlen werden aber bei jeder Umdrehung zweimal durch die beiden Blättchen *H*, die auf dem Kolben angebracht sind, unterbrochen. Die Druckwage wird nun in Drehung versetzt. War die Umdrehungszahl erreicht, dann wird die Andrehung ausgeschaltet und die Druckwage läuft langsam aus. Eben vor dem Ausschalten wird das Licht von *C* ein paar Sekunden aufgefangen und damit auch dieser Augenblick registriert. Nach dem Ablaufen wird in *C* ein Widerstand von bekannter Größe eingeschaltet. Dies wird ein paarmal wiederholt. Hiermit kann also in der Figur der Widerstand von der Ölschicht verglichen werden.

Die Figg. 13—18 geben einige Aufnahmen bei verschiedener Belastung wieder.

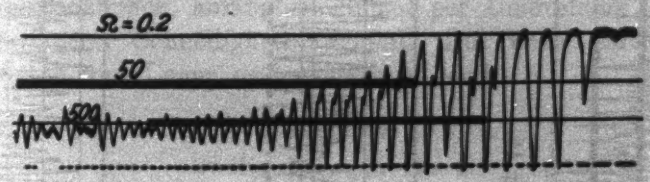


Fig. 13.

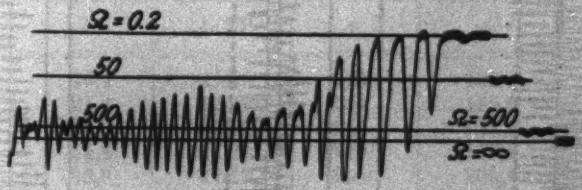


Fig. 14.

Fig. 13 für 25 kg Belastung,
„ 14 „ 25 „ „
„ 15 „ 35 „ „
Fig. 16 für 45 kg Belastung,
„ 17 „ 75 „ „
„ 18 „ 75 „ „

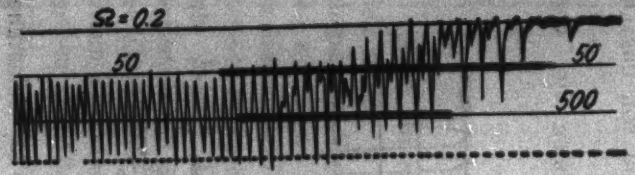


Fig. 15.

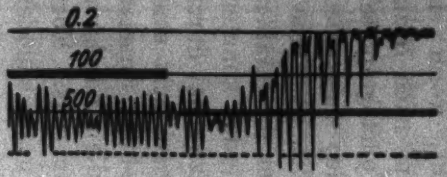


Fig. 16.

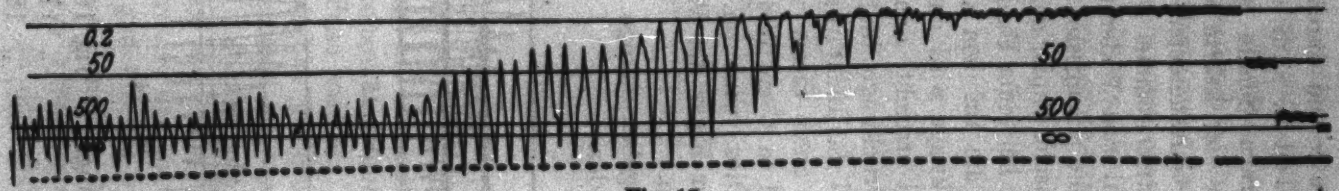


Fig. 17.

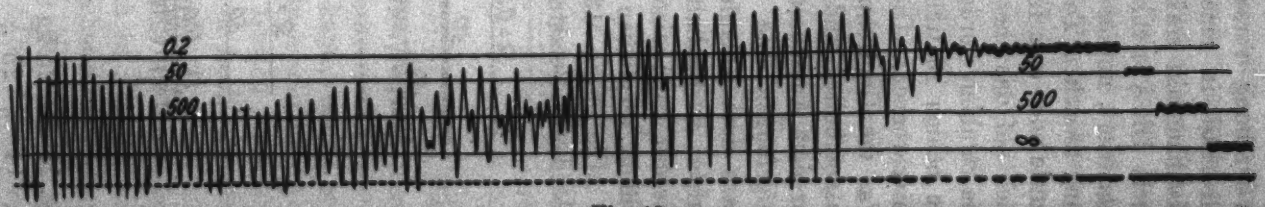


Fig. 18.

Höhere Belastungen wurden hierin nicht aufgenommen, da das Diagramm doch dasselbe Bild ergibt, aber für die Wiedergabe zu lang wird. In allen Figuren sind die Linien von bekanntem Widerstand ausgezogen, um einen leichteren Vergleich zu gestatten. Bei Stillstand war stets der Widerstand 0,2 Ohm, eingerechnet der Widerstand der Zufuhrdrähte. In allen Figuren ersieht man, daß der Widerstand anfänglich gleich groß bleibt und um einen Betrag oberhalb 500 Ohm schwankt. Bei Veränderung der Tourenzahl werden auf einmal plötzlich, wie es die Theorie verlangt, die Schwankungen viel größer, um allmählich auf direkten Metallkontakt hinzuweisen. Schon bevor der totale Stillstand erreicht ist, bleibt der Metallkontakt konstant bestehen. Die unterbrochene gerade Linie ist die Wiedergabe der Tourenzahl durch die jedesmal unterbrochenen Strahlen der Lichtquelle *C*.

Bei der Aufnahme der Fig. 18 war ein Vorschaltwiderstand von 250 Ohm in Verwendung und ein großes Potential eingesetzt, um $\Omega = 500$ und $\Omega = \infty$ weiter auseinander zu bekommen. Die Dämpfung von dem Galvanometer war hierbei gering. Dadurch werden die Schwankungen größer und gehen selbst über die 0-Gerade hinaus.

Bemerkenswert bei der Aufnahme ist die Regelmäßigkeit der Schwankungen, anfänglich einmal per Umdrehung, später bei geringerer Schnelligkeit zweimal. Das weist darauf hin, daß Achse und Lager oval ausgenutzt sind.

Tabellen.

Beobachtungsreihe 1.

Belastung 226,488. Temperatur 16,8. $n = 350$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
10	10,4	27,85	110	138,4	27,26
20	21,4	27,49	120	155,0	27,09
30	33,0	27,15	130	172,0	26,99
40	44,6	27,20	140	189,6	26,94
50	56,8	27,13	150	209,4	26,14
60	69,2	27,18	160	230,8	25,69
70	81,8	27,28	170	253,6	25,65
80	95,0	27,32	180	279,6	25,26
90	108,4	27,42	188,2	297,6	24,85
100	122,6	27,45			

$A \cdot 10^4 = 27{,}3$. Kritische Tourenzahl 36.

Beobachtungsreihe 2.

Belastung 201,488. Temperatur 16,4. $n = 300$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
10	10,4	32,61	110	189,2	32,81
20	21,4	32,22	120	155,6	32,88
30	32,8	32,12	130	172,4	32,95
40	44,4	32,22	140	191,0	32,91
50	56,2	32,44	150	210,6	32,91
60	68,6	32,53	155	221,0	32,90
70	81,4	32,64	160	232,4	32,80
80	95,0	32,64	165	245,2	32,65
90	109,0	32,72	169,4	264,8	31,4
100	123,8	32,75			

$A \cdot 10^4 = 32{,}8$. Kritische Tourenzahl 27.

Beobachtungsreihe 3.

Belastung 176,488. Temperatur 16,4. $n = 240$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
10	10,2	41,74	90	112,0	41,96
20	20,6	42,22	100	128,4	41,98
30	32,0	41,75	110	146,4	41,70
40	43,6	41,82	120	166,0	41,29
50	55,8	41,87	130	187,8	41,54
60	68,6	41,93	140	213,4	41,02
70	82,0	42,06	141	231,6	39,56
80	96,4	42,06			

$A \cdot 10^4 = 41{,}9$. Kritische Tourenzahl 32.

Beobachtungsreihe 4.

Belastung 151,488. Temperatur 16,4. $n = 197$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
10	10,2	51,10	80	102,4	50,88
20	21,2	50,51	90	121,0	50,84
30	32,8	50,40	100	141,8	49,94
40	44,6	50,89	105	153,6	49,57
50	56,6	51,72	110	166,6	49,05
60	70,0	51,89	115	186,6	47,48
70	85,4	51,41	115,1	191,2	45,91

$A \cdot 10^4 = 51{,}2$. Kritische Tourenzahl 35.

Beobachtungsreihe 5.

Belastung 126,488. Temperatur 16,7. $n = 177$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
10	10,4	53,71	70	89,2	56,43
20	21,2	55,16	80	107,6	55,89
30	33,0	56,28	90	127,6	55,66
40	45,4	56,42	100	151,0	55,12
50	58,4	56,84	109,8	189,0	51,24
60	72,2	56,47			

$A \cdot 10^4 = 56{,}5$. Kritische Tourenzahl 34.

Beobachtungsreihe 6.

Belastung 101,488. Temperatur 16,5. $n = 137$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
10	10,5	72,75	70	99,6	71,61
20	21,6	73,04	75	111,4	71,17
30	34,0	72,70	80	124,8	70,27
40	47,8	72,24	85	142,4	68,08
50	62,6	72,54	85,7	143,4	68,50
60	79,6	72,38			

$A \cdot 10^4 = 72{,}5$. Kritische Tourenzahl 32.

Beobachtungsreihe 7.

Belastung 76,488. Temperatur 16,0. $n = 95$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
8	8,2	107,3	48	65,2	107,9
16	17,2	107,3	54	78,2	107,5
24	27,0	107,8	59	90,8	106,9
32	38,2	107,5	63	102,8	105,8
40	50,6	108,0	66	117,8	100,7

$A \cdot 10^4 = 107{,}8$. Kritische Tourenzahl 27.

Beobachtungsreihe 8.

Belastung 51,488. Temperatur 16,0. $n = 70$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
7	7,4	142,4	34	45,8	145,2
14	15,6	143,0	39	56,6	143,9
21	24,4	146,1	43	67,2	142,2
28	35,2	145,1	45,2	80,2	129,4

$A \cdot 10^4 = 145$. Kritische Tourenzahl 30.

Beobachtungsreihe 9.

Belastung 226,488. Temperatur 13,5. $n = 270$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
10	10,2	37,04	100	127,4	36,81
20	21,0	36,64	110	144,0	36,83
30	32,4	36,35	120	161,8	36,83
40	44,2	36,27	130	180,6	36,87
50	56,4	36,31	140	201,4	36,89
60	69,4	36,21	150	223,6	36,27
70	82,8	36,24	160	248,0	36,20
80	97,2	36,16	170	277,8	35,75
90	111,8	36,27	173,8	297,6	34,68

$A \cdot 10^4 = 36,30$. Kritische Tourenzahl 24.

Beobachtungsreihe 10.

Belastung 201,488. Temperatur 13,2. $n = 260$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
10	10,2	38,44	110	143,4	38,50
20	20,8	38,47	120	161,2	38,54
30	32,0	38,30	130	180,8	38,34
40	43,6	38,31	140	202,2	38,24
50	55,8	38,28	150	225,8	38,09
60	68,4	38,36	155	238,8	37,97
70	81,4	38,34	160	252,8	37,79
80	96,0	38,30	165	269,2	37,40
90	111,0	38,28	165,2	272,2	37,06
100	126,6	38,35			

$A \cdot 10^4 = 38,35$. Kritische Tourenzahl 28.

Beobachtungsreihe 11.

Belastung 176,488. Temperatur 12,5. $n = 174$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
7	7,2	56,99	70	92,4	55,70
14	14,8	56,68	77	105,2	55,78
21	22,8	56,42	84	119,4	55,21
28	31,0	56,60	91	135,2	54,75
35	40,0	56,15	96	148,0	54,19
42	49,2	55,81	101	162,6	53,42
49	59,0	56,06	106	179,2	52,43
56	69,4	55,96	109,3	199,4	49,62
63	80,8	55,64			

$A \cdot 10^4 = 55,9$. Kritische Tourenzahl 32.

Beobachtungsreihe 12.

Belastung 151,488. Temperatur 12,5. $n = 132$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
10	10,2	77,27	67	91,2	77,68
20	21,4	76,80	74	106,8	77,00
30	33,0	78,13	80	122,0	75,74
40	46,4	77,81	85	137,0	74,83
50	61,0	78,05	89	152,0	73,21
59	76,2	77,73	90,3	169,8	67,86

$A \cdot 10^4 = 77{,}8$. Kritische Tourenzahl 27.

Beobachtungsreihe 13.

Belastung 126,488. Temperatur 12,5. $n = 115$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
8	8,6	83,88	62	89,2	86,72
19	21,0	85,99	67	101,2	86,33
28	32,4	86,11	70	109,2	85,92
37	44,6	87,6	73	117,8	85,51
44	55,2	87,86	76	127,6	84,75
51	67,0	87,47	79,3	143,8	79,20
56	76,6	87,13			

$A \cdot 10^4 = 87{,}2$. Kritische Tourenzahl 28.

Beobachtungsreihe 14.

Belastung 101,488. Temperatur 12,5. $n = 108$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
7	7,2	89,87	55	76,6	92,93
14	15,0	93,06	60	87,6	92,57
22	24,4	93,35	64	97,4	92,19
28	32,4	92,62	67	105,8	91,55
35	42,2	92,82	70	114,8	90,99
40	50,0	92,52	73	125,4	89,85
45	58,0	92,93	75,3	137,6	86,83
50	66,8	93,07			

$A \cdot 10^4 = 92{,}9$. Kritische Tourenzahl 28.

Beobachtungsreihe 15.

Belastung 76,488. Temperatur 12,5. $n = 82$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
6	6,2	122,4	42	59,2	121,3
13	14,2	121,5	46	68,4	120,4
20	23,0	121,6	50	78,8	119,7
26	31,4	121,4	53	87,3	118,4
32	40,6	121,8	56	99,0	116,0
37	49,6	121,0	55,7	109,2	111,4

$A \cdot 10^4 = 121{,}5$. Kritische Tourenzahl 29.

Beobachtungsreihe 16.

Belastung 51,488. Temperatur 12,5. $n = 60$.

ν	t	$A \cdot 10^4$	ν	t	$A \cdot 10^4$
6	6,4	164,4	31	45,6	159,4
13	15,2	160,7	35	57,0	153,6
20	25,0	162,2	36,1	62,2	148,0
25	38,4	161,4			

$A \cdot 10^4 = 162$. Kritische Tourenzahl 32.

Für Belastungen unter 50 g waren nicht hinreichend genaue Beobachtungen möglich, um aus diesen Schlüsse ziehen zu können.

(Eingegangen 14. April 1923.)

4. *Berichtigung zu der Abhandlung „Elektromagnetische Theorie der Beugung"; von Friedrich Kottler.*[1])

S. 458, Z. 16 v. o. nach „Beugung" schalte ein: „als".
„ 461, „ 11 v. u. statt „bedeckt" lies: „bedenkt".
„ 486, „ 4 v. u. „ e^{-ikr_P}/ν_P „ e^{-ikr_P}/r_P.
„ 487, „ 3 v. u. lies: „eines einzigen Lichtpunkts".
„ 493, Fußnote, lies: $R_L^2 + R_Q^2 + 2(\Re_L \Re_Q)$.
„ 496, Z. 1 v. u. lies: e^{+ikct}.
„ 497, „ 8 v. o. streiche $\cos\left(\nu t - k\varrho - \frac{\pi}{4}\right)$ in der Formel für Φ_ϱ.
„ 502, „ 5 v. u. „ cos in der Formel für Φ_ϱ.

1) F. Kottler, Ann. d. Phys. 71. S. 457. 1923.

(Eingegangen 1. Juli 1923.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

LEITZ

MIKROSKOPE

für alle wissenschaftlichen Untersuchungen
im gewöhnlichen u. polarisierten Licht
Binokular-Mikroskope - Lupen u. Lupenmikroskope
Mikroskopische Nebenapparate
insbesond. für Dunkelfeld- u. Ultramikroskopische Untersuchungen
Mikrophotographische- u. Projektions-Apparate
Prismen - Fernrohre

ERNST LEITZ OPTISCHE WERKE WETZLAR
Man verlange Sonderliste: Mikro 289

Inhalt.

Seite

1. D. Enskog. Zur Quantentheorie des Dampfdruckes und der Dissoziation 321

2. Carl Ramsauer. Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen. II. Fortsetzung und Schluß 345

3. Johannes Fischer. Über die Beugungserscheinungen bei sphärischer Aberration 353

4. Wilhelm Peter Rede. Über die Bremsung bewegter Ladungen beim Überfliegen leitender Körper 400

Die Redaktion der Annalen wird von den unbeitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 9/I.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls gewünschtenfalls mehr gewünscht werden, so muß die bei Rücksendung der ersten Korrekturbogen an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

1923. № 21.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 72.

1. *Zur Quantentheorie des Dampfdruckes und der Dissoziation;* *von D. Enskog.*

Einleitung.

Vor etwa zehn Jahren wurde durch die Arbeiten von Sackur[1]) und Tetrode[2]) erwiesen, daß der Dampfdruck fester Körper bei tiefer Temperatur und das Dissoziationsgleichgewicht in gasförmigen Systemen mit dem elementaren Planckschen Wirkungsquantum nahe verknüpft sind. In der folgenden Zeit wurden in verschiedener Weise quantentheoretische Behandlungen der betreffenden Zustände gegeben. Es scheint jedoch, als wären dabei einige Einzelheiten nicht völlig aufgeklärt worden, weshalb sie hier besprochen werden sollen.

Erstens ist es nicht deutlich zu sehen, wo und wie die Quantentheorie anzuwenden ist. Im allgemeinen geht man von der Boltzmannschen Beziehung zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit, bzw. der Maxwell-Gibbsschen zwischen Entropie und Phasenvolumen aus. Es wird das ideale Gas in verschiedener Weise gequantelt. Einerseits wird als wesentliches Merkmal der quantentheoretischen Behandlung die Hypothese angesehen, daß die Boltzmannsche Zelleneinteilung des Phasenraumes nicht einen bloßen mathematischen Kunstgriff darstellt, sondern daß die Zellen eine physikalische Realität besitzen und der Größe nach gleich einer Potenz von h sind.[3]) In einer entsprechenden Einheit ist das Gibbssche Phasenvolumen zu messen. Es ergibt sich in dieser Weise ein Absolutwert der

1) O. Sackur, Nernst-Festschrift S. 405. 1912; Ann. d. Phys. 40. S. 67. 1913.

2) H. Tetrode, Ann. d. Phys. 38. S. 434. 1912; Proc. Amsterd. 17. S. 1167. 1915.

3) Vgl. O. Sackur, Ann. d. Phys. 36. S. 958. 1911; H. Tetrode, a. a. O.; M. Planck, Wolfskehlvorlesung 1913 (Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen VI. 1914).

Entropie und somit der Nernstschen chemischen Konstante des Gases. — Von Scherrer und nach ihm Brody[1]) werden die zwischen den Wänden herumfliegenden Gasmoleküle als bedingt periodische Systeme gequantelt. Hiernach kann die Translationsenergie der Moleküle nur diskrete Werte annehmen. — Tetrode[2]) und nach ihm Keesom[3]) und Lenz[4]) zerlegen die Wärmebewegung des Gases in periodische Wellenzüge und wenden dann auf das Gas die Quantentheorie etwa in derselben Weise an, wie es Debye auf den festen Körper tut. Gegen diese letzteren Arbeiten sind von H. A. Lorentz[5]) Einwände erhoben worden, auch weichen die Resultate von denen der übrigen Theorien ab.

Von Stern[6]) ist eine andere Ableitung des Dampfdruckes gegeben, die sich prinzipiell von den übrigen darin unterscheidet, daß die Quantentheorie nur auf den festen Körper angewandt wird. Das zugrunde gelegte Modell des festen Körpers ist freilich ziemlich speziell, und man erhält auch keinen direkten Einblick in das Zustandekommen des Gleichgewichtes bei den tieferen Temperaturen, wo die Quanten von Bedeutung sind.

Im folgenden werden nur die periodischen oder bedingt periodischen Bewegungen der Atome unter der Einwirkung ihrer gegenseitigen Wechselwirkungen als Quantenbewegungen behandelt. Die Größe der Boltzmannschen Zellen wird willkürlich gewählt. Die Translationsgeschwindigkeit der frei herumfliegenden Moleküle wird in der klassischen Weise behandelt. Das elementare Wirkungsquantum tritt daher in den auf einem verdünnten einatomigen Gas bezüglichen Größen nicht auf. Bei etwas größeren Dichten wird zufolge der Kohäsionskräfte zwischen den Molekülen eine Assoziation auftreten, die quantentheoretisch berechnet werden kann. In

---

1) P. Scherrer, Gött. Nachr. 1916. S. 159; E. Brody, Zeitschr. f. Physik 6. S. 79. 1921.

2) H. Tetrode, Phys. Zeitschr. 14. S. 212. 1913.

3) W. H. Keesom, Phys. Zeitschr. 14. S. 665. 1913.

4) Vgl. A. Sommerfeld, Wolfskehlvorlesung 1918.

5) H. A. Lorentz, Proc. Amsterd. 19. S. 787. 1917.

6) O. Stern, Phys. Zeitschr. 14. S. 629. 1913; Zeitschr. f. Elektrochem. 25. S. 66. 1919.

dieser Weise wird das Wirkungsquantum auch in die Zustandsgleichung usw. der einatomigen Gase eingeführt.

Eine andere Schwierigkeit ist statistischer Art und betrifft die Definition der Entropie. Definiert man in gewöhnlicher Weise die Entropie als Logarithmus der Zustandswahrscheinlichkeit, so wird die spezifische Entropie von der totalen Molekül- oder Atomzahl des betrachteten Systems abhängig.[1]) Im folgenden wird eine neue zuerst von Hilbert gegebene Entropiedefinition eingeführt, die von dieser Schwierigkeit frei ist. Wenn diese Definition auf einem zusammengesetzten System angewandt wird, so erscheint die Entropie desselben ohne weiteres als die Summe der Entropien der Teilsysteme.

Die betreffenden Sätze über Dampfdruck und Dissoziationsgleichgewicht wollen wir nach zwei Methoden ableiten. Ohne Einführung des Entropiebegriffes können wir sie direkt aus dem Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetz erhalten. In dieser Weise überblickt man vielleicht am leichtesten, welche physikalische Hypothesen nötig sind, und welche Schlüsse man aus einer Nichtübereinstimmung zwischen Theorie und Experiment zu ziehen hat. Es wird sodann der oben erwähnte Entropiebegriff entwickelt und das vorliegende Problem mit deren Hilfe gelöst. Endlich werden die Resultate diskutiert und die Methoden zur experimentellen Bestimmung des statistischen Gewichtes der Quantenzustände besprochen.[2])

Der Dampfdruck eines festen Körpers bei tiefen Temperaturen.

Wir denken uns zunächst bei tiefer Temperatur einen einatomigen gesättigten Dampf in Berührung mit dem festen Körper. Die Lage und der Geschwindigkeitszustand eines Moleküls sei durch die Angabe der Cartesischen Koordinaten q_1, q_2, q_3 seines Schwerpunkts und der zugehörigen Momente p_1, p_2, p_3 bestimmt. Von Rotationen sehen wir ab. Die

1) Vgl. hierüber P. Ehrenfest und V. Trkal, Ann. d. Phys. 65. S. 609. 1921; Proc. Amsterd. 23. S. 162. 1920; M. Planck, Ann. d. Phys. 66. S. 365. 1921

2) Nachdem diese Abhandlung zum größten Teil schon fertig redigiert war, ist eine Abhandlung von R. H. Fowler erschienen (Phil. Mag., Jan. 1923), wo das Dissoziationsgleichgewicht in anderer Weise behandelt wird. Einige meiner Resultate finden sich auch bei Fowler.

Konstante der potentiellen Energie bestimmen wir so, daß diese Energie für Moleküle im freien Zustand gleich Null wird. Der Dampf wird als ideales Gas vorausgesetzt. Es seien in der Volumeneinheit des Dampfes n Moleküle vorhanden, und es sei m die Masse eines Moleküls, T die absolute Temperatur und k die Boltzmannsche Konstante. Wir betrachten p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 als Cartesische Koordinaten in einem sechsdimensionalen Phasenraum. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Phasenpunkt eines Moleküls sich in einem Phasengebiet $dp_1\ dp_2 \ldots dq_3$ befindet, ist dann nach dem Verteilungsgesetz von Maxwell-Boltzmann gleich

$$(1) \qquad \frac{n}{(2\pi m k T)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} dp_1 \ldots dq_3 .$$

Auf die Dampfmoleküle angewandt, deren potentielle Energie verschwindet, ist (1) der Ausdruck der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung, wenn ε die kinetische Energie des Moleküls bedeutet. In anderen Fällen gilt nach Boltzmann noch der Satz, wenn ε die ganze Energie eines Moleküls ist.[1])

Ein Dampfmolekül kann von dem festen Körper aufgefangen werden. Nach der Quantentheorie sind dabei nur diskrete Zustände stationär. Bei hinreichend tiefer Temperatur kommt nur der Quantenzustand der kleinsten Energie vor. Die anderen werden zufolge des Verteilungsgesetzes unterdrückt. Das statistische Gewicht dieses Zustandes sei gleich P. Wir verstehen darunter, daß die apriorische Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül sich in diesem Zustand befindet, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, daß im freien Zustande sein Phasenpunkt in einem Phasengebiet der Größe $P \cdot h^3$ liegt.

Ist λ_0 die auf ein Molekül bezogene Verdampfungswärme

1) Bei den Anwendungen, die Boltzmann in entsprechenden Fällen von diesem Satze macht, kommt eine Klassifikation der Moleküle nach deren Impulse nicht in Frage. Boltzmann berechnet die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül sich in einem gewissen Raumgebiet befindet, ohne Rücksicht auf dessen Geschwindigkeit (Wiss. Abhandl. III S. 547 und 642; Vorlesungen über Gastheorie II. S. 167 und 180). Nach seiner klassischen Molekülstatistik gilt überall das Maxwellsche Verteilungsgesetz. Bei unserer Behandlung ist aber die Zerlegung auch nach den Impulsen wesentlich, und es gilt, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, daß ein Phasenpunkt sich in einem begrenzten *Phasengebiet* befindet

beim absoluten Nullpunkt, so ist die Energie des tiefsten Quantenzustandes gleich $-\lambda_0$. Die Wahrscheinlichkeit, daß irgendein Molekül sich in einem bestimmten solchen Zustand (auch der Ort bestimmt) befindet, ist nach (1) gleich

$$\frac{n}{(2\pi m k T)^{3/2}} \cdot e^{\frac{\lambda_0}{kT}} \cdot Ph^3.$$

Diese Wahrscheinlichkeit muß aber beim Gleichgewicht gleich 1 sein. Ist sie z. B. kleiner, so müssen mehr Moleküle in den Dampfraum übergehen als umgekehrt. Statt n führen wir den Dampfdruck ein. Da

$$p = nkT \tag{2}$$

ist, so folgt daher

$$p = \frac{(2\pi m k T)^{3/2} k T}{Ph^3} \cdot e^{-\frac{\lambda_0}{kT}}. \tag{3}$$

Dies ist, von dem Faktor P abgesehen, die schon lange bekannte Formel. Dieselbe Ableitung kann auch auf ein mehratomiges Gas angewandt werden. Nur erhält P hier eine kompliziertere Bedeutung. Der tiefste Rotationszustand und dessen Wahrscheinlichkeit könnten im festen Zustande andere als im gasförmigen sein. Es könnte auch vorkommen, daß man sich den festen Körper nicht aus den mehratomigen Molekülen, sondern direkt aus den einzelnen Atomen aufgebaut zu denken hat. Dies könnte auf den Wert von P einwirken. Wenn demselben λ_0 verschiedene Möglichkeiten entsprechen, so wird sich der Zustand mit dem größten P einstellen, da dies dem kleinsten Dampfdruck entspricht. Jedenfalls gibt (3) ein Mittel, auf experimentellem Wege das Gewicht P zu bestimmen.

Wir haben hier den festen Körper einigermaßen idealisiert, da wir von den Quantenzuständen der einzelnen Moleküle gesprochen haben, als wären diese voneinander unabhängig. Denkt man sich aber, daß die Moleküle des festen Körpers in der Nähe von $T = 0$ unbeweglich sind, so ist dagegen wohl nichts einzuwenden.

Dissoziation.

Wir denken uns ein Gemisch von zwei einatomigen Gasen im idealen Zustande. In der Volumeneinheit seien von dem ersten Gase n_1 und von dem zweiten n_2 freie Atome vorhanden. Die

Massen der Atome seien m_1 bzw. m_2, die Geschwindigkeitskomponenten mit ξ_1, η_1, ζ_1 bzw. mit ξ_2, η_2, ζ_2 bezeichnet.

Wir wollen nach dem Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetze die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß sich ein Atom der ersten Art relativ zu einem der zweiten in einem gewissen Phasengebiet befindet. Wir setzen zuerst fest, daß die Atome sich in den infinitesimalen Raumgebieten do_1 und do_2 befinden sollen, während die Geschwindigkeitskomponenten den Geschwindigkeitsgebieten $d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = d\Gamma_1$ bzw. $d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2 = d\Gamma_2$ gehören. Die Wahrscheinlichkeit dieser Konstellation ist

$$w = \frac{n_1 n_2 (m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi k T)^3} \cdot e^{-\frac{\varepsilon'}{kT}}\, do_1\, do_2\, d\Gamma_1\, d\Gamma_2, \tag{4}$$

wo ε' die ganze Energie des Atompaares bedeutet. Die potentielle Energie eines freien Atoms ist dann gleich 0 angenommen. Statt der Koordinaten und Geschwindigkeiten der beiden einzelnen Atome führen wir die Koordinaten des gemeinsamen Schwerpunkts, die relativen Koordinaten des ersten Atoms bezüglich des zweiten und die entsprechenden Geschwindigkeiten ein. Sind l_x, l_y, l_z die Komponenten der Schwerpunktsgeschwindigkeit, so ist

$$l_x = \frac{m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2}{m_1 + m_2},$$

$$g_x = \xi_1 - \xi_2$$

usw. Die Determinante wird folglich gleich 1, und es ist

$$d\Gamma_1\, d\Gamma_2 = dl_x\, dl_y\, dl_z\, dg_x\, dg_y\, dg_z \tag{5}$$

zu setzen. Entsprechendes gilt von der Transformation der Koordinaten. Es sei ε'' die kinetische Energie des Atompaares. Führen wir die Geschwindigkeiten $l_x \ldots g_z$ ein, so ergibt sich

$$\varepsilon'' = \frac{m_1 + m_2}{2}(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g_x^2 + g_y^2 + g_z^2).$$

Sehen wir von äußeren Kräften ab, so wird die Energie von den Schwerpunktskoordinaten unabhängig. Integrieren wir nach diesen Koordinaten über eine Volumeneinheit, so werden einfach die Differentiale derselben aus dem Ausdruck verschwinden. Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu erhalten,

müssen wir auch über die Komponenten der Schwerpunktsgeschwindigkeit integrieren. Da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m_1+m_2}{2kT}w^2}\,dl_x = \left(\frac{2\pi kT}{m_1+m_2}\right)^{1/2}$$

ist, so ergibt sich aus (4) nach der Integration

$$(6)\qquad \frac{n_1 n_2}{(2\pi kT)^{3/2}}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\,dq_1\,dq_2\,dq_3\,dg_x\,dg_y\,dg_z,$$

wenn ε die gesamte relative Energie und q_1, q_2, q_3 die relativen Koordinaten bedeuten. Führen wir statt g_x, g_y, g_z die relativen Impulse p_1, p_2, p_3 ein, so wird

$$p_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} g_x = \mu g_x$$

usw., wo μ die reduzierte Masse ist. Der Ausdruck (6) geht in

$$(7)\qquad n = \frac{n_1 n_2}{(2\pi\mu kT)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\,dp_1 \ldots dq_3$$

über. Fassen wir $p_1 \ldots q_3$ als die Cartesischen Koordinaten eines 6-dimensionalen Phasenraumes auf, so ist dies die Zahl der Atompaare in der Volumeneinheit, deren Phasenpunkte sich in dem Gebiet $dp_1 \ldots dq_3$ befinden. Statt dem parallelepipedischen Phasengebiet können wir auch ein anderes von beliebiger Form einführen, wenn darin nur ε merklich konstant ist.

In den Fällen, wo zwei Atome zu einem Molekül vereint sind, müssen wir uns denken, daß sie relativ zueinander periodische oder bedingt periodische Bewegungen ausführen, die durch Quantenbedingungen festgelegt sind. Es gibt eine ganze Reihe solcher Zustände, die durch verschiedene Kombinationen der Quantenzahlen, z. B. der azimutalen und der radialen, ausgezeichnet sind. Wir denken uns dieselben durchnumeriert und bezeichnen die entsprechenden Energiewerte mit ε_i, die Gewichte die wir ganz wie oben definieren, mit P_i $(i = 1, 2, 3 \ldots)$. Die Zahl der in dem i-ten Quantenzustand befindlichen Moleküle ist dann nach (7) gleich

$$(8)\qquad n^{(i)} = n_1 n_2 \frac{h^3}{(2\pi\mu kT)^{3/2}} \cdot P_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}$$

und die ganze Zahl der Moleküle in Volumeneinheit:

$$n = n_1 n_2 \cdot \frac{h^3}{(2\pi\mu k T)^{3/2}} \cdot \sum^{i} P_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} . \tag{9}$$

Wenn man hier die Partialdrucke p, p_1 und p_2 statt den Molekül- und Atomzahlen n, n_1 und n_2 einführt, so ergibt sich (vgl. (2)):

$$\frac{p}{p_1 p_2} = \frac{h^3}{(2\pi\mu k T)^{3/2} k T} \cdot \sum^{i} P_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} . \tag{10}$$

Bei der Festsetzung der Gewichte P_i hat man alle möglichen Richtungen der Molekülachse in Betracht zu ziehen. Sind aber beide Atome gleich, so wird in dieser Weise jedes Molekül doppelt gezählt. Hier kommt folglich im Nenner ein Faktor 2 hinzu. Oder es gilt, wenn σ die Symmetriezahl bedeutet, die in den beiden Fällen bzw. gleich 1 oder 2 ist, allgemein

$$\frac{p}{p_1 p_2} = \frac{h^3}{\sigma (2\pi\mu k T)^{3/2} k T} \cdot \sum^{i} P_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} . \tag{11}$$

Es könnte hiernach scheinen, als ob der Dissoziationsgrad sich plötzlich verdoppeln würde, wenn die Atome zuerst einander dynamisch sehr ähnlich wären, um dann identisch gleich zu werden. Die nähere Betrachtung zeigt, daß dies nicht der Fall ist. Bezeichnen wir die rechte Seite von (10) mit k, so können im ersteren Falle drei Arten von Molekülen entstehen, deren Partialdrucke nach (11)

$$p_{11} = p_1^2 \cdot \frac{k}{2},$$

$$p_{12} = p_1 p_2 k,$$

$$p_{22} = p_2^2 \cdot \frac{k}{2}$$

sind. Betrachten wir aber die Atome als gleichartig, so wird nach (11) der Partialdruck des zweiatomigen Gases

$$p = (p_1 + p_2)^2 \cdot \frac{k}{2} .$$

Es ist mithin wirklich $p = p_{11} + p_{12} + p_{22}$.

Nimmt man an, daß die Schwingungen „eingefroren" sind, und daß man die Summe über die Rotationszustände durch ein Integral ersetzen kann, so geht Formel (11) in diejenige

über, die man aus den von Tetrode, Ehrenfest und Trkal abgeleiteten chemischen Konstanten erhält. Zwar scheint dies nur in Ausnahmefällen erlaubt zu sein. Die näheren Erläuterungen hierzu wollen wir später geben.

Definition der Entropie.

Der Zustand eines Moleküls sei durch die generalisierten Koordinaten q_1, $q_2 \dots q_r$ und die zugehörigen Impulse p_1, $p_2 \dots p_r$ bestimmt oder durch die Lage des Phasenpunkts in dem $2r$-dimensionalen Phasenraum (μ-Raum). Der Zustand einer aus N gleichartigen Molekülen zusammengesetzten Gasmasse ist dann durch die Verteilung der N zugehörigen Phasenpunkte im μ-Raume gegeben.

Ist das Gas in einem Gefäß eingeschlossen, so müssen bei endlicher Gesamtenergie sämtliche q und p endlich sein. Wir grenzen von dem μ-Raum ein konstantes Gebiet Ω ab, das bei allen betrachteten Zuständen des Gases sämtliche Phasenpunkte einschließt. Es sei ferner Ω in einer sehr großen Zahl gleich großer Zellen des Volumens ω eingeteilt. Diese Zellen sollen auch, von wenigen Ausnahmen abgesehen, die Bedingung erfüllen, daß sie je viele Phasenpunkte enthalten, wenn sie davon nicht frei sind. Dadurch wird ω auch nach unten hin begrenzt. Innerhalb des zugelassenen Gebiets soll diese Größe aber willkürlich gewählt werden können.

Wir denken uns, daß die Phasenpunkte auf die Zellen des Gebiets Ω durch Zufall verteilt werden. Die mathematische Wahrscheinlichkeit, daß N_1 derselben auf die erste Zelle, N_2 auf die zweite usw. fallen, ist dann

$$w = \frac{N!}{N_1!\, N_2! \dots} \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^N. \tag{12}$$

Wir denken uns ferner bei derselben oder einem anderen Zustand des Gases Ω in noch viel kleinere Zellen des Volumens g eingeteilt. Diese Zellen sollen so klein sein, daß im allgemeinen jede derselben höchstens einen Phasenpunkt enthält.[1]) Die

1) Auf diese Möglichkeit hat Hilbert in seinen Vorlesungen während des Sommersemesters 1922 hingewiesen. Die wichtigsten Gesichtspunkte der vorliegenden Abhandlung wurden von mir bei einer Diskussion in dem Göttinger Seminar über die Struktur der Materie im November 1922 hervorgehoben. Dabei war mir diese Tatsache entgangen. Für etwaige Mängel in der Formulierung bin ich selber verantwortlich.

Wahrscheinlichkeit einer beliebigen normalen Verteilung der Phasenpunkte auf diese Zellen ist dann gleich

$$w_0 = N! \left(\frac{g}{\Omega}\right)^N. \tag{13}$$

Diese Größe ist vom Zustand des Gases unabhängig, wenigstens solange das Gas hinreichend verdünnt und die Temperatur nicht zu niedrig ist. In jedem Fall soll sich w_0 auf einen Zustand beziehen, wo (13) gilt.

Als *thermodynamische Wahrscheinlichkeit* W bezeichnen wir das Verhältnis von w und w_0 oder in anderen Worten die erstere Wahrscheinlichkeit in der letzteren als Einheit gemessen. Nach (12) und (13) wird

$$W = \frac{1}{N_1!\, N_2! \ldots} \left(\frac{\omega}{g}\right)^N. \tag{14}$$

Ist ferner S die Entropie, so setzen wir

$$S = k \cdot \ln W, \tag{15}$$

wo k die Boltzmannsche Konstante ist.

Wenn man zwei räumlich angrenzende Gasmassen in beliebigen Zuständen zu einer einzigen zusammensetzt, wobei die Zellen ω der beiden Gasräume getrennt bleiben sollen, so wird nach (14) die thermodynamische Wahrscheinlichkeit für das ganze System gleich dem Produkt derjenigen der Teilsysteme. D. h. es wird nach (15) die Entropie des ersteren gleich der Summe der Entropien der Teilsysteme. Dies gilt in aller Strenge und auch nicht nur etwa für das Gleichgewicht, sondern für beliebige Zustände. Es gilt auch, wenn die Teilsysteme aus verschiedenen Gasen bestehen.

Sind die Molekülzahlen N_1, N_2 usw. groß, so fällt die Größe ω aus der Entropie hinaus. Man setze

$$N_1 = f_1 \cdot \omega, \quad N_2 = f_2 \cdot \omega \ldots \tag{16}$$

Durch Anwendung der Formel von Stirling ergibt sich aus (14)

$$W = \frac{e^{\Sigma f_i \omega}}{f_1^{f_1 \omega} \cdot f_2^{f_2 \omega} \ldots} \cdot \frac{1}{g^N} \tag{17}$$

und aus (15):

$$S = k \sum \omega (f_i - f_i \ln f_i) - k N \ln g. \tag{18}$$

Die spezifische Entropie wird außer von den spezifischen Eigenschaften des Gases nur von g, d. h. von der Einheitswahl abhängig sein.

Sucht man in gewöhnlicher Weise das Maximum von S, so wird man auf die Maxwell-Boltzmannsche Verteilung geführt. Ersetzt man in (18) die Summe durch ein Integral und führt man statt f_i die Maxwellsche Verteilungsfunktion ein, so ergibt sich als Wert der Entropie eines einatomigen Gases

$$(19) \qquad R = R \ln (T^{3/2} p^{-1}) + R \ln \left[\frac{(2 \mu m)^{3/2} k^{5/2}}{g} \right] + {}^5/_2 R,$$

wo $R = kN$ die Gaskonstante, p den Druck, T die absolute Temperatur und m die Masse eines Moleküls bedeuten. Hier kommt die Größe h natürlich nicht vor. Man erhält den gewöhnlich angenommenen Wert, wenn man $g = h^3$ setzt.

Wir berechnen, wie viele Moleküle höchstens auf ein Phasengebiet der Größe h^3 fallen. Man erhält eine obere Grenze, wenn man in (1) $\varepsilon = 0$ und $dp_1 \ldots dq_3 = h^3$ einsetzt, nämlich

$$\frac{n h^3}{(2 \pi m k T)^{3/2}}.$$

Setzt man die Daten für Wasserstoff ein, so findet man als Wert dieser oberen Grenze bei 0° C und Atmosphärendruck $1{,}1 \cdot 10^{-5}$. Für andere Gase wird der Wert noch niedriger, z. B. für Sauerstoff 64 mal.

Nimmt man $g = h^3$ an, so würde bei 0° und Atmosphärendruck unter 100 000 Zellen im Mittel höchstens eine einen Phasenpunkt enthalten. Die Wahrscheinlichkeit, daß man in einer derjenigen Zellen, die Phasenpunkte enthalten, zwei oder mehr Phasenpunkte antrifft, wäre 10^{-5}. Um die Konstante w_0 zu definieren, kann man demnach ohne weiteres $g = h^3$ nehmen. Dies hat aber natürlich für sich keine physikalische Bedeutung.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, wie man denselben Gedanken in den Fällen durchführen kann, wo als Maß der Zustandswahrscheinlichkeit ein Phasenvolumen genommen wird. Das Phasenvolumen muß in der Einheit $N!\, g^N$ bzw. $N!$ gemessen werden, und man erhält folglich immer die Permutationszahl $N!$ im Nenner. In ähnlicher Weise läßt sich der-

selbe Faktor auch bei Anwendung der Gibbsschen Methode rechtfertigen.[1])

Das System Dampf—fester Körper.

Wir denken uns wieder einen atomigen Stoff, der bei sehr tiefer Temperatur zum Teil als Dampf und zum Teil als fester Körper vorhanden ist. Die Zahl der Dampfmoleküle sei N, die der Moleküle des festen Körpers N' Die Dampfmoleküle denken wir uns wie früher (S. 329) auf die Zellen ω verteilt. Die Moleküle des festen Körpers befinden sich mit wenigen Ausnahmen in dem tiefsten Quantenzustand, dessen Gewicht wir gleich P annehmen (vgl. S. 324). Dann hat man sich zu denken, daß jedes Molekül des festen Körpers eine eigene Zelle der Größe $P \cdot h^3$ einnimmt. Es wird

$$(20)\qquad \begin{cases} w = \dfrac{(N+N')!}{N_1!\,N_2!\ldots}\left(\dfrac{\omega}{\Omega}\right)^N\left(\dfrac{P h^3}{\Omega}\right)^{N'}, \\ w_0 = (N+N')!\left(\dfrac{g}{\Omega}\right)^{N+N'}, \\ W = \dfrac{1}{N_1!\,N_2!\ldots}\left(\dfrac{\omega}{g}\right)^N\left(\dfrac{P h^3}{g}\right)^{N'}. \end{cases}$$

Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit wird gleich dem Produkt zweier Faktoren, von denen der eine sich auf den Dampf bezieht und die Form (14) hat. Der andere Faktor bezieht sich auf den festen Körper, und sein mit k multiplizierter Logarithmus ist die Entropie derselben. Die Entropie des Systems wird folglich auch hier gleich der Summe der Entropien der Teilsysteme. Nur in der Entropie des festen Körpers kommt h vor. Nimmt man aber $g = P h^3$ an, so wird diese Entropie gleich Null und wenn $P = 1$, ergibt sich für die Entropie des Dampfes der gewöhnliche quantentheoretische Wert.

Ist S die Entropie des Systems, so erhalten wir (vgl. (18));

$$S = k\sum \omega (f_i - f_i \ln f_i) + k N' \ln (P h^3) - k(N+N') \ln g,$$

wo $N_i = f_i \omega$ gesetzt ist. Statt N' führen wir $A = N + N'$ ein, welche Größe konstant ist. Es ergibt sich

1) Vgl. die Behandlung in M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung S. 209, 4. Aufl. 1921, die Bemerkungen dazu von P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 65. S. 609. 1921 (am Schluß) und die Antwort von Planck, Ann. d. Phys. 66. S. 365. 1921.

$$(21) \quad S = k\sum^{i}\omega\,[f_i - f_i \ln f_i - f_i \ln (Ph^3)] + kA \ln\left(\frac{Ph^3}{g}\right),$$

da $N = \sum f_i \omega$ ist. Wir suchen das Maximum der Entropie unter der Bedingung, daß auch die ganze Energie konstant sein soll. Nehmen wir die Energie der Moleküle des festen Körpers gleich Null an, so wird die Energie eines Dampfmoleküls im i-ten Zelle gleich $\varepsilon_i + \lambda_0$, wenn ε_i die kinetische Energie und λ_0 die Verdampfungswärme eines Moleküls beim absoluten Nullpunkt ist. Wir haben folglich

$$(22) \qquad \sum \omega (\varepsilon_i + \lambda_0) f_i = \text{konst.}$$

Aus (21) und (22) ergibt sich, wenn $-\frac{1}{T}$ einen Lagrangeschen Multiplikator bezeichnet, und wenn man Index i fortläßt

$$-k \ln f - k \ln (Ph^3) - \frac{\varepsilon + \lambda_0}{T} = 0$$

oder

$$f = \frac{1}{Ph^3} \cdot e^{-\frac{\varepsilon + \lambda_0}{kT}}.$$

Die Verteilungsfunktion hat folglich die Form

$$f = \frac{n}{(2\pi m k T)^{3/2}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

wo die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit

$$n = \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{Ph^3} e^{-\frac{\lambda_0}{kT}}$$

ist. Dies gibt wieder Formel (3). Wie man schon aus (21) sieht, muß die Größe g aus den Ausdrücken fortfallen.

Die Entropie eines zwei- oder mehratomigen Gases.

Um die Entropie eines zweiatomigen Gases zu erhalten, betrachten wir ein System, das aus zwei verschiedenen Atomgattungen und den entsprechenden zweiatomigen Molekülen besteht. Das Gemisch soll sich in einem idealen Gaszustande befinden. Es wird sich zeigen, daß auch in diesem Falle die Entropie des zusammengesetzten Systems gleich der Summe der Entropien der Teilsysteme ist. Dieselbe Methode kann natürlich auch in komplizierteren Fällen angewandt werden.

Wir denken uns zwei verschiedene μ-Räume, einen 6-dimensionalen und einen 12-dimensionalen. Auf die Zellen der

ersteren sollen die Phasenpunkte der N' Atome erster Gattung und die der N'' Atome zweiter Gattung verteilt werden. Der zweite μ-Raum soll die Phasenpunkte der N Moleküle enthalten. Die Koordinaten und Impulse seien hier die des Schwerpunkts des Moleküls und die der Relativbewegung. Um die Wahrscheinlichkeit w_0 zu erhalten, haben wir uns einen Zustand zu denken, wo alle $N' + N'' + 2N$ Atome frei sind und auf die sehr kleinen Einheitszellen g des ersteren μ-Raumes verteilt sind. Es wird mithin nach (13)

$$w_0 = (N' + N)!\,(N'' + N)!\left(\frac{g}{\Omega}\right)^{N'+N''+2N}. \tag{23}$$

Von den N Molekülen befinden sich $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ ... bzw. in dem ersten, zweiten, dritten usw. Quantenzustande, deren Gewichte bzw. P_1, P_2, P_3 ... sind. Es sind mithin

$$N = N^{(1)} + N^{(2)} + N^{(3)} + \ldots \tag{24}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Koordinaten und Impulse des Schwerpunkts eines Moleküls einem Variabilitätsbereich ω und daß gleichzeitig die der Relativbewegung einem Bereich ω_1 gehören, ist dann nach (5) gleich der Wahrscheinlichkeit, daß die Koordinaten und Impulse eines freien Atoms einem Variabilitätsbereich ω und gleichzeitig die eines anderen einem Bereich ω_1 gehören und folglich gleich

$$\frac{\omega\,\omega_1}{\Omega^2}.$$

Sollen die relativen Koordinaten und Impulse dem i-ten Quantenzustand entsprechen, so ist hier $\omega_1 = P_i h^3$ zu setzen. Die Variabilitätsbereiche der Schwerpunktsgrößen nehmen wir alle gleich ω an und denken uns dieselben numeriert.

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit einer Komplexion, die den folgenden Bedingungen genügt. Von den Atomen der ersten Art sollen N' frei sein, und es sollen bzw. N_1', N_2', N_3' ... Phasenpunkte auf die Zellen des ersten μ-Raumes fallen. Von denen der zweiten Art seien N'' frei, und auf dieselben Zellen sollen bzw. N_1'', N_2'', N_3'' ... Phasenpunkte fallen. In dem i-ten Quantenzustand befinden sich $N^{(i)}$ Moleküle, und davon gehören $N_1^{(i)}$, $N_2^{(i)}$, $N_3^{(i)}$ ... Moleküle den entsprechenden Variabilitätsbereichen der Schwerpunktsgrößen ($i = 1, 2, 3 \ldots$). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{N'+N''} \Pi_i \left(\frac{\omega P_i h^3}{\Omega^3}\right)^{N^{(i)}}$$

und die Zahl der Komplexionen

$$\frac{(N'+N)!\,(N''+N)!}{N_1'!\,N_2'!\ldots N_1''!\,N_2''!\ldots \Pi_i (N_1^{(i)}!\;N_2^{(i)}!\ldots)}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit w (12) ist gleich dem Produkt beider Größen. Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit W ist das Verhältnis von w und w_0, folglich

$$(25)\quad \begin{cases} W = \dfrac{1}{N_1'!\,N_2'!\ldots}\left(\dfrac{\omega}{g}\right)^{N'} \cdot \dfrac{1}{N_1''!\,N_2''!\ldots}\left(\dfrac{\omega}{g}\right)^{N''} \cdot \\ \qquad \Pi_i \left[\dfrac{1}{N_1^{(i)}!\,N_2^{(i)}!\ldots}\left(\dfrac{\omega P_i h^3}{g^2}\right)^{N^{(i)}}\right]. \end{cases}$$

Sie erscheint mithin als Produkt von Faktoren, die sich auf die verschiedenen Atom- und Molekülgattungen beziehen. Die zwei ersten Faktoren haben beide die Form (14) und ihre Logarithmen geben die Entropien der beiden einatomigen Komponenten des Gasgemisches. Der dritte Faktor gibt die Entropie des oder der zweiatomigen Komponenten. Man sieht, daß man auch diese Entropie in mehrere Glieder zerlegen kann entsprechend den verschiedenen Quantenzuständen. Diese Zerlegung kann übrigens noch weiter getrieben werden, so daß jede Gruppe der zu derselben Zelle gehörenden Atome oder Moleküle irgendeiner Gattung ihre eigene Entropie bekommt. Die Entropie des ganzen Systems wird immer gleich der Summe der Entropien aller Teilsysteme.

Da bei keinen Zustandsänderungen die Atomzahl geändert wird, so geht aus (25) hervor, daß die Größe g bei den Variationen der Entropie immer hinausfällt. Der Wert von g wirkt daher auf die Resultate nicht ein. Die Ausdrücke werden am einfachsten, wenn wir $g = h^3$ setzen, und das wollen wir daher im folgenden tun.

Sind die beiden Atome eines Moleküls gleich, so muß man entweder das Gewicht P_i nur auf die Hälfte aller Richtungen der Molekülachse im Raume beziehen oder auch P_i/σ statt P_i setzen, wo σ die Symmetriezahl bedeutet (vgl. S. 328).

Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit des Systems derjenigen Moleküle, die sich in dem i-ten Quantenzustand

befinden, und deren Schwerpunktskoordinaten und die entsprechenden Impulse zu dem s-ten Variabilitätsbereich ω gehören, setzen wir nach dem Gesagten gleich

$$W_s^{(i)} = \frac{1}{N_s^{(i)}!}\left(\frac{\omega}{h^3}\cdot\frac{P_i}{\sigma}\right)^{N_s^{(i)}} \tag{26}$$

Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit, auf das ganze System bezogen, ist dann gleich dem Produkt aller $W_s^{(i)}$.

Wie man in derselben Weise leicht findet, gilt (26) auch für mehratomige Moleküle. Sind in einem Molekül a-Atome vorhanden, so hat das Molekül $3a-3$ innere Freiheitsgrade. P_i wird dann durch die Festsetzung definiert, daß die apriorische Wahrscheinlichkeit des i-ten Quantenzustandes gleich der eines Phasengebiets der Größe $P_i \cdot h^{3a-3}$ ist. σ hat hier auch andere Werte als 1 und 2.[1])

Setzen wir in (26)

$$N_s^{(i)} = F_s^{(i)} \cdot \omega, \tag{27}$$

und wenden in gewöhnlicher Weise die Formel von Stirling an, so ergibt sich

$$W_s^{(i)} = \left(\frac{e\,P_i}{F_s^{(i)}\,\sigma\,h^3}\right)^{F_s^{(i)}\cdot\omega} \tag{28}$$

und

$$S^{(i)} = k\sum_{(s)} \ln W_s^{(i)} = k\int\left[F^{(i)} - F^{(i)}\ln F^{(i)} + F^{(i)}\ln\left(\frac{P_i}{\sigma h^3}\right)\right]d\omega. \tag{29}$$

Hier ist $S^{(i)}$ die Entropie des Systems der in dem i-ten Quantenzustand befindlichen Moleküle. In dem letzten Ausdruck ist die Summe durch ein Integral ersetzt. Es ist

$$d\omega = dp_1\,dp_2\,dp_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3$$

gleich dem Differentialprodukt der Koordinaten und Impulse des Schwerpunkts. Wir haben ferner statt $F_s^{(i)}$ einfach $F^{(i)}$ gesetzt. Das Integral ist über alle Koordinaten und Impulse des Schwerpunkts auszudehnen.

Die Definition der Entropie können wir auch folgendermaßen ausdrücken. Es seien in jedem Molekül a Atome vorhanden. Dann ist der μ-Raum $6a$-dimensional. Haben N_r Mole-

1) Vgl. P. Ehrenfest u. V. Trkal, a. a. O.

küle ihre Phasenpunkte in der r-ten Phasenzelle ω ($6a$-dimensional!), so ist die entsprechende Teilentropie:

$$S_r = k \ln \left[\frac{1}{N_r!} \left(\frac{\omega}{g^a} \right)^{N_r} \right]$$

oder wenn N_r eine große Zahl ist:

$$S_r = k \ln \left(\frac{e\,\omega}{N_r} \right)^{N_r},$$

wenn wir $g = 1$ setzen. Es sei $\mathfrak{W}_r$ das auf jedes Molekül im Mittel fallende Phasengebiet. Dann ist

$$\mathfrak{W}_r = \frac{\omega}{N_r}$$

und

$$S_r = k N_r \ln \mathfrak{W}_r + k N_r. \tag{30}$$

Summiert man über alle Molekülgruppen, so ergibt sich, wenn das für alle Moleküle berechnete geometrische Mittel von $\mathfrak{W}_r$ mit $\widehat{\mathfrak{W}}$ bezeichnet wird, pro Molekül der Entropiewert

$$\frac{S}{N} = k \ln \widehat{\mathfrak{W}} + k. \tag{31}$$

Das zweite Glied ist ohne Belang, wenn die Molekülzahl nicht geändert wird, kommt aber bei der Berechnung des Dissoziationsgleichgewichts in Betracht.

Hiernach ist ein beliebiges Dissoziationsgleichgewicht leicht zu berechnen. Man sucht in gewöhnlicher Weise das Maximum der totalen Entropie mit den Nebenbedingungen, daß die verschiedenen Atomzahlen, die totale Energie und das Volumen (das Integrationsgebiet) konstant sind. Die Entropie eines Gases mit zusammengesetzten Molekülen ergibt sich aus (29) durch Summation aller $S^{(i)}$, die eines einatomigen Gases aus demselben Ausdruck, wenn man $\frac{P_i}{\sigma} = 1$ setzt.

Das Gemisch bestehe aus einem mehratomigen Gas und den einatomigen Komponenten. Die Verteilungsfunktionen der letzteren bezeichnen wir mit $f_1, f_2, \ldots f_s \ldots$, die Atommassen mit $m_1, m_2, \ldots m_s \ldots$ In einem Molekül des ersteren Gases mögen bzw. $a_1, a_2, \ldots a_s \ldots$ Atome eingehen. Es ist dann die Variation der Entropie

$$S = k \sum_{(s)} \int [f_s - f_s \ln f_s - f_s \ln h^3]\, d\omega$$

$$+ k \sum_{(i)} \int \left[F^{(i)} - F^{(i)} \ln F^{(i)} + F^{(i)} \ln \frac{P_i}{\sigma h^3} \right] d\omega$$

selbe Faktor auch bei Anwendung der Gibbsschen Methode rechtfertigen.[1])

Das System Dampf—fester Körper.

Wir denken uns wieder einen atomigen Stoff, der bei sehr tiefer Temperatur zum Teil als Dampf und zum Teil als fester Körper vorhanden ist. Die Zahl der Dampfmoleküle sei N, die der Moleküle des festen Körpers N' Die Dampfmoleküle denken wir uns wie früher (S. 329) auf die Zellen ω verteilt. Die Moleküle des festen Körpers befinden sich mit wenigen Ausnahmen in dem tiefsten Quantenzustand, dessen Gewicht wir gleich P annehmen (vgl. S. 324). Dann hat man sich zu denken, daß jedes Molekül des festen Körpers eine eigene Zelle der Größe $P \cdot h^3$ einnimmt. Es wird

$$(20)\qquad \begin{cases} w = \dfrac{(N+N')!}{N_1!\,N_2!\ldots}\left(\dfrac{\omega}{\Omega}\right)^N\left(\dfrac{P h^3}{\Omega}\right)^{N'}, \\ w_0 = (N+N')!\left(\dfrac{g}{\Omega}\right)^{N+N'}, \\ W = \dfrac{1}{N_1!\,N_2!\ldots}\left(\dfrac{\omega}{g}\right)^N\left(\dfrac{P h^3}{g}\right)^{N'}. \end{cases}$$

Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit wird gleich dem Produkt zweier Faktoren, von denen der eine sich auf den Dampf bezieht und die Form (14) hat. Der andere Faktor bezieht sich auf den festen Körper, und sein mit k multiplizierter Logarithmus ist die Entropie derselben. Die Entropie des Systems wird folglich auch hier gleich der Summe der Entropien der Teilsysteme. Nur in der Entropie des festen Körpers kommt h vor. Nimmt man aber $g = P h^3$ an, so wird diese Entropie gleich Null und wenn $P = 1$, ergibt sich für die Entropie des Dampfes der gewöhnliche quantentheoretische Wert.

Ist S die Entropie des Systems, so erhalten wir (vgl. (18));

$$S = k\sum\omega(f_i - f_i \ln f_i) + k N' \ln(P h^3) - k(N+N')\ln g,$$

wo $N_i = f_i\omega$ gesetzt ist. Statt N' führen wir $A = N + N'$ ein, welche Größe konstant ist. Es ergibt sich

1) Vgl. die Behandlung in M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung S. 209, 4. Aufl. 1921, die Bemerkungen dazu von P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 65. S. 609. 1921 (am Schluß) und die Antwort von Planck, Ann. d. Phys. 66. S. 365. 1921.

$$(21) \quad S = k \sum^{i} \omega \left[f_i - f_i \ln f_i - f_i \ln (P h^3) \right] + k A \ln \left(\frac{P h^3}{g} \right),$$

da $N = \sum f_i \omega$ ist. Wir suchen das Maximum der Entropie unter der Bedingung, daß auch die ganze Energie konstant sein soll. Nehmen wir die Energie der Moleküle des festen Körpers gleich Null an, so wird die Energie eines Dampfmoleküls im i-ten Zelle gleich $\varepsilon_i + \lambda_0$, wenn ε_i die kinetische Energie und λ_0 die Verdampfungswärme eines Moleküls beim absoluten Nullpunkt ist. Wir haben folglich

$$(22) \quad \sum \omega (\varepsilon_i + \lambda_0) f_i = \text{konst.}$$

Aus (21) und (22) ergibt sich, wenn $-\frac{1}{T}$ einen Lagrangeschen Multiplikator bezeichnet, und wenn man Index i fortläßt

$$- k \ln f - k \ln (P h^3) - \frac{\varepsilon + \lambda_0}{T} = 0$$

oder

$$f = \frac{1}{P h^3} \cdot e^{-\frac{\varepsilon + \lambda_0}{k T}}.$$

Die Verteilungsfunktion hat folglich die Form

$$f = \frac{n}{(2 \pi m k T)^{3/2}} e^{-\frac{\varepsilon}{k T}},$$

wo die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit

$$n = \frac{(2 \pi m k T)^{3/2}}{P h^3} e^{-\frac{\lambda_0}{k T}}$$

ist. Dies gibt wieder Formel (3). Wie man schon aus (21) sieht, muß die Größe g aus den Ausdrücken fortfallen.

Die Entropie eines zwei- oder mehratomigen Gases.

Um die Entropie eines zweiatomigen Gases zu erhalten, betrachten wir ein System, das aus zwei verschiedenen Atomgattungen und den entsprechenden zweiatomigen Molekülen besteht. Das Gemisch soll sich in einem idealen Gaszustande befinden. Es wird sich zeigen, daß auch in diesem Falle die Entropie des zusammengesetzten Systems gleich der Summe der Entropien der Teilsysteme ist. Dieselbe Methode kann natürlich auch in komplizierteren Fällen angewandt werden.

Wir denken uns zwei verschiedene μ-Räume, einen 6-dimensionalen und einen 12-dimensionalen. Auf die Zellen der

ersteren sollen die Phasenpunkte der N' Atome erster Gattung und die der N'' Atome zweiter Gattung verteilt werden. Der zweite μ-Raum soll die Phasenpunkte der N Moleküle enthalten. Die Koordinaten und Impulse seien hier die des Schwerpunkts des Moleküls und die der Relativbewegung. Um die Wahrscheinlichkeit w_0 zu erhalten, haben wir uns einen Zustand zu denken, wo alle $N' + N'' + 2N$ Atome frei sind und auf die sehr kleinen Einheitszellen g des ersteren μ-Raumes verteilt sind. Es wird mithin nach (13)

$$w_0 = (N' + N)!\,(N'' + N)!\left(\frac{g}{\Omega}\right)^{N'+N''+2N}. \tag{23}$$

Von den N Molekülen befinden sich $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ ... bzw. in dem ersten, zweiten, dritten usw. Quantenzustande, deren Gewichte bzw. P_1, P_2, P_3 ... sind. Es sind mithin

$$N = N^{(1)} + N^{(2)} + N^{(3)} + \ldots \tag{24}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Koordinaten und Impulse des Schwerpunkts eines Moleküls einem Variabilitätsbereich ω und daß gleichzeitig die der Relativbewegung einem Bereich ω_1 gehören, ist dann nach (5) gleich der Wahrscheinlichkeit, daß die Koordinaten und Impulse eines freien Atoms einem Variabilitätsbereich ω und gleichzeitig die eines anderen einem Bereich ω_1 gehören und folglich gleich

$$\frac{\omega\,\omega_1}{\Omega^2}.$$

Sollen die relativen Koordinaten und Impulse dem i-ten Quantenzustand entsprechen, so ist hier $\omega_1 = P_i h^3$ zu setzen. Die Variabilitätsbereiche der Schwerpunktsgrößen nehmen wir alle gleich ω an und denken uns dieselben numeriert.

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit einer Komplexion, die den folgenden Bedingungen genügt. Von den Atomen der ersten Art sollen N' frei sein, und es sollen bzw. N_1', N_2', N_3' ... Phasenpunkte auf die Zellen des ersten μ-Raumes fallen. Von denen der zweiten Art seien N'' frei, und auf dieselben Zellen sollen bzw. N_1'', N_2'', N_3'' ... Phasenpunkte fallen. In dem i-ten Quantenzustand befinden sich $N^{(i)}$ Moleküle, und davon gehören $N_1^{(i)}$, $N_2^{(i)}$, $N_3^{(i)}$ ... Moleküle den entsprechenden Variabilitätsbereichen der Schwerpunktsgrößen ($i = 1, 2, 3 \ldots$). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{N'+N''} \Pi_i \left(\frac{\omega P_i h^3}{\Omega^3}\right)^{N^{(i)}}$$

und die Zahl der Komplexionen

$$\frac{(N'+N)!\,(N''+N)!}{N_1'!\,N_2'!\ldots N_1''!\,N_2''!\ldots \Pi_i (N_1^{(i)}!\,N_2^{(i)}!\ldots)}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit w (12) ist gleich dem Produkt beider Größen. Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit W ist das Verhältnis von w und w_0, folglich

$$(25)\quad \begin{cases} W = \dfrac{1}{N_1'!\,N_2'!\ldots}\left(\dfrac{\omega}{g}\right)^{N'} \cdot \dfrac{1}{N_1''!\,N_2''!\ldots}\left(\dfrac{\omega}{g}\right)^{N''} \cdot \\ \qquad \Pi_i \left[\dfrac{1}{N_1^{(i)}!\,N_2^{(i)}!\ldots}\left(\dfrac{\omega P_i h^3}{g^3}\right)^{N^{(i)}}\right]. \end{cases}$$

Sie erscheint mithin als Produkt von Faktoren, die sich auf die verschiedenen Atom- und Molekülgattungen beziehen. Die zwei ersten Faktoren haben beide die Form (14) und ihre Logarithmen geben die Entropien der beiden einatomigen Komponenten des Gasgemisches. Der dritte Faktor gibt die Entropie des oder der zweiatomigen Komponenten. Man sieht, daß man auch diese Entropie in mehrere Glieder zerlegen kann entsprechend den verschiedenen Quantenzuständen. Diese Zerlegung kann übrigens noch weiter getrieben werden, so daß jede Gruppe der zu derselben Zelle gehörenden Atome oder Moleküle irgendeiner Gattung ihre eigene Entropie bekommt. Die Entropie des ganzen Systems wird immer gleich der Summe der Entropien aller Teilsysteme.

Da bei keinen Zustandsänderungen die Atomzahl geändert wird, so geht aus (25) hervor, daß die Größe g bei den Variationen der Entropie immer hinausfällt. Der Wert von g wirkt daher auf die Resultate nicht ein. Die Ausdrücke werden am einfachsten, wenn wir $g = h^3$ setzen, und das wollen wir daher im folgenden tun.

Sind die beiden Atome eines Moleküls gleich, so muß man entweder das Gewicht P_i nur auf die Hälfte aller Richtungen der Molekülachse im Raume beziehen oder auch P_i/σ statt P_i setzen, wo σ die Symmetriezahl bedeutet (vgl. S. 328).

Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit des Systems derjenigen Moleküle, die sich in dem i-ten Quantenzustand

befinden, und deren Schwerpunktskoordinaten und die entsprechenden Impulse zu dem s-ten Variabilitätsbereich ω gehören, setzen wir nach dem Gesagten gleich

$$W_s^{(i)} = \frac{1}{N_s^{(i)}!}\left(\frac{\omega}{h^3}\cdot\frac{P_i}{\sigma}\right)^{N_s^{(i)}} \tag{26}$$

Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit, auf das ganze System bezogen, ist dann gleich dem Produkt aller $W_s^{(i)}$.

Wie man in derselben Weise leicht findet, gilt (26) auch für mehratomige Moleküle. Sind in einem Molekül a-Atome vorhanden, so hat das Molekül $3a-3$ innere Freiheitsgrade. P_i wird dann durch die Festsetzung definiert, daß die apriorische Wahrscheinlichkeit des i-ten Quantenzustandes gleich der eines Phasengebiets der Größe $P_i \cdot h^{3a-3}$ ist. σ hat hier auch andere Werte als 1 und 2.[1])

Setzen wir in (26)

$$N_s^{(i)} = F_s^{(i)} \cdot \omega, \tag{27}$$

und wenden in gewöhnlicher Weise die Formel von Stirling an, so ergibt sich

$$W_s^{(i)} = \left(\frac{e\,P_i}{F_s^{(i)}\,\sigma\,h^3}\right)^{F_s^{(i)}\cdot\omega} \tag{28}$$

und

$$S^{(i)} = k\sum_{(s)} \ln W_s^{(i)} = k\int\left[F^{(i)} - F^{(i)}\ln F^{(i)} + F^{(i)}\ln\left(\frac{P_i}{\sigma h^3}\right)\right]d\omega. \tag{29}$$

Hier ist $S^{(i)}$ die Entropie des Systems der in dem i-ten Quantenzustand befindlichen Moleküle. In dem letzten Ausdruck ist die Summe durch ein Integral ersetzt. Es ist

$$d\omega = dp_1\,dp_2\,dp_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3$$

gleich dem Differentialprodukt der Koordinaten und Impulse des Schwerpunkts. Wir haben ferner statt $F_s^{(i)}$ einfach $F^{(i)}$ gesetzt. Das Integral ist über alle Koordinaten und Impulse des Schwerpunkts auszudehnen.

Die Definition der Entropie können wir auch folgendermaßen ausdrücken. Es seien in jedem Molekül a Atome vorhanden. Dann ist der μ-Raum $6a$-dimensional. Haben N_r Mole-

1) Vgl. P. Ehrenfest u. V. Trkal, a. a. O.

küle ihre Phasenpunkte in der r-ten Phasenzelle ω ($6a$-dimensional!), so ist die entsprechende Teilentropie:

$$S_r = k \ln \left[\frac{1}{N_r!} \left(\frac{\omega}{g^a} \right)^{N_r} \right]$$

oder wenn N_r eine große Zahl ist:

$$S_r = k \ln \left(\frac{e\,\omega}{N_r} \right)^{N_r},$$

wenn wir $g = 1$ setzen. Es sei $\mathfrak{W}_r$ das auf jedes Molekül im Mittel fallende Phasengebiet. Dann ist

$$\mathfrak{W}_r = \frac{\omega}{N_r}$$

und

$$S_r = k N_r \ln \mathfrak{W}_r + k N_r. \tag{30}$$

Summiert man über alle Molekülgruppen, so ergibt sich, wenn das für alle Moleküle berechnete geometrische Mittel von $\mathfrak{W}_r$ mit $\widehat{\mathfrak{W}}$ bezeichnet wird, pro Molekül der Entropiewert

$$\frac{S}{N} = k \ln \widehat{\mathfrak{W}} + k. \tag{31}$$

Das zweite Glied ist ohne Belang, wenn die Molekülzahl nicht geändert wird, kommt aber bei der Berechnung des Dissoziationsgleichgewichts in Betracht.

Hiernach ist ein beliebiges Dissoziationsgleichgewicht leicht zu berechnen. Man sucht in gewöhnlicher Weise das Maximum der totalen Entropie mit den Nebenbedingungen, daß die verschiedenen Atomzahlen, die totale Energie und das Volumen (das Integrationsgebiet) konstant sind. Die Entropie eines Gases mit zusammengesetzten Molekülen ergibt sich aus (29) durch Summation aller $S^{(i)}$, die eines einatomigen Gases aus demselben Ausdruck, wenn man $\frac{P_i}{\sigma} = 1$ setzt.

Das Gemisch bestehe aus einem mehratomigen Gas und den einatomigen Komponenten. Die Verteilungsfunktionen der letzteren bezeichnen wir mit $f_1, f_2, \ldots f_s \ldots$, die Atommassen mit $m_1, m_2, \ldots m_s \ldots$ In einem Molekül des ersteren Gases mögen bzw. $a_1, a_2, \ldots a_s \ldots$ Atome eingehen. Es ist dann die Variation der Entropie

$$S = k \sum_{(s)} \int [f_s - f_s \ln f_s - f_s \ln h^3]\, d\omega$$
$$+ k \sum_{(i)} \int \left[F^{(i)} - F^{(i)} \ln F^{(i)} + F^{(i)} \ln \frac{P_i}{\sigma h^3} \right] d\omega$$

zu bilden mit den Nebenbedingungen, daß die Größen

$$N_s = \int f_s \, d\omega + a_s \sum_{(i)} \int F^{(i)} \, d\omega, \qquad (s = 1, 2 \ldots)$$

$$E = \sum_{(s)} \int \varepsilon f_s \, d\omega + \sum_{(i)} \int (\varepsilon + \varepsilon^{(i)}) F^{(i)} \, d\omega$$

konstant sind. ε bedeutet hier immer die Energie der Translationsbewegung. $\varepsilon^{(i)}$ ist die Energie der inneren Quantenzustände der Moleküle. Sind $k \ln a_s$ und $-1/T$ die Lagrangeschen Multiplikatoren, so ergibt sich

$$f_s = \frac{a_s}{h^3} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

$$F^{(i)} = \frac{a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \ldots P_i}{\sigma h^3} e^{-\frac{\varepsilon^{(i)} + \varepsilon}{kT}}.$$

Bezeichnet man die Zahl der Atome bzw. der Moleküle in der Volumeneinheit mit n_s bzw. n und $n^{(i)}$, so muß hier

$$\frac{a_s}{h^3} = \frac{n_s}{(2\pi m_s k T)^{3/2}}$$

$$\frac{a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \ldots P_i}{\sigma h^3} e^{-\frac{\varepsilon^{(i)}}{kT}} = \frac{n^{(i)}}{(2\pi k T \sum a_s m_s)^{3/2}}$$

sein. Hieraus folgt

$$(32) \qquad \frac{n^{(i)}}{\Pi(n_s^{\alpha_s})} = \frac{(\sum a_s m_s)^{3/2}}{\Pi\left(m_s^{\frac{3\alpha_s}{2}}\right)} \cdot \left(\frac{h^2}{2\pi k T}\right)^{3/2 (\Sigma \alpha_s - 1)} \cdot \frac{P_i}{\sigma} e^{-\frac{\varepsilon^{(i)}}{kT}}.$$

Wenn noch andere Gase gegenwärtig sind, so wirkt dies auf das Resultat nicht ein. Aus (32) erhält man beliebige Gleichgewichte. P_i und σ kommen natürlich nur in der Verbindung P_i/σ vor. Man könnte diese Brüche die reduzierten Gewichte nennen.

Wie man sieht, ist im speziellen Falle (32) mit (8) gleichbedeutend.

Setzt man die gefundene Verteilungsfunktion in (29) ein, so erhält man als Entropie des aus N Molekülen bestehenden mehratomigen Gases

$$(33) \qquad \begin{cases} S = \sum S^{(i)} = \dfrac{E}{T} + kN \ln \left[\dfrac{e}{n}\left(\dfrac{2\pi k T}{h^2} \sum a_s m_s\right)^{3/2}\right] \\ \qquad + kN \ln \left(\sum \dfrac{P_i}{\sigma} e^{-\frac{\varepsilon^{(i)}}{kT}}\right), \end{cases}$$

wo E die ganze Energie bedeutet. Es wird mithin die freie Energie

$$(34)\quad \begin{cases} F = -kNT\ln\left[\frac{e}{n}\left(\frac{2\pi kT}{h^2}\sum a_s m_s\right)^{3/2}\right] \\ \qquad -kNT\ln\left(\sum \frac{P_i}{\sigma} e^{-\frac{\varepsilon^{(0)}}{kT}}\right). \end{cases}$$

Durch Differentiation von (33) nach E findet man nämlich, daß T die absolute Temperatur bedeutet.

Zur experimentellen Bestimmung der Quantengewichte.

Formel (3) bezieht sich auf einen einatomigen Dampf in Gleichgewicht mit dem einatomigen Kondensat oder auf einen zweiatomigen Dampf in Gleichgewicht mit dem zweiatomigen Kondensat. Man kann daraus P bestimmen. Es scheint P wenigstens für einatomige Stoffe gleich 1 zu sein.

Kombiniert man (3) mit (11), so berechnet man auch leicht den Druck eines chemisch einfachen zweiatomigen Dampfes über einem einatomigen Kondensat. Man erhält wieder einen Ausdruck der Form (3). Statt m geht die Molekülmasse $2m$ ein und statt P die Größe

$$P' = \frac{2P^2}{P_1}.$$

Hier ist P das Gewicht des Atomzustandes im Kondensat und P_1 das Gewicht des tiefsten Quantenzustandes des zweiatomigen Moleküls. Für Wasserstoff scheint P' gleich 1 zu sein, wenn diese Überlegung darauf angewandt werden kann. Setzt man nach dem Früheren $P = 1$, so müßte dann $P_1 = 2$ oder das entsprechende reduzierte Gewicht gleich 1 sein.

Es liegt nahe, allgemein die Wahrscheinlichkeit eines Quantenzustandes durch die Größe eines gewissen Phasengebiets auszudrücken. Man kann sich z. B. vorstellen, daß im Phasenraume die stabileren Quantenbahnen die Phasenpunkte eines angrenzenden Gebiets auffangen.

Wir denken uns zweiatomige Moleküle und nehmen an, daß die Temperatur nicht höher ist, als daß wir die Schwingungsenergie vernachlässigen können. Der Phasenraum des inneren Zustandes ist dann vierdimensional. Die durch die Quantenbedingungen ausgezeichneten Energieflächen teilen denselben in

Schalen ein. Die der Rotationsquantenzahl i entsprechende Energiefläche schließt das Phasenvolumen[1])

$$(i\,h)^2$$

ein. Das Volumen der innerhalb derselben gelegenen, angrenzenden Schale ist mithin gleich

$$(i\,h)^2 - (i-1)^2 h^2 = (2\,i-1)\,h^2,$$

das der äußeren Schale

$$(2\,i+1)\,h^2.$$

Die entsprechenden Werte der Gewichte wären $2i-1$ bzw. $2i+1$.

Der zweite Wert ist für Wasserstoff von Reiche[2]) geprüft worden, ist aber mit dem gemessenen Verlauf der spezifischen Wärme unvereinbar. Der erste Wert ist meines Wissens nicht geprüft worden, führt aber für gewisse Temperaturen zu einer Rotationswärme, die größer als R ist, und muß daher auch unrichtig sein. Die beste Übereinstimmung mit den Messungen erhält man nach Bohr[3]), Rotszajn[4]) und Reiche, wenn man

$$P_i = 2i \tag{35}$$

setzt. Der Proportionalitätsfaktor ist für die spezifische Wärme ohne Belang. Die Korrespondenz zwischen klassischer und Quantenstatistik führt es aber mit sich, daß für große i $\frac{P_i}{i}$ sich asymptotisch dem Werte 2 nähern muß. Nach (35) ist auch $P_1 = 2$, was mit unserem früheren Resultat übereinstimmt.

Nimmt man an, daß der rotationslose Zustand ($i = 0$) nicht vorkommt, so kann man aus der spezifischen Wärme das Verhältnis zwischen P_2 und P_1 direkt bestimmen. Nach (35) ist das Verhältnis gleich 2, nach den früheren Annahmen 3 bzw. 1,67.

---

1) Vgl. N. Bohr, Abhandlungen über Atombau, S. 143. Braunschweig 1921.

2) F Reiche, Ann. d. Phys. 58. S. 657. 1919.

3) N. Bohr, a. a. O., S. 148.

4) Sophie Rotszajn, Ann. d. Phys. 57. S. 81. 1918.

Ist E_R die Rotationsenergie, C_R die Rotationswärme pro Mol, und setzen wir

$$Q = \sum P_i e^{-\frac{\varepsilon^{(i)}}{kT}},$$

$$\tau = \frac{1}{kT},$$

so wird

$$(36)\quad \begin{cases} E_R = -\dfrac{R}{k} \cdot \dfrac{d \ln Q}{d\tau} = -\dfrac{R}{k} \cdot \dfrac{Q'}{Q}, \\ C_R = \dfrac{R}{k^2 T^2} \cdot \dfrac{QQ'' - Q'^2}{Q^2} \\ \quad = \dfrac{R}{k^2 T^2} \cdot \dfrac{\sum\sum P_i P_k (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(k)})^2 e^{-\frac{\varepsilon^{(i)} + \varepsilon^{(k)}}{kT}}}{\left(\sum P_i e^{-\frac{\varepsilon^{(i)}}{kT}}\right)^2} \quad (i > k). \end{cases}$$

Bei hinreichend tiefer Temperatur sind die ersten Summenglieder groß im Vergleich mit den übrigen. Es ergibt sich daher

$$(37)\quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{C_R}{R} \left(\frac{\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}}{kT}\right)^{-2} \cdot e^{\frac{\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}}{kT}}.$$

Hier kann $\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}$ aus optischen Messungen bestimmt werden. Mit Anwendung der Formel

$$\varepsilon^{(i)} = i^2 \cdot \frac{h^2}{8\pi^2 J},$$

wo J das Trägheitsmoment ist, habe ich die Rechnung für Wasserstoff bei 100° absolut gemacht und angenommen:

$$J = 1{,}90 \cdot 10^{-41},\ ^1) \qquad \frac{C_R}{R} = 0{,}222.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{P_2}{P_1} = 2{,}96.$$

Das Resultat stimmt vollkommen mit der zuerst angenommenen Formel $P_i = 2i - 1$. Um den aus (35) folgenden Wert zu erhalten, muß man einen größeren Wert von J annehmen, nämlich $2{,}09 \cdot 10^{-41}$. Man muß aber in Betracht ziehen, daß der Wert der spezifischen Wärme nicht sehr sicher ist, und dies gilt wohl auch von dem J-Werte.

---

1) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. S. 585. Dritte Aufl. 1922.

Umformung einiger Ausdrücke.

In besonderen Fällen nimmt (9) oder (11) eine einfachere Gestalt an. Bei hinreichend tiefer Temperatur befinden sich beinahe alle Moleküle in dem tiefsten Quantenzustand. Es reduziert sich dann die in den erwähnten Ausdrücken vorkommende Summe auf das erste Glied. Wendet man die Formel auf das System neutrale Atome — freie Elektronen — positive Ionen an, und nimmt man außerdem $P_1 = 1$ an, so erhält man dieselbe Formel, aus der Saha[1]) die Ionisation in den Sternenatmosphären berechnet hat. Für die Gültigkeit der Formel ist erforderlich, daß die Temperatur nicht zu hoch ist.

In anderen Fällen kann man von den Atomschwingungen absehen und die Summe durch ein Integral ersetzen. Hier wie überhaupt bei der Anwendung der Formeln muß man aber folgenden Umstand berücksichtigen. Wenn die Anziehung zwischen den Atomen schneller als nach der umgekehrten dritten Potenz des Abstandes abnimmt, so kann sowohl die Rotations- wie die Schwingungsquantenzahl nicht gewisse Grenzen überschreiten. Ich gedenke demnächst eine nähere Untersuchung einiger hiermit zusammenhängender Fragen zu geben.

Sind φ und ϑ Polarkoordinaten, welche die Richtung der Molekülachse bestimmen, so ist die innere Energie des Moleküls

$$\varepsilon = \frac{J}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) - q,$$

wo J das Trägheitsmoment und $-q$ die potentielle Energie bedeutet. Führen wir die Impulse p_ϑ und p_φ ein, so wird

$$\varepsilon = \frac{p_\vartheta^2}{2J} + \frac{p_\varphi^2}{2J\sin^2\vartheta} - q.$$

Es wird

$$h^3 \sum P_i e^{-\frac{\varepsilon^{(i)}}{kT}} = e^{\frac{q}{kT}} \int\ldots\int e^{-\frac{p_\vartheta^2}{2JkT} - \frac{p_\varphi^2}{2J\sin^2\vartheta\, kT}} d\vartheta\, d\varphi\, dp_\vartheta\, dp_\varphi.$$

Die Rotationsenergie im Exponenten des Integranden kann einen Maximumwert ε_m nicht überschreiten. Wenn J und ε_m als Konstanten angenommen werden, so ist das Integral leicht zu berechnen. Es ergibt sich, wenn man den Wert

1) M. N. Saha, Zeitschr. f. Phys. 6. S. 40. 1921.

$$J = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot s^2 = \mu s^2$$

(s Abstand der Atomzentra) einsetzt:

$$\frac{n}{n_1 n_2} = \frac{4\pi h s^2}{\sigma (2\pi \mu k T)^{1/2}} e^{\frac{q}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}\right). \tag{38}$$

Der Wert von ε_m ist in speziellen Fällen leicht anzugeben. Wenn mit wachsender Entfernung der Atome die Anziehung langsamer als nach der umgekehrten dritten Potenz des Abstandes abnimmt, so ist $\varepsilon_m = q$. Wenn die Anziehung der $r$ten Potenz der Entfernung verkehrt proportional ist ($r > 3$), und wenn außerdem bei Berührung die Atome sich wie harte Kugeln verhalten, so wird $\varepsilon_m = \frac{1}{3}(r-1)q$.[1])

Ist ε_m sehr groß, so verschwindet das entsprechende Glied in (38). Die Gleichgewichtskonstante nimmt den Wert an, den man thermodynamisch aus den von Tetrode, Stern, Ehrenfest und Trkal gegebenen Entropieausdrücken ein- und zweiatomiger Gase erhält.[2])

Die mittlere Rotationsenergie wird, wenn man wieder die Summe durch ein Integral ersetzt:

$$\frac{\int\cdots\int \left(\frac{p_\vartheta^2}{2J} + \frac{p_\varphi^2}{2J\sin^2\vartheta}\right) e^{-\frac{p_\vartheta^2}{2JkT} - \cdots} d\vartheta\, d\varphi\, dp_\vartheta\, dp_\varphi}{\int\cdots\int e^{-\frac{p_\vartheta^2}{2JkT} - \cdots} d\vartheta\, d\varphi\, dp_\vartheta\, dp_\varphi}.$$

Die Integrationsgrenzen sind dieselben wie früher. Es ergibt sich der Wert

$$kT - \frac{\varepsilon_m}{e^{\frac{\varepsilon_m}{kT}} - 1} \tag{39}$$

statt kT. Die mittlere Rotationsenergie kann folglich, wenn ε_m endlich ist, den Gleichverteilungswert nicht erreichen. Das Verhältnis unseres Wertes zu kT nähert sich mit steigender Temperatur dem Werte Null. Die mittlere Rotationsenergie selber nähert sich asymptotisch dem Werte $\varepsilon_m/2$.

Das zweite Glied von (39) hat, vom Vorzeichen abgesehen, dieselbe Form wie der Plancksche Ausdruck der mittleren

1) Die Formeln (38) und (39) beziehen sich nicht auf diesen Fall.
2) Vgl. S. 321, 322 und 328.

Energie eines Oszillators. Das Glied kommt jedoch nicht als Resultat einer Quantelung heraus. Bei der Berechnung desselben ist im Gegenteil die unstetige Verteilung der Energiewerte durch eine stetige ersetzt.

Bezüglich der Formeln (38) und (39) muß hervorgehoben werden, daß sie nicht bei tiefen Temperaturen gelten können. Hier ist die Integration nicht zulässig. Bei hohen Temperaturen sind sie aber im allgemeinen auch nicht gültig. Hier muß die Schwingungsenergie berücksichtigt werden.

In gewöhnlichen Gasen muß man zufolge der Kohäsionskräfte eine Assoziation erwarten. Bei hinreichend kleinen Dichten kommen praktisch nicht Aggregate von mehr als zwei Molekülen vor. Die Zahl der Aggregate kann man dann bei einatomigen Gasen nach Formel (11) berechnen.

Auf Grund der Kleinheit der potentiellen Energie wirkt es hier relativ sehr stark auf die Verhältnisse ein, ob $P_0 = 0$ ist oder nicht. Im letzten Falle wird die Assoziation unter Umständen bedeutend größer.

Ist $P_0 = 0$, so ist die kleinste Rotationsenergie, die vorkommen kann, gleich $h^2/8\pi^2 J$. Soll Assoziation überhaupt vorkommen, so muß diese Größe kleiner als ε_m sein. Nun nimmt im großen q und mithin ε_m mit abnehmendem Molekulargewicht ab. Dasselbe gilt von J. Bei den leichteren Elementen könnte es demnach vorkommen, daß zufolge der erwähnten Bedingung die Assoziation unmöglich wird. Die Einsetzung der Zahlenwerte zeigt, daß dies höchstens bei Helium und Wasserstoff der Fall sein kann, wahrscheinlich aber auch nicht hier.

(Eingegangen 14. Mai 1923.)

2. *Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen. II. Fortsetzung und Schluß*[1]*;*

von Carl Ramsauer.

Die in Teil II ausgesprochene Absicht, die Untersuchung auf die noch fehlenden Edelgase Krypton und Xenon auszudehnen, konnte jetzt infolge weitgehenden Entgegenkommens der technischen Physik zur Ausführung gebracht werden. Für das Krypton spreche ich der Badischen Anilin- und Sodafabrik, besonders Hrn. Dr. Hochheim, für das Xenon der Aktiengesellschaft Julius Pintsch, besonders Hrn. Dr. Schröter, meinen herzlichsten Dank aus.

Beide Proben waren von durchaus genügender Reinheit. Für das Krypton kommen nur zu vernachlässigende Beimengungen von X und Spuren von Kohlenwasserstoffen, für das X schätzungsweise 0,1 Proz. Kr und vielleicht etwas CO_2 in Frage. Da sich bei den vorliegenden Untersuchungen die Wirkungen zweier Gase lediglich addieren, wie in Teil II an der Kombination O_2 und A näher nachgewiesen ist, so sind diese geringen Beimengungen außerstande, Merkmale, welche den reinen Gasen nicht zukommen, vorzutäuschen oder auch nur den Verlauf der aufgenommenen Kurven merklich zu beeinflussen.

Die Meßmethoden und Kontrollmaßnahmen sind durchweg die gleichen geblieben, wie in Teil II, obgleich die ganze Meßanordnung infolge meiner Übersiedlung nach Danzig neu

---

1) Vgl. Ann. d. Phys. 64. S. 513—540. 1921; 66. S. 546—558. 1921. (Im weiteren Texte kurz als Teil I und Teil II angeführt.)

aufgebaut werden mußte. Die Herstellung des Vakuums erfolgte mit einem aus Diffusionspumpe und Dampfstrahlpumpe bestehenden Aggregat, die Kühlung in der Hauptsache mit flüssiger Luft, bei einigen Kontrollversuchen mit fester CO_2 in Alkohol.[1])

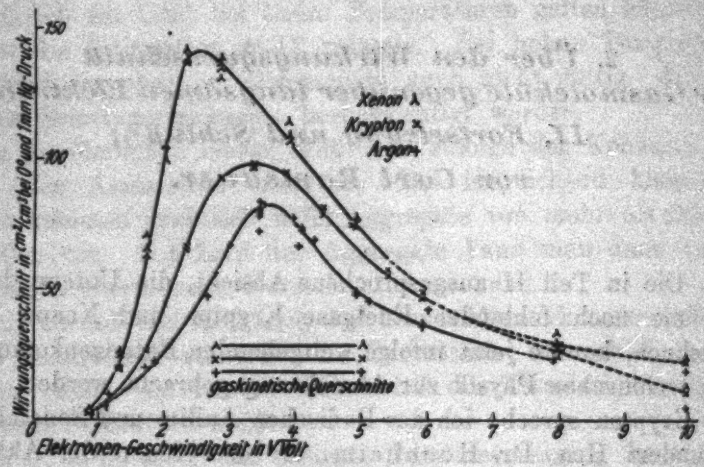


Fig. 1.

Die gesamten Versuchsergebnisse sind in der folgenden Kurvendarstellung (Fig. 1) niedergelegt. Die *A*-Kurve des Teils II ist wieder eingezeichnet, mit der Erweiterung bis 64 Volt und

1) Diese Kontrolle sollte einen etwaigen, allerdings sehr unwahrscheinlichen Einfluß der Kühlung auf das X feststellen. Das X zeigte nämlich ganz am Schluß der etwa eine Woche andauernden Messungsreihe plötzlich bei der Temperatur der flüssigen Luft kondensationsartige Erscheinungen mit einer annähernden Druckkonstanz von etwa 0,008 mm, nachdem es sich vorher bis zu Drucken von 0,08 mm als Gas benommen hatte, wie auch entsprechend dem Dampfdruck von rund 0,4 mm (berechnet nach Henglein, Zeitschr. f. Elektrochemie 1920, S. 481) zu erwarten gewesen war. Die Kontrolle ergab jedoch durchaus die gleichen Werte für folgende drei Fälle: Kühlung mit flüssiger Luft bei dampfartigem Verhalten des X, Kühlung mit flüssiger Luft bei gasartigem Verhalten des X und Kühlung mit fester CO_2 in Alkohol. Es handelte sich offenbar um eine Adsorptionserscheinung an der Glaswand, vielleicht in Verbindung mit der steigenden Kondensation von Hg- und sonstigen Dämpfen, ohne daß hierdurch die gasförmige Phase irgendwie beeinflußt wurde. Bei Kr und A kommen derartige Erscheinungen infolge des höheren Dampfdrucks überhaupt nicht in Frage.

mit der Wiederholung einiger Punkte zum Anschluß des Meßverfahrens an Teil II. Die Kontrollpunkte fallen durchweg in den Verlauf der Kurve, namentlich wurde auch die Lage des Maximums durchaus bestätigt[1]); nur der Punkt für 36 Volt, welcher schon bei den früheren Messungen aus dem Kurvenzuge herausfiel, erwies sich als tatsächlich merklich tiefer liegend.

Bei der Diskussion der Kurven sind drei Hauptgebiete zu unterscheiden:

1. *Das Gebiet des Kurvenanstiegs.* Auch Kr und X zeigen die von mir gefundene abnorme Durchlässigkeit des A für die geringsten benutzten Elektronengeschwindigkeiten — die beobachteten Werte gehen bis unter $^1/_7$ der zugehörigen gaskinetischen Querschnitte herunter! — und den darauffolgenden steilen Anstieg. Es wurde viel Mühe darauf verwandt, den Anfangsverlauf der Kurven genau festzulegen, infolge der sehr großen experimentellen Schwierigkeiten bleibt hier aber eine gewisse Unsicherheit bestehen. Von diesen zahlreichen Messungen sind der Übersichtlichkeit wegen für jedes Gas nur die tiefsten überhaupt gefundenen Punkte eingetragen; der Kurvenverlauf ist in diesem Bereich punktiert gezeichnet. Was speziell die gegenseitige Lage der Kurven zueinander betrifft, so verläuft die *X*-Kurve jedenfalls bis zur Grenze der Messungen oberhalb der beiden anderen Kurven, ob dagegen die *Kr*-Kurve entsprechend dauernd oberhalb der *A*-Kurve bleibt, ist nicht ganz einwandfrei zu entscheiden. Eine Extrapolation der Kurven über die letzten Meßwerte hinaus ist noch weniger möglich; trotz sorgfältiger Prüfung aller gefundenen Werte finden sich keinerlei bestimmte Andeutungen, ob die Kurven nach *O* hinzielen oder sich nach Durchlaufung eines Minimums wieder heben. Es

---

1) Die von Hrn. Hertz nach einer relativen Methode ermittelte Voltzahl des Maximums — rund 10 — ist daher jedenfalls zu gering (vgl. G. Hertz, Over de gemiddelde weglengte von langzaam loopende electronen in neon en argon; Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Verslag van de Gewone Vergaderingen der Wis-en Natuurkundige Afdeeling, Deel XXXI, Nos. 3 en 4). Sie widerspricht übrigens auch den mit meinen Messungen übereinstimmenden Werten Hrn. H. F. Mayers von 12—13 Volt (Ann. d. Phys. 64. S. 471. 1921), obgleich die Mayersche Methode der Hertzschen viel näher steht als der meinigen.

wird zurzeit versucht, diese Frage in wesentlich anderer Art zu behandeln, da die hier benutzte Methode bei etwa 0,75 Volt Elektronengeschwindigkeit an der Grenze ihrer Leistungsfähigkeit angelangt ist.

2. *Das Gebiet des Kurvenmaximums.* Kr und X zeigen auch in dieser Beziehung ein gleichartiges Verhalten wie A. Die folgende Tabelle gibt eine zahlenmäßige Übersicht:

Gas	Ordnungszahl	Lage des Maximums in Volt	maxim. Wirkungsquerschnitt / gaskinet. Querschnitt[1])
A	18	13,2	4,4
Kr	36	11,3	4 2
X	54	6,4	4,9

Mit steigender Ordnungszahl rücken also die Maxima nach kleineren Elektronengeschwindigkeiten hin und nehmen gleichzeitig an absoluter Größe zu; den gaskinetischen Querschnitten gegenüber zeigen alle drei Gase annähernd die gleiche Verhältniszahl.

3. *Das Gebiet des Kurvenabfalls.* Der Verlauf der Kurven vom Maximum bis etwa 36 Volt bei A und Kr und bis mindestens 25 Volt bei X ist durch zahlreiche Punkte einwandfrei festgelegt. Die drei Kurven verlaufen ziemlich parallel in der Reihenfolge der Ordnungszahlen übereinander.

Der darauffolgende weitere Abfall bedarf dagegen einer eingehenden Erörterung. Die Erklärung der beobachteten Erscheinungen ist allerdings nicht restlos befriedigend, die Erscheinung selbst tritt aber experimentell so eindeutig hervor, daß ich sie nicht übergehen möchte, obgleich man die ganze Untersuchung ruhig wie im Teil II bei etwa 36 Volt abschließen könnte. Die Fortsetzung der Messungen bis 100 Volt ergab für alle drei Gase ein starkes Ansteigen des „Wirkungsquerschnitts“ mit dem benutzten Gasdruck, während bis 36 Volt kein derartiger Fall beobachtet werden konnte, und

1) Q_t corr. Landolt und Börnstein, 1912.

während besondere Versuche (Teil II, S. 555) die völlige Unabhängigkeit des maximalen Wirkungsquerschnitts von Druck in weiten Grenzen bewiesen hatten. Die betreffenden Werte für X sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; die Stoßzahl ist berechnet für den Gesamtweg entsprechend dem gaskinetischen Querschnitt des X.

Volt	Druckgebiet mm/10000	Stoßzahl	„Wirkungsquerschnitt“
64	0—107	2,0	24,6
	0—208	4,0	27,5
	0—220	4,2	29,9
	107—365	6,9	33,7
100	0— 77	1,5	13,2
	0—152	2,9	13,3
	0—184	3,5	13,3; 11,5
	0—320	6,1	13,8; 13,8
	320—628	11,9	24,0

Die Erscheinung hängt wahrscheinlich mit der endlichen Größe des Strahlquerschnitts zusammen, nämlich derart, daß bei der benutzten Geschwindigkeit schon häufigere Ablenkungen infolge von Diffusion und Geschwindigkeitsverlust vorkommen, welche zu schwach sind, um in der Mehrzahl der Fälle bei ihrem *einmaligen* Auftreten das Elektron aus dem Strahlenbündel auszuscheiden, und daher erst bei mehrmaligem Auftreten, d. h. bei höheren Drucken zu wirken beginnen. Das Anfangen dieser Ablenkungen zeigt sich übrigens auch in der mit steigender Geschwindigkeit immer mehr wachsenden Verbreiterung der Verteilungskurve bei Einführung des Gases, während die Verteilungskurve bei 12 Volt noch so gut wie gar nicht vom Gase beeinflußt wird (Teil II, S. 556).

Wenn diese Schlußfolgerungen richtig sind[1]), so würde

1) Die in diesem Gebiet ebenfalls immer stärker werdende Sekundärstrahlung für Gas und Metall spielt keine merkliche Rolle, da die Auffangung der Elektronen in Faradayschen Käfigen erfolgt, und da außerdem experimentell gezeigt werden konnte, daß die mehr oder minder großen Aufladungen der Käfige ohne Einfluß auf die maßgebenden Verhältniszahlen waren.

also von etwa 36 Volt an bei der benutzten Versuchsanordnung die logische Unterscheidung zwischen dem gesamten Wirkungsquerschnitt und dem absorbierenden Querschnitt diejenige praktische Bedeutung gewinnen, welche im Beginn der ganzen Arbeit (Teil I) vergeblich für weit geringere Geschwindigkeiten gesucht worden war. Mit anderen Worten: bei etwa 36 Volt Elektronengeschwindigkeit teilt sich der bisher identische Verlauf des gesamten Wirkungquerschnitts und des absorbierenden Querschnitts merklich[1]) in einen höher verlaufenden und einen tiefer verlaufenden Zweig, entsprechend dem gesamten Wirkungsquerschnitt und dem nur einen Teil desselben bildenden absorbierenden Querschnitt. Dies ist der Übersichtlichkeit wegen nur für die *Kr*-Kurve veranschaulicht, wobei — allerdings ohne quantitative Berechtigung — die kleinsten gefundenen Werte als absorbierende Querschnitte und die größten gefundenen Werte als gesamte Wirkungsquerschnitte genommen worden sind; für A und X sind bei der Geschwindigkeit 100 Volt lediglich die gefundenen Extremwerte eingetragen. (Die wirkliche Berechnung der beiden Querschnitte würde eine *sehr* weitgehende Diskussion der geometrischen Verhältnisse der ganzen Methode verlangen, wie sie schon bei wesentlich einfacherer Sachlage zu erheblichen Komplikationen führt.[2]) Diese ganze Entwicklung beginnt übrigens bei den drei Gasen für verschiedene Geschwindigkeiten: bei 64 Volt zeigt A die Erscheinung noch nicht, Kr andeutungsweise und X bereits in ausgeprägtem Maße; demgemäß ist der Kurvenlauf bei X am frühesten, schon unterhalb 36 Volt, bei A am spätesten durch Punktierung als nicht mehr eindeutig gekennzeichnet.[3])

---

1) Die in der Verbreiterung der Verteilungskurven liegende Andeutung für diese Trennung setzt schon früher, schätzungsweise bald nach Überschreitung der Kurvenmaxima, ein.

2) Vgl. C. Ramsauer, Über eine direkte magnetische Methode zur Bestimmung der lichtelektrischen Geschwindigkeitsverteilung. Ann. d. Phys. 45. S. 988 ff. 1914.

3) Diese Reihenfolge der Gase entsprechend ihrem Molekulargewicht steht durchaus im Einklang mit den von Hrn. Lenard entwickelten Anschauungen über die Diffusion der Kathodenstrahlen, Heidelberger Ak. d. Wiss. 1918. 5. Abh., Abschnitt VII, besonders S. 206. (*„Es gibt daher jedes einzelne Molekül um so mehr Strahlkrümmung bei einer Durchquerung, je schwerer es ist.“*)

Zur Vermeidung von Mißverständnissen möge nochmals hervorgehoben werden, daß der Verlauf der Kurven bis mindestens 30 Volt, dessen Ermittlung die Hauptaufgabe der vorliegenden Untersuchung war, völlig eindeutig und sichergestellt ist und in keiner Weise von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieser mehr qualitativen Betrachtungen abhängt.

Zusammenfassung der Versuchsergebnisse für Teil I—III:

1. Es werden Methoden angegeben, um bei einheitlichen, magnetisch definierten Elektronengeschwindigkeiten den gesamten Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen als Funktion der Elektronengeschwindigkeit absolut zu bestimmen (Teil I und II).

2. Der gesamte Wirkungsquerschnitt und der absorbierende Querschnitt fallen bei den in dieser Beziehung untersuchten Gasen (H_2, N_2, He, A) für kleinste Geschwindigkeiten zusammen (Teil I und II). [Dagegen sind Andeutungen vorhanden, daß sich diese beiden Größen für A, Kr und X zwischen 30 und 70 Volt schon deutlich zu trennen beginnen, und zwar um so früher, je höher die Ordnungszahl ist (Teil III).]

3. *Alle* Edelgase (He, Ne, A, Kr, X) zeigen gegenüber den sonstigen bisher untersuchten Gasen (wie H_2, N_2, CO_2) die gemeinsame Eigentümlichkeit, daß der Wirkungsquerschnitt mit abnehmender Elektronengeschwindigkeit ein Maximum erreicht und dann wieder abfällt.

4. Die Edelgase A, Kr, X zeigen die unter 3 gekennzeichnete Eigentümlichkeit in zweifacher Beziehung besonders stark ausgeprägt: der Wirkungsquerschnitt steigt im Maximum auf das 4 bis 5 fache des gaskinetischen Querschnitts und sinkt bei dem kleinsten untersuchten Geschwindigkeitswert von etwa 0,75 Volt auf unter $^1/_7$ des gaskinetischen Querschnitts herab. (Über den weiteren Verlauf unterhalb 0,75 Volt läßt sich nichts Bestimmtes aussagen.)

5. Die Edelgase Ne, A, Kr, X zeigen in bezug auf Lage und Höhe ihrer Maxima einen ausgesprochenen *Gang*: mit steigender Ordnungszahl (10; 18; 36; 54) wächst das Maximum absolut genommen stark an (Wirkungsquerschnitt in cm^2/cm^3

für 0° und 1 mm Hg = 13; 82; 98; 141) und rückt außerdem zu immer kleineren Elektronengeschwindigkeiten hin ($Volt_{max.}$ = 25; 13,2; 11,3; 6,4).

Zum Schlusse möchte ich nicht versäumen, auch an dieser Stelle der Helmholtzgesellschaft für die Überlassung der notwendigen Apparate und dem Japanausschuß der Notgemeinschaft für Gewährung der laufenden Mittel meinen besten Dank auszusprechen.

Danzig, im April 1923.

(Eingegangen 26. April 1923.)

3. Über die Beugungserscheinungen bei sphärischer Aberration;

von Johannes Fischer.

(Gekürzte Münchener Dissertation.)

Einleitung.

In einem mit sphärischer Aberration behafteten Bündel bilden die Strahlen das Normalensystem einer Rotationsfläche oder einer Zylinderfläche, je nachdem das Bündel räumlich oder eben ist. Im folgenden beschränken wir uns auf den ebenen Fall, wie er etwa in sphärisch nicht korrigierten Zylinderlinsen verwirklicht ist. Zur Berechnung der Intensität ist eine bestimmte Annahme über die Wellenfläche nötig; wir nehmen einen parabolischen Zylinder an, da sich eine beliebige zylindrische Wellenlänge für nicht zu große Öffnung des Bündels durch den oskulierenden parabolischen Zylinder ersetzen läßt. Weiterhin setzen wir das einfallende Bündel als symmetrisch zu einer Achse voraus; Brennlinie wird dann die Evolute der Parabel, die einfachste Kurve mit Spitze; da sie von der dritten Klasse ist, gehen durch einen ihrer inneren Punkte höchstens drei Strahlen des Bündels, von denen zwei zusammenfallen, wenn der Aufpunkt sich der Brennlinie nähert.

Vom Gesichtspunkt der Beugung aus hat als erster G. Airy[1]) die Intensitätsverteilung in der Nähe eines regulären Bogens einer Brennlinie bei weit geöffnetem Bündel berechnet. Lord Rayleigh[2]) und Mascart[3]) haben die Airyschen Rechnungen erweitert auf den Fall einer endlichen Öffnung des Bündels und stellen Ausdrücke für die Intensitäts-

1) G. Airy, Trans. of the Cambr. Phil. Soc., T. VI, Part III, p. 379. 1838; T. VIII, Part V, p. 593. 1848.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 8. p. 403ff. 1879 oder Scientific Papers Vol. I, p. 428ff.

3) E. Mascart, Traité d'optique 1. p. 407. Paris 1889.

verteilung in der Brennebene eines Bündels auf, die senkrecht zur Achse durch die Spitze einer Brennlinie gezogen ist.

Eine zusammenfassende Theorie aller Linsenfehler hat K. Strehl[1]) gegeben. Die von ihm aufgestellten Entwicklungen nach Besselschen Funktionen, die zur Intensitätsverteilung bei sphärisch nicht korrigierten Zylinderwellen führen, sind wegen zu langsamer Konvergenz zu numerischen Rechnungen wenig geeignet.

Nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit wurde mir eine Arbeit von L. Brillouin[2]) bekannt, der im wesentlichen denselben Gegenstand nach der auch von uns benutzten Methode der Sattelpunkte behandelt; numerische Rechnungen fehlen bei Brillouin völlig.

Zur Rechtfertigung der vorliegenden erneuten Behandlung der Beugung bei sphärisch nicht korrigierten Systemen sei außer auf die ausgedehntere zahlenmäßige Auswertung der Ergebnisse vor allem auf die zur Anwendung kommende Methode verwiesen.

Zunächst wird (in § 1) auf Grund des Huygensschen Prinzips in der Kirchhoffschen Fassung ein in der ganzen Ebene gültiger Ausdruck für den Lichtvektor aufgestellt. Die Ableitung schließt sich an eine Arbeit von Debye[3]) an: der das Lichtbündel begrenzende Schirm wird in unendliche Entfernung verlegt, wodurch die Rechnung nicht nur einfacher, sondern auch strenger wird. Die Diskussion des erhaltenen Integrals erfolgt auf dem Wege, der allein der Eigenart der zu diskutierenden Funktion angepaßt ist: wir lassen die Integrationsvariable komplexe Werte annehmen und deformieren den Integrationsweg so, daß er möglichst lange durch solche Gebiete geht, in denen der Integrand exponentiell verschwindet; es bleibt dann das Integral lediglich in der Nähe einzelner Punkte, der Sattelpunkte, auszuwerten (§ 2—4). Riemann[4])

1) K. Strehl, Theorie des Fernrohrs auf Grund der Beugung des Lichts, I. Teil, Leipzig 1894; Einführung in die beugungstheoretische Optik, Berlin 1907; ferner zahlreiche Arbeiten, besonders in der Zeitschr. für Instrumentenkunde und in der Zentralzeitung für Optik u. Mechanik.

2) L. Brillouin, Ann. scient. de l'école normale supérieure, T. 33, p. 17. 1916.

3) P. Debye, Ann. d. Phys. 30. S. 755. 1909.

4) B. Riemann, Ges. math. Werke, S. 400. Leipzig 1876.

hat zuerst diese Methode gelegentlich einmal verwendet; unabhängig von ihm hat sie Debye[1]) benutzt zur Ableitung von halbkonvergenten Entwicklungen für die Zylinderfunktionen.

Es ist bemerkenswert, daß den Sattelpunkten der komplexen Ebene gerade *die* geometrischen Lichtstrahlen entsprechen, die in der Einfallsebene des Lichtes durch den Aufpunkt hindurchgehen, und den Integralen über die Sattelpunkte *die* Lichtbewegung, wie sie sich nach den Gesetzen der geometrischen Optik ergibt, wenn nur der Aufpunkt nicht in nächster Nähe der Brennlinie liegt (§ 5). Zu beachten ist dabei, daß die geometrischen Strahlen, die bis zum Eintreffen im Aufpunkt die Brennlinie bereits passiert haben, mit einer Phasenbeschleunigung von $\pi/2$ zu versehen sind. Man erhält also für Aufpunkte, die nicht zu nahe der Brennlinie liegen, die Lichtbewegung einfach dadurch, daß man die durch den Aufpunkt gehenden geometrischen Strahlen, event. unter Berücksichtigung der Phasendifferenz $\pi/2$, zur Interferenz bringt. Diese Methode hat Mascart[2]) ohne nähere Begründung zur Berechnung des Regenbogens und der überzähligen Bogen verwendet. Auch Möbius[3]) wendet sie neben der graphischen Integration auf dasselbe Problem an und berechnet in einer anderen Arbeit[4]) die Phasenverzögerung für beliebige Wellenflächen.

Diese Phasenverzögerung entspricht dem von Gouy[5]) theoretisch gefundenen und experimentell bestätigten „anomalen Verhalten" der Phase beim Durchgang des Lichtes durch Brennpunkte. Sie ist aber auch ohne Beugungstheorie verständlich, wenn man von der der geometrischen Optik entsprechenden unstetigen Lösung der optischen Differentialgleichung ausgeht. Fassen wir nämlich die den Kreiszylinderwellen (für nicht zu kleine r) entsprechende Lösung

$$\sqrt{\frac{2}{\pi k r}}\, e^{ikr - i\frac{\pi}{4}}$$

1) P. Debye, Math. Ann. 67. S. 535. 1909; Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. 1910. S. 3.

2) E. Mascart, Traité d'optique 1. p. 398. Paris 1889.

3) W. Möbius, Ann. d. Phys. 33. S. 1493. 1910.

4) W. Möbius, Ann. d. Phys. 33. S. 79. 1910.

5) L. G. Gouy, Compt. rend. 110. p. 1251. 1890; 111. p. 33 u. 910. 1890; Ann. de Chim. et Phys. 24. p. 145. 1891.

als Quelle im Nullpunkt auf, so haben wir keinen Grund, irgendeine Richtung von r von der entgegengesetzten zu unterscheiden, das Vorzeichen von r wird für alle Richtungen das gleiche positive sein. Nehmen wir dagegen an, daß einfallendes Licht, das in größerer Entfernung durch obigen Ausdruck dargestellt ist, in den Brennpunkt $r = 0$ konzentriert wird, so hat man offenbar das Vorzeichen von r zu berücksichtigen, aber nicht nur im Exponenten, sondern auch im Amplitudenfaktor; dies gibt aber einen Faktor $e^{i\frac{\pi}{2}}$, den Gouy und andere Autoren als „anomale Phasenänderung" ansprechen. Im Falle der Kugelwellen wurde als „Phasensprung" π gefunden[1]); ersetzen wir r in $\frac{e^{ikr}}{r}$ durch $-r$, so erhalten wir in der Tat das negative Zeichen, d. h. einen Faktor $e^{i\pi}$.

Die einfache Superposition der geometrischen Lichtstrahlen ist in nächster Nähe der Brennlinie nicht mehr zulässig. Die in diesem Fall auftretenden Beugungserscheinungen werden in § 6 diskutiert. Die Intensitätsverteilung in der Brennebene und auf der Achse des Bündels ist in § 7 und 8 berechnet.

Alle diese Entwicklungen gelten zunächst nur für Lichtbündel von einer Öffnung von 180°; in § 9 ergibt sich, daß der beugende Einfluß der geradlinigen Begrenzung des Bündels auf den Lichtvektor von höherer Ordnung mit abnehmender Wellenlänge verschwindet, wenn nur der Aufpunkt nicht in zu großer Nähe der Randstrahlen liegt. Unter dieser Voraussetzung gelten also die Entwicklungen der früheren Paragraphen auch für Bündel endlicher Öffnung. Die Beugungserscheinungen beim Übergang über die Randstrahlen werden durch Fresnelsche Integrale wiedergegeben.

§ 1. Ableitung aus dem Huygensschen Prinzip.

Wir beschränken uns auf periodische Zustände von der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{\nu}$ sec und setzen daher den Lichtvektor an als reellen Teil von $e^{i\nu t}\mathfrak{P}$, wo $\mathfrak{P}$ nur noch Funktion des

1) Vgl. z. B. P. Debye, Ann. d. Phys. 30, S. 772. 1909.

Ortes ist, die überdies von z unabhängig sein soll und der Differentialgleichung

$$\Delta \mathfrak{P} + k^2 \mathfrak{P} = 0 \tag{1}$$

$\left(k = \frac{\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ genügen muß.

Sind nun längs einer in sehr großer Entfernung vom Nullpunkt der XY-Ebene verlaufenden geschlossenen Kurve mit der äußeren Normalen n $\mathfrak{P}$ und $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial n}$ vorgegeben, so ergibt sich für einen inneren Punkt dieser Kurve $\mathfrak{P}$ in bekannter Weise aus dem Greenschen Satze: Wir setzen für die eine der im Greenschen Satz vorkommenden Funktionen den Lichtvektor $u = \mathfrak{P}$, für die andere Funktion v diejenige Lösung von (1), die vom Aufpunkt P nach dem Unendlichen divergierende Kreiszylinderwellen darstellt, die zweite Hankelsche Funktion nullter Ordnung

$$v = H_0^{(2)}(kR);$$

dabei bedeutet (Fig. 1) R den Abstand des Integrationspunktes vom Aufpunkt. $H_0^{(2)}$ verhält sich[1]) für kleine Werte des Arguments wie $-\frac{2i}{\pi} \log kR$, für große Werte wie

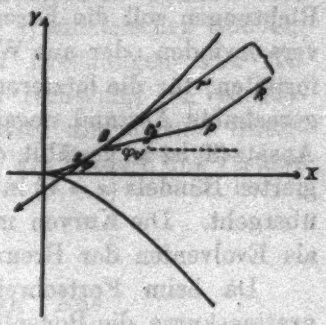


Fig. 1.

$$\sqrt{\frac{2}{\pi k R}}\, e^{-i\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Das Integral über den die singuläre Stelle $R = 0$ von $H_0^{(2)}(kR)$, d. h. den Aufpunkt umschließenden Kreis mit verschwindendem Radius liefert dann $4i\mathfrak{P}$. Die Greensche Gleichung lautet also

$$4i\mathfrak{P} = \int \left(\mathfrak{P} \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(kR) \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial n}\right) d\sigma. \tag{2}$$

Das Lichtbündel möge nun aus Richtung der $+X$-Achse einfallen und eine Brennlinie umhüllen, deren Spitze wir als Koordinatenanfangspunkt nehmen. Als Integrationskurve

1) Vgl. N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904.

nehmen wir eine in großer Entfernung vom Nullpunkt verlaufende Linie konstanter Phase. Auf ihr sei für *die* Einfallswinkel φ, für die $-\alpha < \varphi < +\alpha$, das einfallende Licht gegeben durch

$$\mathfrak{P} = \sqrt{\frac{2}{\pi k r'}}\, e^{i k (r' + s) - i \frac{\pi}{4}}, \tag{3}$$

wo (vgl. Fig. 1) r' den auf dem Lichtstrahl gemessenen Abstand des Integrationspunktes vom Schnittpunkt mit dem unendlich benachbarten Strahl, d. h. vom Berührungspunkt B mit der Brennlinie, s die Bogenlänge der Brennlinie von der Spitze bis zu diesem Berührungspunkt bedeutet. Für alle anderen Richtungen soll die Erregung von höherer Ordnung wie $r'^{-1/2}$ verschwinden oder aus Wellen bestehen, die von der Brennlinie forteilen; für die letzteren ist r' als der von der Brennlinie aus gerechnete Abstand negativ zu rechnen (vgl. Einleitung). Der Ansatz (3) ist so gewählt, daß er für den Fall des sphärisch korrigierten Bündels ($s = 0$) in den für Kreiszylinderwellen geltenden übergeht. Die Kurven mit der Gleichung $r' + s = \text{Const}$ sind als Evolventen der Brennlinie die Linien konstanter Phase.

Da beim Fortschreiten auf der Normalen r' der Integrationskurve die Bogenlänge s der Brennlinie sich nicht ändert und da r' als groß vorausgesetzt ist, dürfen wir setzen

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial n} = i k \sqrt{\frac{2}{\pi k r'}}\, e^{i k (r' + s) - i \frac{\pi}{4}},$$

$$R = r' - r_0' \cos(\varphi_0' - \varphi),$$

$$\frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial n} = -i k \sqrt{\frac{2}{\pi k r'}}\, e^{-i k [r' - r_0' \cos(\varphi_0' - \varphi)] + i \frac{\pi}{4}}.$$

Da ferner $d\sigma = r'\, d\varphi$, so folgt durch Einsetzen in (2), daß sich die beiden Glieder unter dem Integralzeichen für die Wellen, die das geschlossene Gebiet verlassen, aufheben, für die einfallende Erregung dagegen addieren. So ergibt sich die in der ganzen Ebene geltende Darstellung

$$\pi \mathfrak{P} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{i k [r_0' \cos(\varphi_0' - \varphi) + s]}\, d\varphi. \tag{4}$$ [1])

1) Dieser Ausdruck ist bereits bei Debye angegeben, a. a. O., S. 775.

Sind x, y die Koordinaten des Aufpunktes P, x_0, y_0 die des Punktes B der Brennlinie, so wird

$$r_0' \cos(\varphi_0' - \varphi) = x \cos\varphi + y \sin\varphi - (x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi),$$

also

$$(4') \qquad \pi \mathfrak{P} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{i k [x \cos\varphi + y \sin\varphi - (x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - s)]} d\varphi.$$

Werden x_0, y_0, s als Funktionen der Integrationsvariablen φ ausgedrückt, so stellt (4') die Lichtbewegung im Aufpunkt x, y dar.

Über die Gestalt der Brennlinie oder Wellenfläche haben wir bisher keine Voraussetzung gemacht; nun befindet sich unter den Wellenflächen eines ebenen symmetrischen Bündels, das beliebig vielen zweidimensionalen Brechungen und Reflexionen unterworfen war, in dritter Näherung ein parabolischer Zylinder. Wir spezialisieren daher die folgende Untersuchung dahin, daß wir als Brennlinie die Evolute der Parabel annehmen, deren Gleichung lautet

$$y_0^2 = \frac{8}{27 p} x_0^3,$$

wobei p der Parameter der Parabel ist. Aus

$$\frac{d y_0}{d x_0} = \sqrt{\frac{2 x_0}{3 p}} = \operatorname{tg} \varphi$$

folgt

$$(5) \qquad x_0 = \frac{3}{2} p \operatorname{tg}^2 \varphi, \qquad y_0 = p \operatorname{tg}^3 \varphi,$$

und hieraus

$$(5') \qquad s = \frac{p}{\cos^3 \varphi} - p.$$

Daher wird

$$x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - s = -\frac{p}{2} \frac{(1 - \cos\varphi)^3}{\cos\varphi}.$$

Für kleine Einfallswinkel φ wird diese „sphärische Aberration", wenn wir Glieder sechster und höherer Ordnung vernachlässigen, gleich $-\frac{p}{8} \varphi^4$. $\mathfrak{P}$ unterscheidet sich daher für kleine p und kleine α nicht von dem Lichtvektor im Fall der Kreiszylinderwellen ($p = 0$). Nehmen wir z. B. $kp = 10^4$, was etwa $p = 1$ mm entspricht, und $\alpha = \frac{1}{20}$, so wird für die Rand-

strahlen des Bündels das von der Aberration herrührende Glied $-\frac{1}{128}$, kann also vernachlässigt werden. Die Intensitätsverteilung ist also für diesen Fall dieselbe wie die von Debye für Kreiszylinderwellen derselben Öffnung berechnete.[1])

§ 2. Die komplexe φ-Ebene.

Der Exponent unter dem Integralzeichen in (4') hängt ab außer von der Integrationsvariablen φ noch von dem in Wellenlängen gemessenen Parameter der Parabel $kp = 2\pi\frac{p}{\lambda}$ und von den ebenfalls in Wellenlängen gemessenen Koordinaten des Aufpunktes

$$kx = 2\pi\frac{x}{\lambda}, \qquad ky = 2\pi\frac{y}{\lambda}.$$

Im folgenden werden wir nur die Abhängigkeit des Exponenten von φ zum Ausdruck bringen. Wir berechnen die Ableitungen des Exponenten, den wir mit $w(\varphi)$ bezeichnen, nach der Integrationsvariablen:

$$(6)\quad \begin{cases} w(\varphi) = ik\left(x\cos\varphi + y\sin\varphi + \frac{p}{2}\,\frac{(1-\cos\varphi)^2}{\cos\varphi}\right), \\ w'(\varphi) = ik\left(-x\sin\varphi + y\cos\varphi + \frac{p}{2}\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}\right), \\ w''(\varphi) = ik\left(-x\cos\varphi - y\sin\varphi + \frac{p}{2}\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}(2+\cos^2\varphi)\right) \\ \qquad\qquad = -w(\varphi) + ikp\,\frac{1-\cos^3\varphi}{\cos^3\varphi}, \\ w'''(\varphi) = ik\left(x\sin\varphi - y\cos\varphi + \frac{p}{2}\,\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi}(6-\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\right) \\ \qquad\qquad = -w'(\varphi) + 3ikp\,\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi} \\ w^{IV}(\varphi) = -w''(\varphi) + 3ikp\,\frac{1+3\sin^2\varphi}{\cos^5\varphi}, \\ w^{V}(\varphi) = w'(\varphi) + 30ikp\,\frac{\sin\varphi}{\cos^6\varphi}(1+\sin^2\varphi), \\ w^{VI}(\varphi) = w''(\varphi) + 30ikp\,\frac{1+8\sin^2\varphi+3\sin^4\varphi}{\cos^7\varphi}. \end{cases}$$

Den Integrationsweg, der zunächst über die reellen Werte von φ zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ zu erstrecken ist, werden wir

1) P. Debye, a. a. O., S. 769.

in einer komplexen φ-Ebene deformieren. Wir setzen daher

$$\varphi = \xi + i\eta, \tag{7}$$

wobei ξ, η als reell vorausgesetzt sind. Mit diesem Werte von φ wird der Exponent eine komplexe Funktion

$$w = U + iV, \tag{8}$$

wobei

$$\begin{cases} U = k\,\mathfrak{Sin}\,\eta\left[x\sin\xi - y\cos\xi - \frac{p}{2}\sin\xi\left(\frac{2}{\cos 2\xi + \mathfrak{Cof}\,2\eta} - 1\right)\right], \\ V = k\,\mathfrak{Cof}\,\eta \\ \qquad \left[x\cos\xi + y\sin\xi + \frac{p}{2}\cos\xi\left(\frac{2}{\cos 2\xi + \mathfrak{Cof}\,2\eta} + 1\right)\right] - kp. \end{cases} \tag{8'}$$

Den Integrationsweg wählen wir so, daß er möglichst nur durch solche Gebiete der φ-Ebene geht, in denen

$$U = \Re(w) < 0;$$

diese Gebiete haben wir zunächst zu bestimmen.

Wir denken uns über einer φ-Ebene die zu jedem Punkt ξ, η nach (8') gehörigen Werte von U als Ordinaten aufgetragen. Zu jedem Aufpunkt, d. h. zu jedem Wertepaar x, y gehört, wenn wir uns k und p als fest denken, eine andere U-Fläche. Wir haben die Veränderungen der U-Fläche festzustellen, wenn sich der Aufpunkt ändert, z. B. die Brennlinie überschreitet. Es genügt, das Verhalten von U zu untersuchen im Intervall

$$-\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}, \qquad \eta > 0;$$

wegen der Symmetrie der Brennlinie in der XY-Ebene dürfen wir ferner $y \geqq 0$ voraussetzen.

Die Kurve $U = 0$ zerfällt nach (8') in zwei Teile

$$\mathfrak{Sin}\,\eta = 0, \qquad \text{d. h. } \eta = 0,$$

$$\mathfrak{Cof}\,2\eta = \frac{p\sin\xi}{\left(x + \frac{p}{2}\right)\sin\xi - y\cos\xi} - \cos 2\xi. \tag{9}$$

Die Kurve (9) hat die Gerade $\xi = \xi_\infty$ zur Asymptote, wobei

$$\operatorname{tg}\xi_\infty = \frac{y}{x + \frac{p}{2}};$$

reelle Werte für η ergeben sich aus (9) nur dann, wenn die rechte Seite von (9) $\geqq 1$, wenn also, wie sich durch eine einfache Umformung ergibt,

für $\left(x+\frac{p}{2}\right)\sin\xi - y\cos\xi > 0$, d. h. $\xi > \zeta_\infty$:

$$\Phi = \operatorname{tg}^3\varphi - \frac{2x}{p}\operatorname{tg}\varphi + \frac{2y}{p} \geqq 0,$$

für $\left(x+\frac{p}{2}\right)\sin\xi - y\cos\xi < 0$, d. h. $\xi < \xi_\infty$: $\Phi \leqq 0$,

wobei Φ eine Abkürzung für den Ausdruck dritten Grades in $\operatorname{tg}\xi$ ist. $\Phi = 0$ ergibt $\mathfrak{Cof}\, 2\eta = 1$, die Schnittpunkte von (9) mit der Ξ-Achse.

Die Diskriminante von Φ ist:

$$D = -\frac{108}{p^3}\left(y^2 - \frac{8}{27p}x^3\right),$$

also bis auf einen Zahlenfaktor gerade die linke Seite der auf Null reduzierten Gleichung der Brennlinie. Je nach dem Vorzeichen von D haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

a) $D > 0$, d. h. der Aufpunkt x, y liegt im Innern der Brennlinie, in dem Teil der XY-Ebene, der die $+X$-Achse enthält: die Kurve (9) schneidet die Ξ-Achse in drei reellen verschiedenen Punkten ξ_1, ξ_2, ξ_3, und zwar ist, da $y > 0$ vorausgesetzt ist:

$$-\frac{\pi}{2} < \xi_1 < 0 < \xi_2 < \xi_3 < +\frac{\pi}{2}.$$

b) $D = 0$, d. h. der Aufpunkt liegt auf der Brennlinie: zwei Schnittpunkte des Falles a) fallen in einen ξ_0 zusammen, und zwar offenbar die beiden positiven; aus

$$2\operatorname{tg}\xi_0 + \operatorname{tg}\xi_1 = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}^2\xi_0 \operatorname{tg}\xi_1 = -\frac{2y}{p}$$

folgt dann

$$\operatorname{tg}\xi_0 = \sqrt[3]{\frac{y}{p}} = \sqrt{\frac{2x}{3p}}, \quad \operatorname{tg}\xi_1 = -2\sqrt[3]{\frac{y}{p}} = -2\sqrt{\frac{2x}{3p}}.$$

c) $D < 0$, d. h. der Aufpunkt liegt im Äußern der Brennlinie: wir erhalten nur einen reellen Schnittpunkt $\xi_1 < 0$ mit der Ξ-Achse.

Die Unterscheidung dieser Fälle können wir uns in sehr einfacher Weise veranschaulichen, wenn wir auf die Bedeutung von $\Phi = 0$ *für die XY-Ebene* eingehen. Ist ξ_i eine reelle Wurzel von $\Phi = 0$, so stellt in der XY-Ebene $\Phi(\xi_i) = 0$ eine Gerade dar, und zwar den Lichtstrahl unseres Bündels, der die X-Achse unter dem Winkel ξ_i schneidet. Sind nämlich

x_0, y_0 die Koordinaten des Berücksichtigungspunktes des Lichtstrahls mit der Brennlinie, so lautet seine Gleichung:

$$y - y_0 = \operatorname{tg} \xi_i (x - x_0);$$

setzen wir für x_0, y_0 ihre Werte (5) ein, so geht diese Gleichung in der Tat über in $\Phi(\xi_i) = 0$. Halten wir nun den Aufpunkt x, y fest, so bestimmen die Wurzeln ξ_i von $\Phi = 0$ die an die Brennlinie vom Aufpunkt aus gezogenen Tangenten, d. h. die Lichtstrahlen eines zu 180° geöffneten Bündels. Unsere Brennlinie ist also eine Kurve dritter Klasse; von einem inneren Punkt ($D > 0$) gehen drei reelle Tangenten aus, und zwar, da $y > 0$ vorausgesetzt ist, eine negative ξ_1 und zwei positive ξ_2, ξ_3 (vgl. Fig. 2), $\Phi = 0$ hat drei reelle Wurzeln; für einen Punkt P_0 der Brennlinie ($D = 0$) fallen ξ_2 und ξ_3 in ξ_0 zusammen, um dann komplex zu werden, wenn der Aufpunkt ins Äußere der Brennlinie rückt ($D < 0$).

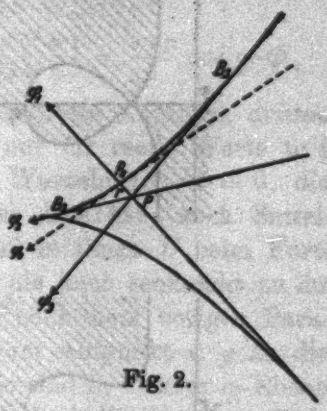


Fig. 2.

In Fig. 3a, b, c ist die Kurve $U = 0$ für je einen Punkt innerhalb, auf und außerhalb der Brennlinie gezeichnet; wie man leicht bestätigt, ist in den schraffierten Gebieten $U < 0$. Die Änderung der komplexen Ebene, wenn der Aufpunkt die Brennlinie überschreitet, ist aus diesen Figuren ohne weiteres ersichtlich.

Eine besondere Stellung nimmt der Punkt $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ein; nähern wir uns ihm längs der Ξ-Achse, so bleibt $U = 0$; nähern wir uns ihm aber längs einer Senkrechten zur Ξ-Achse, setzen also zuerst $\xi = \frac{\pi}{2}$ und lassen dann η von der positiven oder negativen Seite her zu Null abnehmen, so nähert sich U dem Werte $\mp \infty$. Dies entspricht der Tatsache, daß $\varphi = \frac{\pi}{2}$ eine wesentlich singuläre Stelle des Integranden ist, der in der Umgebung dieses Punktes jeden vorgegebenen Wert annimmt.

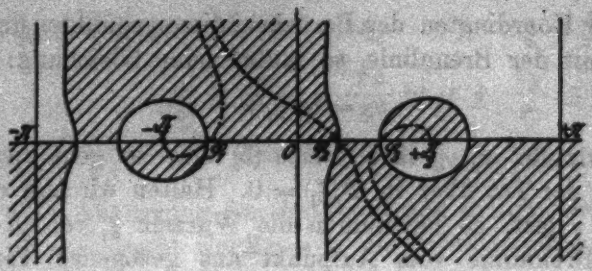


Fig. 8a.

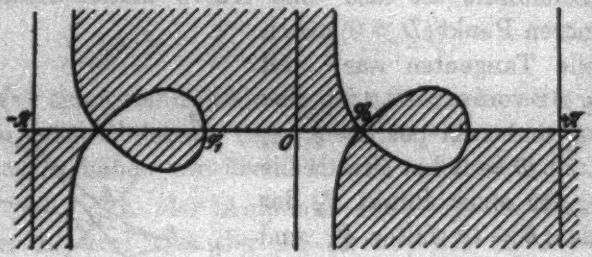


Fig. 8b.

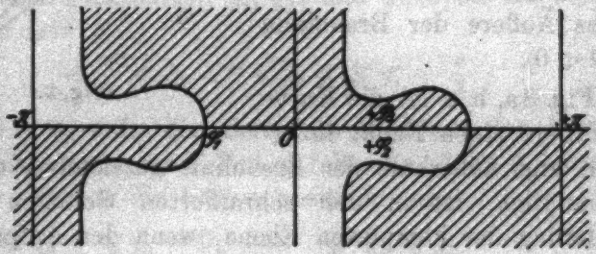


Fig. 8c.

§ 8. Bestimmung der Sattelpunkte.

Bekanntlich hat die Funktion U als reeller Teil einer komplexen Funktion nirgends ein Maximum oder Minimum von endlichem Betrage. An den Stellen nämlich, für die

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0, \tag{10}$$

ist das zweite Differential von U je nach der Fortschreitungsrichtung teils positiv, teils negativ, die U-Fläche verläuft in den vier Winkelräumen, die durch die (sich rechtwinklig schneidenden) Haupttangentenkurven bestimmt sind, abwechselnd oberhalb und unterhalb der horizontalen Tangentialebene.

Die Gleichungen (10) liefern daher Sattelpunkte. Nach den Cauchy-Riemannschen Gleichungen hat auch V an denselben Stellen Sattelpunkte.

Die beiden Gleichungen (10) für die Koordinaten ξ, η der Sattelpunkte sind identisch mit der einen Gleichung

$$\frac{dw}{d\varphi} = 0,$$

deren Wurzeln die Sattelpunkte liefern in der Form

$$\varphi = \xi + i\eta.$$

Nach (6) ist

$$\frac{dw}{d\varphi} = ik\left(-x\cos\varphi + y\sin\varphi + \frac{p}{2}\frac{\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi}\right) = \frac{ikp}{2}\cos\varphi\cdot\Phi,$$

wo Φ der bereits früher (S. 362) betrachtete Ausdruck dritten Grades in $\operatorname{tg}\varphi$ ist, den wir bisher nur für reelle Werte $\operatorname{tg}\xi$ untersucht haben. Daß die reellen Wurzeln von $\Phi = 0$, die Schnittpunkte der Kurve (9) mit der Ξ-Achse, auch Sattelpunkte sind, folgt schon daraus, daß in ihnen U beim Fortschreiten sowohl längs der Ξ-Achse, als auch senkrecht zu ihr den konstanten Wert Null hat. Da nach dem vorigen Paragraphen $\Phi = 0$ die Gleichung der vom Aufpunkt x, y an die Brennlinie gezogenen Tangenten ist, so sind in unserer φ-Ebene die komplexen durch einen Punkt außerhalb der Brennlinie gehenden Lichtstrahlen dargestellt durch die konjugiert komplexen Sattelpunkte φ_2, φ_3 (Fig. 3c).

Zur Berechnung des Lichtvektors haben wir später Integrale über die Sattelpunkte auszuwerten, müssen also deren Koordinaten explicite kennen. Für beliebige Aufpunkte lassen sie sich aber aus $\Phi = 0$ nicht in brauchbarer Form entnehmen, da auch die reellen Wurzeln von $\Phi = 0$ in komplexer Form auftreten und sich nicht auf algebraischem Wege reell darstellen lassen (irreduzibler Fall der Gleichung dritten Grades). Das meiste Interesse beanspruchen natürlich die Beugungserscheinungen beim Übergang über die Brennlinie. Die Lage der Sattelpunkte läßt sich nun ohne Vernachlässigung angeben, wenn wir die Brennlinie nicht längs ihrer Normalen, sondern längs einer ihrer Tangenten überschreiten. Der Aufpunkt soll sich also etwa auf der durch φ_1 bestimmten Tangente bewegen (Fig. 2); dann ist von den drei Wurzeln von $\Phi = 0$ die eine,

$\operatorname{tg}\varphi_1$, fest, die beiden anderen lassen sich als Wurzeln einer quadratischen Gleichung leicht angeben.

Die Tangente φ_1 möge (Fig. 2) die Brennlinie im Punkte $P_0(x_0, y_0)$ schneiden, wobei

$$y_0^2 = \frac{8}{27p} x_0^3.$$

Für P_0 hat die Gleichung $\Phi = 0$ außer der einfachen Wurzel $\operatorname{tg}\varphi_1$ noch die Doppelwurzel $\operatorname{tg}\varphi_0$, wobei

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{x_0}{p}} = \sqrt{\frac{2x_0}{3p}}; \qquad \operatorname{tg}\varphi_0 = -2\sqrt[3]{\frac{y_0}{p}} = -2\sqrt{\frac{2x_0}{3p}}$$

(vgl. S. 362). Liegt P auf dem durch φ_1 bestimmten Lichtstrahl, so setzen wir, um die zu ihm gehörigen Wurzeln $\operatorname{tg}\varphi_2$, $\operatorname{tg}\varphi_3$ von $\Phi = 0$ zu berechnen, den Abstand $P_0P = r$, positiv gerechnet in Richtung des einfallenden φ_1; dann ist nach Fig. 2

$$x = x_0 - r\cos\varphi_1 = \frac{3}{8}p\operatorname{tg}^2\varphi_1 - r\cos\varphi_1,$$

$$y = y_0 - r\sin\varphi_1 = -\frac{1}{8}p\operatorname{tg}^3\varphi_1 - r\sin\varphi_1.$$

Durch Einsetzen dieser Werte geht $\Phi = 0$ über in

$$\operatorname{tg}^3\varphi - \left(\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2\varphi_1 - \frac{2r}{p}\cos\varphi_1\right)\operatorname{tg}\varphi - \left(\frac{1}{4}\operatorname{tg}^3\varphi_1 + \frac{2r}{p}\sin\varphi_1\right) = 0,$$

eine Gleichung, die die Sattelpunkte bestimmt nicht mehr als Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten x, y des Aufpunktes, sondern der krummlinigen Koordinaten r, φ_1 bzw. φ_0, das wir statt φ_1 einführen werden. Da $\operatorname{tg}\varphi_1$ eine Wurzel dieser Gleichung ist, erhalten wir durch Division mit $\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_1$ die quadratische Gleichung für $\operatorname{tg}\varphi_2$, $\operatorname{tg}\varphi_3$:

$$\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}\varphi_1 + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\varphi_1 + \frac{2r}{p}\cos\varphi_1 = 0;$$

hieraus

$$(11)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi_{2,3} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi_1 \mp \sqrt{-\frac{2r}{p}\cos\varphi_1} \\ \qquad\qquad = \operatorname{tg}\varphi_0 \mp \sqrt{-\frac{2r}{p}\cos\varphi_1}. \end{cases}$$

Im folgenden benutzen wir die Abkürzung

$$(12)\qquad h^2 = \frac{2|r|}{p}\cos\varphi_1,$$

unter $|r|$ den absoluten Betrag von r verstanden. Dann ist für

$r < 0$: $\varphi_2 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi_0 - h)$, $\varphi_3 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi_0 + h)$,
$r > 0$: $\varphi_2 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi_0 - ih)$, $\varphi_3 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi_0 + ih)$.

Setzen wir im zweiten Fall

$$\varphi_2 = \xi - i\eta, \qquad \varphi_3 = \xi + i\eta,$$

so wird unter Benutzung der bekannten Beziehung

$$\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \log \frac{1 - iz}{1 + iz} :$$

$$\xi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg}\varphi_0}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi_0 - h^2}, \qquad \eta = \frac{1}{4} \log \frac{\operatorname{tg}^2\varphi_0 + (1+h)^2}{\operatorname{tg}^2\varphi_0 + (1-h)^2}.$$

Wenn der Aufpunkt P von P_0 ins Unendliche rückt, also h^2, das nach (12) mit $r = P_0 P$ proportional ist, von Null bis Unendlich wächst, so bewegen sich die komplexen Sattelpunkte φ_2, φ_3 auf einer ovalförmigen Kurve von φ_0 nach $\pi/2$, wie man nach den letzten Gleichungen leicht bestätigt.

Die Fig. 3a, b, c sind berechnet für

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad r = -\frac{p}{4}, \quad r = 0, \quad r = +\frac{p}{4}.$$

Die Linien stärksten Gefälles (Fallinien) für U, die nach Cauchy-Riemannschen Gleichungen Niveaulinien für V sind, sind in einem Punkte der φ-Ebene bestimmt durch die Fortschreitungsrichtung

$$\frac{\partial \eta}{d\xi} = \frac{\partial U}{\partial \eta} : \frac{\partial U}{\partial \xi}.$$

In den Sattelpunkten ist diese Richtung nicht mehr eindeutig; mit Hilfe der zweiten partiellen Ableitungen findet man für die reellen Sattelpunkte $\frac{d\eta}{d\xi} = \pm 1$, die Fallinien schneiden also die Ξ-Achse unter $\pm 45^0$. Fallen zwei Sattelpunkte zusammen, wie in Fig. 3b, so ergibt sich für die Richtung der Fallinien in diesen Punkten mit Hilfe der dritten partiellen Ableitungen von U

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \infty \quad \text{oder} \quad = \pm 1 : \sqrt{3},$$

die Neigung gegen die Ξ-Achse ist also 90^0, $\pm 30^0$. Liegen die *komplexen Sattelpunkte* in der Nähe der Ξ-Achse, was im folgenden durchweg der Fall ist, so darf die Neigung der durch diese Punkte gehenden Fallinien gegen die Ξ- und H-Richtung als klein vorausgesetzt werden.

Es seien noch die Sattelpunkte bestimmt für zwei spezielle Fälle, für die wir die Intensitätsverteilung untersuchen werden, die Fälle $x = 0$ und $y = 0$.

a) Ist $x = 0$, d. h. liegt der Aufpunkt auf einer Senkrechten zur Achse des Bündels durch die Spitze der Brennlinie, so lautet die Gleichung $\Phi = 0$

$$\operatorname{tg}^3 \varphi = -\frac{2y}{p} = -\varrho^3,$$

wenn zur Abkürzung $\left(\frac{2y}{p}\right)^{1/3} = \varrho$ gesetzt wird, unter der dritten Wurzel ihren reellen Wert verstanden. Die Sattelpunkte sind daher gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\varrho, \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\omega\varrho, \qquad \operatorname{tg} \varphi_3 = -\omega^2\varrho,$$

wo

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad \omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

die komplexen dritten Einheitswurzeln sind. Der im Gebiet $U < 0$ gelegene Sattelpunkt ist dann

$$\varphi_3 = -\operatorname{arctg} \omega^2\varrho = \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\varrho}{1-\varrho^3} + \frac{i}{4} \log \frac{1 + \sqrt{3}\,\varrho + \varrho^2}{1 - \sqrt{3}\,\varrho + \varrho^2}.$$

Für kleine Werte von ϱ, für die tg durch den Bogen ersetzt werden kann, werden also die Sattelpunkte der Fig. 3c Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.

Für die *Spitze der Brennlinie* ($x = 0$, $y = 0$) zerfällt die Kurve $U = 0$ in folgende Bestandteile (vgl. Fig. 4):

$\mathfrak{Sin}\, \eta = 0$, d. h. $\eta = 0$,

$\sin \xi = 0$, d. h. $\xi = k\pi$ (k positiv oder negativ ganzzahlig),

$\mathfrak{Sin}\, \eta = \pm \sin \xi$.

Die letzteren Kurven sind Wellenlinien, welche die Ξ-Achse in den Punkten $\xi = k\pi$ unter $\pm 45^0$ schneiden.

b) Bewegt sich der Aufpunkt auf der Achse des Bündels ($y = 0$), so zerfällt $U = 0$ in

1. $\mathfrak{Sin}\, \eta = 0$, 2. $\sin \xi = 0$, 3. $\mathfrak{Cos}\, 2\eta = \dfrac{2}{1 + \dfrac{2x}{p}} - \cos 2\xi$.

Die Kurve (3) hat für $0 > 1 + \frac{2x}{p}$, also für Aufpunkte, die links vom Brennpunkt F der Parabel $\left(x = -\frac{p}{2}\right)$ liegen, über-

haupt keinen reellen Punkt; bewegt sich der Aufpunkt von F gegen die Spitze der Brennlinie $\left(-\frac{p}{2} < x < 0\right)$, so stellt sie zwei zur Ξ-Achse symmetrische Wellenlinien dar, die aus dem

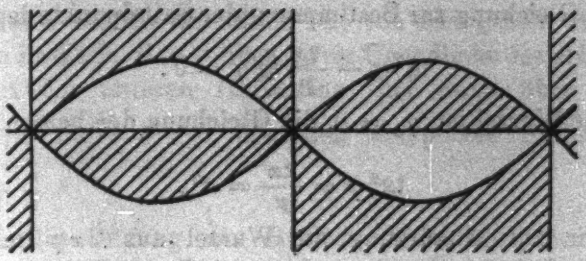


Fig. 4.

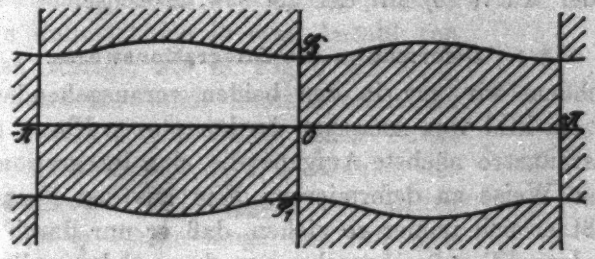


Fig. 5a.

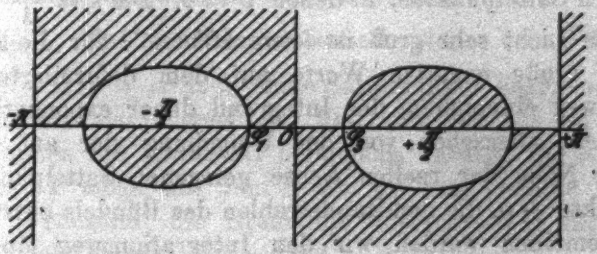


Fig. 5b.

Unendlichen in Richtung der H-Achse gegen die Ξ-Achse zusammenrücken $\left(\text{Fig. 5a, die für } x = -\frac{p}{4} \text{ gilt}\right)$, um für $x = 0$ (Spitze der Brennlinie) in die bereits behandelten Kurven $\mathfrak{Sin}\,\eta = \pm \sin\xi$ überzugehen (Fig. 4); ist $\frac{2x}{p} > 0$, rückt also der Aufpunkt ins Innere der Brennlinie, so stellt (3) Ovale dar, die symmetrisch zur H-Achse in den Streifen $-\pi$, 0 und

$0, +\pi$ liegen (Fig. 5b, die für $x = +\frac{p}{4}$ gilt); je weiter sich der Aufpunkt nach rechts bewegt, um so enger umschließen diese Ovale die Punktepaare $\pm\frac{\pi}{2}$.

Die Gleichung zur Bestimmung der Sattelpunkte lautet jetzt

$$\operatorname{tg}^3\varphi - \frac{2x}{p}\operatorname{tg}\varphi = 0.$$

Ihre eine Wurzel ist $\varphi_2 = 0$, die Gleichung der beiden anderen wird

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{2x}{p} = \sigma^2,$$

wenn wir zur Abkürzung die Wurzel aus $2x/p$ mit σ bezeichnen. Die Sattelpunkte φ_1, φ_3 sind natürlich die Schnittpunkte der Kurve (3) mit der H- bzw. Ξ-Achse.

§ 4. Deformation des Integrationsweges.

Nachdem wir uns in den beiden vorausgehenden Paragraphen ein Bild vom Aussehen der komplexen Ebene gemacht haben, ist unsere nächste Aufgabe die, den Integrationsweg in geeigneter Weise zu deformieren. Wie aus den Figg. 3, 4, 5 folgt, läßt er sich immer so ziehen, daß er nur durch Gebiete geht, in denen $U < 0$, abgesehen von den auf der reellen Achse gelegenen Sattelpunkten, in denen $U = 0$. Da $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ für das sichtbare Licht sehr groß ist (etwa $10^5\ \mathrm{cm}^{-1}$ für die D-Linie), wird U große negative Werte auf dem deformierten Integrationsweg einnehmen, der Integrand daher exponentiell verschwinden, abgesehen von der Umgebung der auf oder in nächster Nähe der reellen Achse gelegenen Sattelpunkte und der Punkte $\pm\alpha$, die den Randstrahlen des Bündels entsprechen. Im allgemeinen werden wir den Integrationsweg längs Fallinien für U ziehen, weil wir dann sicher sind, daß sich U, abgesehen von der Umgebung der Sattelpunkte, monoton ändert.

In dem bei unserer Wahl der Brennlinie allerdings praktisch bedeutungslosem Fall eines *zu 180° geöffneten Bündels* gehen durch jeden inneren Punkt der Brennlinie drei Strahlen, durch jeden äußeren Punkt geht ein Strahl im Sinne der geometrischen Optik. Auf der von $-\frac{\pi}{2}$ ausgehenden Fallinie, die wir als Integrationsweg wählen (Fig. 3a), ist zunächst U

negativ unendlich (vgl. § 2, letzter Absatz); sie biegt in dem unterhalb der Ξ-Achse gelegenen Teil $U < 0$ um, schneidet im Sattelpunkt φ_1 die Ξ-Achse unter 45° und zieht sich ins Unendliche des schraffierten Streifens der oberen Halbebene, wo wiederum U negativ unendlich ist; von dort gehen wir auf der Fallinie im Falle $D > 0$ über φ_2 ins Unendliche des schraffierten Streifens der unteren Halbebene und dann über φ_3 nach $+\frac{\pi}{2}$, im Falle $D < 0$ über den komplexen Sattelpunkt φ_3 nach $+\frac{\pi}{2}$.

Ist die Öffnung des Bündels $2\alpha < 180°$, so wird die XY-Ebene durch die Randstrahlen $\pm\alpha$ und den Teil der Brennlinie zwischen ihren Berührungspunkten mit den Randstrahlen in eine Anzahl von Gebieten zerlegt, die in Fig. 6 mit 0, I, II, III bezeichnet sind. Diese Bezeichnung ist so gewählt, weil durch jeden Punkt dieser Gebiete bzw. 0, 1, 2, 3 Strahlen des Bündels gehen. Den Integrationsweg ziehen wir in der φ-Ebene längs der von $\pm\alpha$ ausgehenden Fallinien, die die Ξ-Achse rechtwinklig schneiden, ins Unendliche oder nach $\pm\frac{\pi}{2}$, je nachdem außerhalb der Strecke $-\alpha \ldots +\alpha$ noch reelle Sattelpunkte liegen oder nicht. Nehmen wir als Beispiel den Fall, für den wir im nächsten Paragraphen die Intensität berechnen werden: $\varphi_0 = 45°$, der Aufpunkt P möge, auf dem Strahl φ_1 vom Gebiete II in das Gebiet 0 rückend, die Brennlinie überschreiten; die Öffnung des Bündels betrage $2\alpha = 120°$. Da

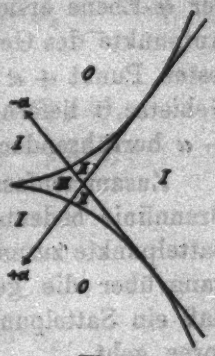


Fig. 6.

$$\varphi_1 = -\operatorname{arctg} 2 < -\frac{\pi}{3},$$

gehört der Strahl φ_1 dem Bündel nicht mehr an. Das Integral ist also zu erstrecken längs der von $-\frac{\pi}{3}$ ausgehenden Fallinie ins Unendliche des schraffierten Streifens der oberen Halbebene, von da über die reellen Sattelpunkte φ_2, φ_3 bzw. über den komplexen Sattelpunkt φ_3, je nachdem P im Innern oder Äußern der Brennlinie liegt, nach $+\frac{\pi}{2}$, und von da

schließlich auf der Fallinie nach $+\frac{\pi}{3}$. Zur Berechnung des Lichtvektors haben wir also auszuwerten die Integrale über die beiden reellen oder über den komplexen Sattelpunkt, sowie die von den Randstrahlen $\pm\alpha$ herrührenden Integrale.

Wäre der Lichtvektor beim Übergang über die Brennlinie etwa von III nach I zu berechnen, so gehörte der Strahl φ_1 dem Bündel an, wir hätten zu den Integralen des eben behandelten Falles noch das Integral über den Sattelpunkt φ_1 zu addieren.

Bewegt sich der Aufpunkt über die geradlinige Begrenzung des Bündels, etwa über $+\alpha$ von I nach 0, so ist die Änderung der φ-Ebene ersichtlich die, daß ein Sattelpunkt, φ_2, der für Aufpunkte des Gebietes I noch links von $+\alpha$ liegt, über den festen Punkt $+\alpha$ hinweg nach rechts rückt. Für Punkte des Gebietes 0 liefern daher nur die von den Randstrahlen $+\alpha$, $-\alpha$ herrührenden Integrale Beiträge zum Lichtvektor.

Zusammenfassend können wir sagen: Übergang über die Brennlinie bedeutet für die komplexe Ebene, daß zwei reelle Sattelpunkte zusammenfallen und dann komplex werden, Übergang über die geradlinige Begrenzung des Bündels bedeutet, daß ein Sattelpunkt für die Berechnung des Lichtvektors verloren geht.

§ 5. Die Intensitätsverteilung beim Übergang über die Brennlinie.

In diesem und im folgenden Paragraphen führen wir die Integrale über die Sattelpunkte aus für den im vorigen Paragraphen erwähnten Fall, daß der Aufpunkt, auf dem Strahl φ_1 vom Gebiet II ins Gebiet 0 rückend, die Brennlinie überschreitet (Fig. 6). Je nachdem der Aufpunkt P im Innern oder Äußern der Brennlinie liegt, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden: $P_0P = r < 0$ und $r > 0$; im ersten Fall haben wir über die reellen Sattelpunkte φ_2, φ_3, im zweiten Fall über den komplexen Sattelpunkt φ_3 zu integrieren.

Fall A: $r < 0$.

Zunächst werten wir das Integral über den Sattelpunkt φ_3 aus; bezeichnen wir die in Richtung des Integrationsweges,

den wir in der Nähe von φ_3 als geradlinig betrachten dürfen, von φ_3 ausgemessene Entfernung mit δ, so wird nach Fig. 3a

$$\varphi = \varphi_3 + e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \delta, \qquad d\varphi = e^{i\frac{\pi}{4}} d\delta.$$

Setzen wir diesen Wert in $w(\varphi)$ (S. 360) ein, berücksichtigen, daß $w'(\varphi_3) = 0$ und schreiben zur Abkürzung $w(\varphi_3) = w_3$, $w''(\varphi_3) = w_3''$ usw., so folgt

$$(13)\quad w(\varphi) = w_3 + \frac{w_3''}{2!} e^{i\frac{\pi}{2}} \delta^2 + \frac{w_3'''}{3!} e^{i\frac{3\pi}{4}} \delta^3 + \frac{w_3^{IV}}{4!} e^{i\pi} \delta^4 + \dots$$

In w_3 und seine Ableitungen haben wir die rechtwinkligen Koordinaten x, y durch die krummlinigen

$$r,\ \varphi_1 \quad \text{bzw.} \quad h = \sqrt{\frac{2|r|}{p}} \cos\varphi_1,\ \varphi_0$$

zu ersetzen; es ist ja (vgl. S. 366)

$$x = \tfrac{3}{8} p \operatorname{tg}^2\varphi_1 - r\cos\varphi_1 = \tfrac{3}{2} p \operatorname{tg}^2\varphi_0 + \tfrac{1}{2} p h^2,$$
$$y = -\tfrac{1}{8} p \operatorname{tg}^3\varphi_1 - r\sin\varphi_1 = p \operatorname{tg}^3\varphi_0 - p h^2 \operatorname{tg}\varphi_0;$$

da nach (11)

$$\cos\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_3}} = \frac{\cos\varphi_0}{\sqrt{N}},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$N = 1 + 2h\sin\varphi_0\cos\varphi_0 + h^2\cos^2\varphi_0,$$

so wird

$$(14)\quad \begin{cases} w_3 = ikp\dfrac{\sqrt{N}}{\cos^2\varphi_0}(1 - h\sin\varphi_0\cos\varphi_0) - ikp, \\ w_3'' = ikp\dfrac{\sqrt{N}}{\cos\varphi_0}(3h\operatorname{tg}\varphi_0 + h^2), \\ w_3''' = ikp\dfrac{3\sqrt{N}}{\cos^2\varphi_0}\cdot[\operatorname{tg}\varphi_0 + h(1+2\sin^2\varphi_0) \\ \qquad\qquad + 3h^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0 + h^3\cos^2\varphi_0], \\ w_3^{IV} = ikp\dfrac{\sqrt{N}}{\cos^3\varphi_0}[3 + 12\operatorname{tg}^2\varphi_0 + 3h\operatorname{tg}\varphi_0(9+7\sin^2\varphi_0) \\ \qquad + 2h^2(7+29\sin^2\varphi_0) + 48h^3\sin\varphi_0\cos\varphi_0 + 12h^4\cos^2\varphi_0]. \end{cases}$$

w_3'' verschwindet für $h = 0$; für einen Punkt der Brennlinie fallen ja zwei Sattelpunkte zusammen, $w' = 0$ hat also eine Doppelwurzel. Wenn wir die Entwicklung (13) von w nach

Potenzen von δ mit dem quadratischen Glied abbrechen, so setzen wir also damit voraus, daß w_3'' nicht zu klein ist, d. h. daß der Aufpunkt nicht zu nahe der Brennlinie liegt. Nehmen wir beispielsweise wieder $kp = 10^4$, ferner $\varphi_0 = 45^0$, so wird

$$(14') \quad \begin{cases} w_3 = i \cdot 10^4 \cdot 2\sqrt{2}\sqrt{1 + h + \frac{1}{2}h^2}(1 - \frac{1}{2}h) - i \cdot 10^4 \\ w_3'' = i \cdot 10^4\sqrt{2}\sqrt{1 + h + \frac{1}{2}h^2}(3h + h^2) \\ w_3''' = i\,10^4 6\sqrt{2}\sqrt{1 + h + \frac{1}{2}h^2}(1 + 2h + \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^3). \end{cases}$$

Wie in der Dissertation begründet, dürfen wir uns dann für Werte von $h \geqq \frac{1}{10}$, also $|r| \geqq 0{,}011$ mm auf das quadratische Glied in der Entwicklung von w beschränken.

Im Integral über den Sattelpunkt φ_3, das wir mit J_3 bezeichnen, brauchen wir nur bis zu solchen Werten von δ zu integrieren, für die $e^{-\frac{w_3''}{2i}\delta^2}$ praktisch Null wird, also etwa bis $\frac{w_3''}{2i}\delta^2 = 5$; dann dürfen wir aber als Integrationsgrenzen $\pm\infty$ annehmen. So ergibt sich schließlich

$$J_3 = e^{w_3 + i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{w_3''}{2i}\delta^2}\, d\delta.$$

Führen wir als neue Integrationsvariable ein

$$u = \sqrt{\frac{w_3''}{2i}} \cdot \delta, \qquad d\delta = \sqrt{\frac{2i}{w_3''}}\, du,$$

so wird

$$(15) \quad J_3 = \sqrt{\frac{2i}{w_3''}}\, e^{w_3 + i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{2i\pi}{w_3''}}\, e^{w_3 + i\frac{\pi}{4}},$$

da bekanntlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Für w_3 und w_3'' hat man ihre Werte aus (14) bzw. (14') einzusetzen.

In ähnlicher Weise ergibt sich das Integral J_2 über den Sattelpunkt φ_2. Die Werte für w_2, w_2'' folgen aus denen für w_3, w_3'', wenn man h durch $-h$ ersetzt. Als Integrationsvariable haben wir einzuführen

$$\varphi = \varphi_2 + e^{-i\frac{\pi}{4}}\delta, \qquad d\varphi = e^{-i\frac{\pi}{4}}d\delta,$$

wo δ wieder in Richtung des Integrationsweges positiv gemessen ist. Wir erhalten

$$(15') \qquad J_2 = e^{w_2 - i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{w_2''}{2i}\delta^2} d\delta = \sqrt{-\frac{2i\pi}{w_2''}}\, e^{w_2 - i\frac{\pi}{4}},$$

da jetzt

$$\frac{w_2''}{i} < 0, \quad \text{also} \quad u = \sqrt{-\frac{w_2''}{2i}}\,\delta$$

zu setzen ist.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß $-\frac{w_2''}{ik}$ den Abstand $|PB_2|$ (Fig. 2) des Punktes P vom Berührungspunkt des Strahls φ_2, also die in (3) mit r' bezeichnete Größe, und $\frac{w_2}{ik}$, das nach (6) und (5')

$$= -\frac{w_2''}{ik} + s = |PB_2| + \text{arc}\, OB_2,$$

die in (3) mit $r' + s$ bezeichnete Größe bedeutet; ebenso ist

$$\frac{w_2''}{ik} = |B_2 P|, \qquad \frac{w_2}{ik} = -|B_2 P| + \text{arc}\, OB_2;$$

die Phase von J_2 unterscheidet sich von der des Ausdrucks (3) um $\pi/2$. Für einen Aufpunkt des Gebietes I, in dem die Strahlen einfallen, gehört der Strahl φ_2 dem Bündel nicht mehr an, von Integralen über Sattelpunkte kommt für den Lichtvektor nur J_2 in Betracht. $\mathfrak{P} = \frac{1}{\pi} J_2$ ist daher identisch mit dem nach der geometrischen Optik geltenden Ausdruck (3). Da, wie in § 9 gezeigt wird, die von den Punkten $\pm\alpha$ ausgehenden Integrale von höherer Ordnung verschwinden, so ist damit gezeigt, daß der aus dem Huygensschen Prinzip abgeleitete Ausdruck (4') die Randbedingungen erfüllt, wenn wir von den beim Übergang über die Randstrahlen auftretenden Beugungserscheinungen absehen; daß er der optischen Differentialgleichung genügt, ist unmittelbar ersichtlich.

Da $\pi \cdot \mathfrak{P}$ gleich der Summe der Integrale über die Sattelpunkte ist, so haben wir damit bestätigt, was bereits in der Einleitung vorweggenommen wurde, daß man zur Berechnung

der Lichtbewegung die geometrischen Strahlen zur Interferenz zu bringen hat.

Für Aufpunkte des Gebietes II (Fig. 6), die nicht zu nahe der geometrischen Begrenzung des Bündels liegen, ist also die Lichtbewegung nach (15) und (15')

$$\mathfrak{P} = \sqrt{\frac{2i}{\pi w_3''}}\, e^{w_3 + i\frac{\pi}{4}} + \sqrt{-\frac{2i}{\pi w_3''}}\, e^{w_3 - i\frac{\pi}{4}}.$$

Die Intensität als Quadrat des absoluten Betrags von $\mathfrak{P}$ erhalten wir am einfachsten durch Multiplikation von $\mathfrak{P}$ mit seinem konjugiert komplexen Wert

$$\overline{\mathfrak{P}} = \sqrt{\frac{2i}{\pi w_3''}}\, e^{-w_3 - i\frac{\pi}{4}} + \sqrt{-\frac{2i}{\pi w_3''}}\, e^{-w_3 + i\frac{\pi}{4}}; \tag{16}$$

so ergibt sich

$$\frac{\pi}{2}|\mathfrak{P}|^2 = -\frac{i}{w_3''} + \frac{i}{w_3''} + 2\sqrt{-\frac{i}{w_3''}\cdot\frac{i}{w_3''}}\sin\left(\frac{w_3}{i} - \frac{w_3}{i}\right).$$

Für w_3, w_3'' haben wir ihre Werte (14) einzusetzen; ersetzen wir h durch $-h$, so ergeben sich w_2, w_2''. Die weitere Rechnung spezialisieren wir für $\varphi_0 = 45^0$ und kleine Werte von h. Entwickelt man $|\mathfrak{P}|^2$ nach Potenzen von h, so folgt

$$\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}kp\cdot|\mathfrak{P}|^2 = \frac{1}{h}\cdot\left\{1 + \frac{29}{72}h^2 - \frac{805}{10368}h^4 - \ldots + \left(1 + \frac{1}{18}h^2 - \frac{25}{432}h^4 - \ldots\right)\right.$$
$$\left.\sin\frac{kp}{\sqrt{2}}h^3\left(1 + \frac{1}{8}h^2 - \frac{5}{128}h^4 - \frac{11}{1024}h^6 + \ldots\right)\right\}.$$

Schließlich setzen wir noch $kp = 10^4$ und führen an Stelle von h eine neue dem Abstand r proportionale Variable n ein:

$$h^2 = \frac{2r}{p}\cos\varphi_1 = \frac{n}{10^3}, \quad \text{also} \quad \frac{r}{\lambda} = \frac{5\sqrt{5}}{2\pi}\cdot n = 1{,}779\cdot n;$$

Dann wird

$$\left.\begin{aligned}\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}\cdot 10^4|\mathfrak{P}|^2 &= 10\sqrt{\frac{10}{n}}\\ &\cdot\left\{1 + 0{,}000\,402\,8\,n - 0{,}000\,000\,076\,7\,n^2 - \ldots\right.\\ &+ (1 + 0{,}000\,055\,6\,n - 0{,}000\,000\,057\,9\,n^2 - \ldots)\\ &\left.\sin\frac{n\sqrt{n}}{2\sqrt{5}}(1 + 0{,}000\,125\,n - 0{,}000\,000\,039\,n^2 - \ldots)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{16'}$$

Dabei ist

$$h \geqq \frac{1}{10}, \quad \text{also} \quad n \geqq 10 \quad \text{oder} \quad \frac{r}{\lambda} \geqq 17{,}8$$

vorausgesetzt. Nach (16′) wurde $\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} \cdot 10^4 |\mathfrak{B}|^2$ berechnet von $n = 10$ bis $n = 27$ in Intervallen von 0,5, also etwa von $\frac{r}{\lambda} = 18$ bis $\frac{r}{\lambda} = 48$, und in Fig. 7 zur Abszisse $\frac{r}{\lambda}$ aufgetragen. Wegen

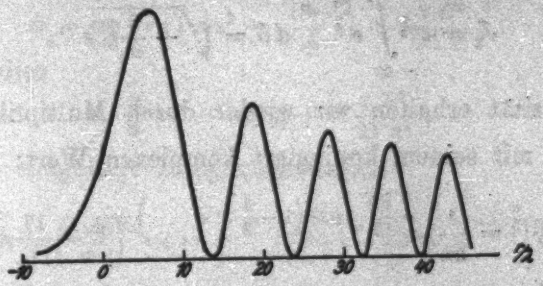


Fig. 7.

des sin-Gliedes treten Schwankungen der Intensität auf: Minima erhalten wir angenähert, wenn der sin den Wert -1 hat; die ersten Minima weichen unmerklich von Null ab, wie aus (16′) ersichtlich, die Maxima, für die der sin nahezu den Wert $+1$ hat, nehmen wegen des Faktors $n^{-1/2}$ ab.

Fall B: $r > 0$.

Der Aufpunkt liegt jetzt, wenn wir wiederum den Übergang von II nach 0 ins Auge fassen (Fig. 6) im Gebiete des geometrischen Schattens. Wir haben nach Fig. 3c nur über den komplexen Sattelpunkt φ_3 zu integrieren. Die Werte von w_3 und w_3'' ergeben sich aus (14), wenn wir h ersetzen durch ih; führen wir gleich $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ ein, so folgt

$$\begin{aligned} w_3 &= ikp\,2\sqrt{2}\left(1 - \tfrac{i}{2}h\right)\sqrt{1 + ih - \tfrac{1}{2}h^2} - ikp \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4}kp\,h^3\left(1 - \tfrac{1}{8}h^2 + \ldots\right) \\ &\quad + ikp\,2\sqrt{2}\left(1 + \tfrac{1}{8}h^2 + \tfrac{7}{128}h^4 - \ldots\right) - ikp_r \end{aligned}$$

$$w_3'' = -kp\sqrt{2}\,(3h + ih^2)\sqrt{1 + ih - \tfrac{1}{2}h^2}.$$

Wir integrieren längs einer Parallelen zur Ξ-Achse, setzen also $\varphi = \varphi_3 + \delta$, $d\varphi = d\delta$.

Brechen wir, wie im Fall A, die Entwicklung von $w(\varphi)$ mit dem quadratischen Glied ab, schließen also die nächste Nähe der Brennlinie aus, so wird

$$w = w_3 + \frac{w_3''}{2}\delta^2,$$

$$J_3 = e^{iw_3}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{iw_3''}{2}\delta^2}\, d\delta = \sqrt{-\frac{2\pi}{w_3''}}\, e^{iw_3}.$$

Die Intensität erhalten wir wieder durch Multiplikation von $\mathfrak{B} = \frac{1}{\pi} J_3$ mit seinem konjugiert komplexen Wert:

$$\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} kp\,|\mathfrak{B}|^2 = \frac{1}{2h}\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} kp h^3\left(1-\frac{1}{8}h^3+\ldots\right)}\left(1-\frac{17}{144}h^3+\ldots\right).$$

Für $h = \frac{1}{10}$ ergibt sich $5 \cdot e^{-7} = 0{,}0046$, also praktisch Null.

§ 6. Fortsetzung; Intensitätsverteilung in nächster Nähe der Brennlinie.

Aufgabe dieses Paragraphen ist es, den Intensitätsverlauf bis zu einer Entfernung von etwa 18λ $\left(h = \frac{1}{10}\right)$ beiderseits der Brennlinie zu berechnen. Der Unterschied in der rechnerischen Behandlung gegenüber dem vorigen Paragraphen liegt darin, daß wir in der Entwicklung (13) des Exponenten von e unter dem Integralzeichen das Glied dritter Ordnung berücksichtigen müssen und so auf Airysche Integrale kommen. Das Glied dritter Ordnung wird nach (14) selbst wieder klein, wenn φ_0 klein ist; in diesem Fall wäre erst das Glied mit δ^4 ausschlaggebend. Den Fall $\varphi_0 = 0$ (Achse des Bündels) behandeln wir im übernächsten Paragraphen.

Wir unterscheiden wieder die beiden Fälle $r \lessgtr 0$.

Fall A: $r < 0$.

Zur Berechnung des Integrals J_3 über den Sattelpunkt φ_3 setzen wir zur Abkürzung den Exponenten (vgl. 13)

$$w = w_3 + e^{i\frac{3\pi}{4}}\frac{w_3'''}{6}\delta^3 + e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{w_3'''}{2}\delta^3 = w_3 + i(A\delta^3 + B\delta^3),$$

wo
$$A = e^{i\frac{3\pi}{4}} \frac{w_3'''}{6i}, \qquad B = e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{w_3''}{2i}.$$

Um die Normalform des Airyschen Integrals herzustellen, führen wir zunächst eine neue Integrationsvariable ε ein:
$$\delta = \varepsilon - \frac{B}{3A};$$
damit fällt das Glied mit ε^2 fort und es wird
$$w - w_3 = i\left(A\varepsilon^3 - \frac{B^2}{3A}\varepsilon\right) + i\frac{2B^3}{27A^2};$$
setzen wir dies
$$= i\frac{\pi}{2}(\eta^3 - m_3\eta) + i\frac{2B^3}{27A^2},$$
so wird die endgültige Integrationsvariable

(17)
$$\begin{cases} \eta = \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{1/3} \cdot \varepsilon = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{w_3'''}{3\pi i}\right)^{1/3} \cdot \left(\delta + e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{w_3''}{w_3'''}\right); \\ \text{daher} \\ d\delta = e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3\pi i}{w_3'''}\right)^{1/3} d\eta. \end{cases}$$

Der Parameter m_3 des Airyschen Integrals wird reell:

(18)
$$m_3 = \left(\frac{3}{\pi^2}\right)^{1/3} \left(\frac{w_3''}{i}\right)^2 \cdot \left(\frac{w_3'''}{i}\right)^{-4/3}.$$

Also obere Integrationsgrenze darf wieder in $J_3 + \infty$, ebenso als untere Grenze in $J_2 - \infty$ angenommen werden. Da die Sattelpunkte φ_2 und φ_3 um so näher beieinander liegen, je näher der Aufpunkt an der Brennlinie liegt, je kleiner also h ist, verlängern wir in Fig. 3a die als geradlinig angenommenen Integrationswege über φ_2 und φ_3 bis zu ihrem Schnittpunkt und nehmen als untere Integrationsgrenze in J_3 und als obere in J_2 die Kathete eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $\varphi_3 - \varphi_2$, also
$$\mp \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\sqrt{2}}.$$
Wir erhalten zunächst
$$\operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_3 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_3 \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{2h\cos^2\varphi_0}{1 - h^2\cos^2\varphi_0},$$
wenn wir für φ_3 und φ_2 ihre Werte (11) einsetzen. Die untere Grenze von J_3 wird also, wenn wir die Glieder dritter und höherer Ordnung in h vernachlässigen,

$$-\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2h\cos^2\varphi_0}{1-h^2\cos^2\varphi_0}=-h\sqrt{2}\cos^2\varphi_0.$$

Entwickeln wir auch die Ausdrücke (14) für w_3 und seine Abgeleiteten nach Potenzen von h, das ja $\leqq\frac{1}{10}$ vorausgesetzt ist, so ergibt sich nach (18)

$$(19)\quad\begin{cases} m_3=3\left(\frac{kp}{\pi}\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0\right)^{1/3}h^2 \\ \quad\cdot\{1-\frac{2}{3}h\operatorname{ctg}\varphi_0(1+3\sin^2\varphi_0) \\ \quad+\frac{1}{9}h^2\operatorname{ctg}^2\varphi_0(7+3\sin^2\varphi_0+36\sin^4\varphi_0)+\ldots\}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den vor das Integralzeichen tretenden Phasenfaktor zur Abkürzung mit e^{α_3}, so wird

$$(20)\quad\begin{cases} \alpha_3=w_3+i\frac{2B^3}{27A^2}=w_3+\frac{i}{3}\left(\frac{w_3''}{i}\right)^3\left(\frac{w_3'''}{i}\right)^{-2} \\ =\frac{ikp}{\cos^3\varphi_0}\cdot\Big\{1-\cos^3\varphi_0+\frac{1}{2}h^2\cos^2\varphi_0(1-3\sin^2\varphi_0) \\ \qquad-\frac{3}{8}h^4\cos^6\varphi_0(3+5\sin^2\varphi_0) \\ +\frac{2}{3}h^5\frac{\cos^7\varphi_0}{\sin\varphi_0}(2+3\sin^2\varphi_0+9\sin^4\varphi_0)+\ldots\Big\}. \end{cases}$$

Die untere Integrationsgrenze von J_3 wird für die Integrationsvariable η, entsprechend

$$\delta=-h\sqrt{2}\cos^2\varphi_0,$$

nach (17)

$$(21)\quad\begin{cases} -i\beta=-i\left(\frac{kp}{\pi}\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0\right)^{1/3} \\ \quad\cdot h\left(1+\frac{1-2i}{3}h\operatorname{ctg}\varphi_0(1+3\sin^2\varphi_0)\right), \end{cases}$$

die obere Integrationsgrenze, entsprechend $\delta=\infty$

$$e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\infty.$$

In dem Ausdruck für β vernachlässigen wir noch das zweite Glied in der Klammer, setzen also

$$(21')\qquad\beta=\left(\frac{kp}{\pi}\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0\right)^{1/3}\cdot h,$$

so daß die untere Grenze rein imaginär wird.

Wir deformieren nun den Integrationsweg in einer η-Ebene in die in Fig. 8 mit (1), (2), (3) bezeichneten Bestandteile. Längs der Strecke (1) führen wir durch die Beziehung

$\eta = -i\eta'$ eine neue Integrationsvariable η' ein, die wir hinterher wieder mit η bezeichnen. Berücksichtigen wir, daß in erster Näherung

$$m_3 = 3\beta^2,$$

so wird

$$\int_{-i\beta}^{0} e^{i\frac{\pi}{2}(\eta^3 - m_3\eta)}\, d\eta = i\int_{0}^{\sqrt{m_3/3}} e^{-\frac{\pi}{2}(\eta^3 + m_3\eta)}\, d\eta;$$

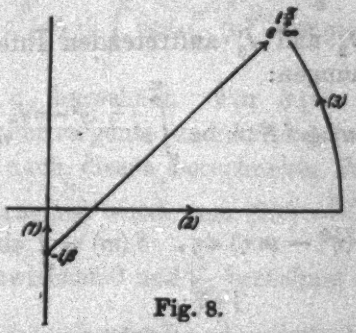


Fig. 8.

in der Dissertation ist nachgewiesen, daß das links stehende Integral mit dem Werte (21) für $-i\beta$ mit hinreichender Genauigkeit mit dem rechts stehenden übereinstimmt. Das über (2) erstreckte Integral ist das gewöhnliche Airysche Integral mit den Grenzen 0 und ∞. Auf dem in großer Entfernung liegenden Bogen (3) hat der Exponent einen großen negativen reellen Teil, das Integral verschwindet daher längs (3).

Da nach (17) noch

$$d\delta = e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{kp}\,\frac{\cos^4\varphi_0}{\sin\varphi_0}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{1}{8}\,h\,\mathrm{ctg}\,\varphi_0(1 + 3\sin^2\varphi_0)\right) d\eta,$$

so wird schließlich

$$(22)\quad \begin{cases} J_3 = \left(\dfrac{\pi}{kp}\,\dfrac{\cos^4\varphi_0}{\sin\varphi_0}\right)^{1/3} \left(1 - \dfrac{1}{8}\,h\,\mathrm{ctg}\,\varphi_0\,(1 + 3\,\sin^2\varphi_0)\right) \\ \qquad e^{\alpha_3}\left(\displaystyle\int_0^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}(\eta^3 - m_3\eta)}\, d\eta + i\int_0^{\sqrt{m_3/3}} e^{-\frac{\pi}{2}(\eta^3 + m_3\eta)}\, d\eta\right). \end{cases}$$

Dabei haben m_3 und α_3 die in (19) und (20) angegebenen Werte.

In ähnlicher Weise hat man das Integral J_2, über den Sattelpunkt φ_2 auszuwerten. Den Parameter m_2 des Airyschen Integrals und den Phasenfaktor e^{α_2} erhält man, wenn man in m_3 und $e^{\alpha_3} h$ ersetzt durch $-h$. Dann wird

$$(22') \quad \begin{cases} J_2 = \left(\frac{\pi}{kp}\,\frac{\cos^4\varphi_0}{\sin\varphi_0}\right)^{1/3}\left(1+\frac{1}{3}\,h\,\operatorname{ctg}\varphi_0\,(1+3\sin^2\varphi_0)\right) \\ \qquad e^{\alpha_2}\left(\int_0^\infty e^{-i\frac{\pi}{2}(\eta^3-m_2\eta)}\,d\eta - i\int_0^{\sqrt{m_2/3}} e^{-\frac{\pi}{2}(\eta^3+m_2\eta)}\,d\eta\right). \end{cases}$$

Für die in J_2 und J_3 auftretenden Integrale wählen wir folgende Bezeichnungen:

$$C(m) + i\,S(m) = \int_0^\infty e^{i\frac{\pi}{2}(\eta^3-m\eta)}\,d\eta,$$

also

$$C(m) = \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(\eta^3 - m\eta)\,d\eta, \quad S(m) = \int_0^\infty \sin\frac{\pi}{2}(\eta^3 - m\eta)\,d\eta,$$

$$E(m) = \int_0^{\sqrt{m/3}} e^{-\frac{\pi}{2}(\eta^3+m\eta)}\,d\eta;$$

je nachdem das Argument m_2 oder m_3 ist, schreiben wir C_2 statt $C(m_2)$, S_3 statt $S(m_3)$ usw.

Für den Lichtvektor ergibt sich nach (22) und (22'):

$$(23) \quad \begin{cases} \pi\mathfrak{P} = J_3 + J_2 = \left(\frac{\pi}{kp}\,\frac{\cos^4\varphi_0}{\sin\varphi_0}\right)^{1/3} \\ \qquad \cdot\left\{\left(1-\frac{1}{3}\,h\operatorname{ctg}\varphi_0(1+3\sin^2\varphi_0)\right)e^{\alpha_3}[C_3 + i(S_3+E_3)]\right. \\ \qquad \left. + \left(1+\frac{1}{3}\,h\operatorname{ctg}\varphi_0(1+3\sin^2\varphi_0)\right)e^{\alpha_2}[C_2 - i(S_2+E_2)]\right\}. \end{cases}$$

Durch Multiplikation von $\mathfrak{P}$ mit seinem konjugiert komplexen Wert $\bar{\mathfrak{P}}$ finden wir die Intensität; vernachlässigen wir das Quadrat von $\frac{1}{3}\,h\operatorname{ctg}\varphi_0\,(1+3\sin^2\varphi_0)$ gegen 1, so folgt

$$(23') \quad \begin{cases} \pi^2\,|\mathfrak{P}|^2 = \left(\frac{\pi}{kp}\,\frac{\cos^4\varphi_0}{\sin\varphi_0}\right)^{2/3}\cdot\left\{(C_3+C_2)^2+(S_3+E_3-S_2-E_2)^2\right. \\ \qquad -\frac{2}{3}\,h\operatorname{ctg}\varphi_0\,(1+3\sin^2\varphi_0) \\ \qquad\qquad [C_3^2 - C_2^2 + (S_3+E_3)^2 - (S_2+E_2)^2] \\ \qquad \left. -2\,[C_2(S_3+E_3)+C_3(S_2+E_2)]\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{3}\right\}. \end{cases}$$

$\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{i}$ darf durch das erste Glied seiner Entwicklung ersetzt werden (vgl. 20):

$$\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{i} = \frac{4}{3} k p h^5 \frac{\cos^4 \varphi_0}{\sin \varphi_0} (2 + 3 \sin^2 \varphi_0 + 9 \sin^4 \varphi_0);$$

$\cos \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{i}$ ist in (23′) durch 1 ersetzt. (23′) gibt die Intensitätsverteilung für innere Punkte in nächster Nähe der Brennlinie.

Die Funktion

$$C(m) = \int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2} (\eta^3 - m\eta)\, d\eta$$

ist von Airy, l. c., berechnet. Für $S(m)$ und $E(m)$ sind in der Dissertation konvergente und halbkonvergente Reihen entwickelt und die nach diesen berechneten Tabellen angegeben. Mittels dieser Tabellen wurde aus (23′) $\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} 10^4 |\mathfrak{B}|^2$ (vgl. 16) für Werte von h zwischen 0 und $\frac{1}{10}$ berechnet und die Intensitätskurve 7 für dieses Intervall vervollständigt. Für $h = \frac{1}{10}$ liefern (16) und (23′) Werte, die um 5—6 Proz. voneinander abweichen.

Wir bemerken noch, daß (23) seiner Ableitung nach auch für größere Werte von h gültig bleibt, wenn man nur an Stelle von m_3, m_2, $d\delta$ ihre Werte (18) und (17) und nicht die ersten Glieder ihrer Entwicklung nach h setzt. In der Tat geht (23) in (16) über, wenn man für C, S, E ihre asymptotischen Werte nimmt. Aus demselben Grunde stimmen bei Mascart und Möbius die hellen und dunklen Streifen des Regenbogens überein, wie sie einerseits durch Integration, andrerseits durch Interferenz der geometrischen Strahlen berechnet werden; der Wert für die Intensität bei Mascart, S. 400, ist bis auf einen konstanten Faktor der asymptotische Ausdruck für das Quadrat des Airyschen Integrals.

Fall B: $r > 0$.

Den Integrationsweg wählen wir wie in § 5 durch φ_2 parallel zur Ξ-Achse. Um w_2 und seine Ableitungen zu erhalten, haben wir in (14) h durch ih zu ersetzen. Durch die Substitution

$$\eta = \left(\frac{w_3'''}{3\pi i}\right)^{1/3} \cdot \left(\delta + \frac{w_3''}{w_3'''}\right)$$

stellen wir wie im Fall *A* wieder die Normalform des Airyschen Integrals her, dessen Parameter

$$m = -3\left(\frac{kp}{\pi}\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0\right)^{2/3} h^2\left(1 + \frac{2}{3} ih \operatorname{ctg}\varphi_0 (1 + 3\sin^2\varphi_0)\right)$$

wird; um nicht zu komplizierte Ausdrücke (komplexes Argument des Airyschen Integrals) zu erhalten, berücksichtigen wir nur das erste Glied von m und erhalten so einen etwas rascheren Abfall der Intensität als bei der genauen Rechnung. Die Integrationsgrenzen für δ, also auch für η sind $\mp\infty$, also wird

$$J_3 = \left(\frac{\pi}{kp}\frac{\cos^4\varphi_0}{\sin\varphi_0}\right)^{1/3} e^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2}(\eta^3 - m\eta)}\, d\eta = 2\left(\frac{\pi}{kp}\frac{\cos^4\varphi_0}{\sin\varphi_0}\right)^{1/3} e^{\alpha} C(m);$$

$1 - \frac{i}{3} h \operatorname{ctg}\varphi_0 (1 + 3\sin^2\varphi_0)$ ist dabei durch 1 ersetzt. Die Intensität wird

$$\pi^2 |\mathfrak{B}|^2 = 4\left(\frac{\pi}{kp}\frac{\cos^4\varphi_0}{\sin\varphi_0}\right)^{2/3} C(m)^2, \tag{24}$$

wenn noch $e^{2\alpha}$ mit

$$\alpha = -\frac{2}{3} kp h^5 \frac{\cos^4\varphi_0}{\sin\varphi_0}(2 + 3\sin^2\varphi_0 + 9\sin^4\varphi_0)$$

gleich 1 gesetzt wird. Nach (24) ist die Intensitätskurve (7) für das Gebiet des geometrischen Schattens ergänzt.

Für $\varphi_0 = 45°$ ergibt sich so in nächster Nähe der Brennlinie im beleuchteten Teil ein Anstieg der Intensität bis zu dem hohen breiten Maximum bei $r = 6\lambda$, entsprechend einem Verhalten des Lichtvektors wie $(kp)^{-1/3}$ (vgl. 23), für die folgenden Maxima, die nach (16') berechnet sind, verhält sich der Lichtvektor wie $(kp)^{-1/3}$. Im geometrischen Schatten erhalten wir einen raschen experimentellen Abfall der Intensität.

§ 7. Die Intensitätsverteilung auf einer Senkrechten zur Achse durch die Spitze der Brennlinie.

Liegt der Aufpunkt auf der Y-Achse, so ist nach § 3 (S. 368) unter Benutzung der Abkürzung $\varrho = \left(\frac{2y}{p}\right)^{1/2}$ der reelle Sattelpunkt φ_1 gegeben durch $\operatorname{tg}\varphi_1 = -\varrho$, der im Gebiete $U < 0$ gelegene Sattelpunkt φ_3 durch

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = -\omega^2\varrho, \quad \text{wobei} \quad \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Die Integrale J_1 und J_3 über diese Sattelpunkte haben wir auszuwerten.

Zur Berechnung von J_1 setzen wir

$$\varphi = \varphi_1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\delta, \qquad d\varphi = e^{i\frac{\pi}{4}}d\delta; \tag{25}$$

daher

$$\left\{\begin{aligned} w(\varphi) = w_1 &+ \frac{w_1''}{2!}e^{i\frac{\pi}{2}}\delta^2 + \frac{w_1'''}{3!}e^{i\frac{3\pi}{4}}\delta^3 + \frac{w_1^{IV}}{4!}e^{i\pi}\delta^4 \\ &+ \frac{w_1^{V}}{5!}e^{i\frac{5\pi}{4}}\delta_5 + \cdots, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

wenn wieder $w(\varphi_1) = w_1$ usw. gesetzt wird. Um die Werte von w_1 und seine Abgeleiteten zu erhalten, haben wir die Ausdrücke (6) für

$$\varphi = \varphi_1, \qquad x = 0, \qquad y = \frac{p}{2}\varrho^3$$

zu nehmen und $\operatorname{tg}\varphi_1$ durch $-\varrho$, also $\sin\varphi_1$ und $\cos\varphi_1$ durch

$$\frac{-\varrho}{\sqrt{1+\varrho^3}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sqrt{1+\varrho^3}}$$

zu ersetzen; entwickeln wir die erhaltenen Ausdrücke gleich nach Potenzen von ϱ, so ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} w_1 &= ikp\left(1-\tfrac{1}{2}\varrho^3\right)\sqrt{1+\varrho^3} - ikp \\ &= -\tfrac{3}{8}ikp\varrho^4\left(1-\tfrac{1}{3}\varrho^3+\tfrac{3}{16}\varrho^4-\cdots\right), \\ w_1'' &= \tfrac{3}{2}ikp\varrho^2\sqrt{1+\varrho^3} \\ &= \tfrac{3}{2}ikp\varrho^2\left(1+\tfrac{1}{2}\varrho^3-\tfrac{1}{8}\varrho^4+\cdots\right), \\ w_1''' &= -3ikp\varrho\sqrt{1+\varrho^3}^3 \\ &= -3ikp\varrho\left(1+\tfrac{3}{2}\varrho^3+\tfrac{3}{8}\varrho^4-\cdots\right), \\ w_1^{IV} &= 3ikp\left(1+\tfrac{9}{2}\varrho^3+4\varrho^4\right)\sqrt{1+\varrho^3} \\ &= 3ikp\left(1+5\varrho^3+\tfrac{49}{8}\varrho^4+\cdots\right), \\ w_1^{V} &= -30ikp\varrho\,(1+2\varrho^3)\sqrt{1+\varrho^3}. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Da für $y = 0$, also auch $\varrho = 0$, sowohl w_1'' als auch w_1''' verschwinden und erst w_1^{IV} von Null verschieden ist, müssen wir für kleine ϱ die Glieder wenigstens bis 4. Ordnung einschließlich berücksichtigen. In der Dissertation ist nachgewiesen, daß wir bis zu Werten $\varrho = \frac{1}{5}$ wegen der schnellen Veränderlichkeit der Phase von $w(\varphi)$ die Glieder fünfter und höherer Ordnung in δ vernachlässigen und als untere Integrationsgrenze $\delta = -\infty$ annehmen dürfen.

Wir führen zunächst in (26) eine neue Variable ε ein

$$\varepsilon^4 \frac{w_1^{IV}}{24\,i}\,\delta^4 = \varepsilon^4, \quad \text{d. h.} \quad \delta = e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{24\,i}{w_1^{IV}}\right)^{1/4} \varepsilon,$$

so daß

$$w = w_1 + i\left[\varepsilon^4 + \frac{w_1'''}{6\,i}\left(\frac{24\,i}{w_1^{IV}}\right)^{3/4}\varepsilon^3 + \frac{w_1''}{2\,i}\left(\frac{24\,i}{w_1^{IV}}\right)^{1/2}\varepsilon^2\right];$$

durch die Substitution

$$(28) \qquad \eta = \varepsilon + \frac{w_1'''}{24\,i}\left(\frac{24\,i}{w_1^{IV}}\right)^{3/4} = \left(\frac{w_1^{IV}}{24\,i}\right)^{1/4}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\,\delta + \frac{w_1'''}{w_1^{IV}}\right)$$

entfernen wir das Glied mit ε^3 und erhalten

$$w = w_1 + i\,l + i(\eta^4 + m\,\eta^2 + n\,\eta);$$

dabei sind l, m, n Abkürzungen für folgende Ausdrücke:

$$(29)\quad \begin{cases} l = \frac{1}{2}\left(\frac{w_1'''}{w_1^{IV}}\right)^2\left(\frac{w_1''}{\dot{}} - \frac{\left(\frac{w_1'''}{\dot{}}\right)^2}{4\,\frac{w_1^{IV}}{\dot{}}}\right) \\ \qquad = \frac{3}{8}\,kp\,\varrho^4\left(1 - 4\varrho^2 + \frac{61}{8}\,\varrho^4 \ldots\right), \\ m = \frac{1}{2}\left(\frac{24\,i}{w_1^{IV}}\right)^{1/2}\left(\frac{w_1''}{\dot{}} - \frac{\left(\frac{w_1'''}{\dot{}}\right)^2}{2\,\frac{w_1^{IV}}{\dot{}}}\right) \\ \qquad = \frac{15}{4}\,(2\,kp)^{1/2}\,\varrho^4\left(1 - \frac{53}{10}\,\varrho^2 + \frac{1791}{80}\,\varrho^4 - \ldots\right), \\ n = -\left(\frac{24\,i}{w_1^{IV}}\right)^{1/4}\frac{w_1'''}{w_1^{IV}}\left(\frac{w_1''}{\dot{}} - \frac{\left(\frac{w_1'''}{\dot{}}\right)^2}{3\,\frac{w_1^{IV}}{\dot{}}}\right) \\ \qquad = 2^{-1/4}\,(kp)^{3/4}\,\varrho^3\left(1 + \frac{3}{4}\,\varrho^2 - \frac{87}{4}\,\varrho^4 + \ldots\right). \end{cases}$$

m verschwindet wie ϱ^4, während sich n wie ϱ^3 verhält; wir dürfen daher, wie in der Dissertation zahlenmäßig begründet, das Glied $m\eta^3$ bis zu Werten $\varrho = \frac{1}{5}$ vernachlässigen und uns in der Entwicklung von n auf das erste Glied beschränken, also setzen

$$n = 2^{-1/4}(kp)^{3/4}\varrho^3 = (2kp)^{3/4}\frac{y}{p}\,. \tag{30}$$

Die von der Integrationsvariablen η unabhängigen Glieder sind

$$w_1 + il = -\frac{11}{8}\,ikp\,\varrho^6 + \frac{357}{128}\,ikp\,\varrho^8 + \ldots = -\frac{11}{2}\,ikp\left(\frac{y}{p}\right)^3,$$

wenn wir auch hier die höheren Glieder vernachlässigen. In derselben Näherung wird nach (28)

$$d\delta = e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} d\eta\,.$$

Setzen wir diese Werte in J_1 ein, so ergibt sich schließlich

$$J_1 = \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} e^{-\frac{11}{2}ikp\left(\frac{y}{p}\right)^3} \int_{-\infty}^{\bar{\eta}_1} e^{i(\eta^4 + n\eta)}\, d\eta\,. \tag{31}$$

Die Integration ist zu erstrecken zunächst von $\delta = -\infty$ bis zu einem weiter unten zu bestimmenden $\delta = \delta_1$, also nach η von $-e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\infty$ bis $\eta = \bar{\eta}_1$, das sich aus (28) ergibt. Wir deformieren den Integrationsweg von $-e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\infty$ bis Null und von da nach $\bar{\eta}_1$; im ersten Integral dürfen wir als Integrationsgrenzen $-\infty$ und 0 wählen, da der Exponent für große Werte von η, deren Phase im Intervall $-\frac{3\pi}{4}\ldots-\pi$ liegt, einen großen negativen reellen Teil hat.

Den Integrationsweg über φ_3 wählen wir parallel zur Ξ-Achse, setzen also

$$\varphi = \varphi_3 + \delta, \qquad d\varphi = d\delta;$$

daher wird bis auf Glieder vierter Ordnung einschließlich

$$w = w_3 + \frac{w_3''}{2}\delta^2 + \frac{w_3'''}{6}\delta^3 + \frac{w_3^{IV}}{24}\delta^4.$$

Führen wir als neue Integrationsvariable η ein:

$$\eta = \left(\frac{w_3^{IV}}{24\,i}\right)^{1/4}\cdot\left(\delta + \frac{w_3'''}{w_3^{IV}}\right), \tag{28'}$$

so nimmt der Exponent dieselbe Form wie bei J_1 an:

$$w = w_3 + il + i(\eta^4 + m\eta^2 + n\eta),$$

wo l, m, n dieselben Ausdrücke sind wie in (29), nur daß $\omega^2\varrho$ an Stelle von ϱ zu setzen ist. Wie in J_1 dürfen wir $m\eta^2$ vernachlässigen und uns in n, $w_3 + il$, $d\delta$ auf die ersten Glieder beschränken; wir erhalten dann dieselben reellen Werte wie bei J_1, und es wird

$$(31') \qquad J_3 = \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} e^{-\frac{11}{2} i kp \left(\frac{y}{p}\right)^3} \int_{\bar\eta_3}^{\infty} e^{i(\eta^4 + n\eta)} d\eta .$$

Um nun die Integrationsgrenzen δ_1 und δ_3 für δ zu bestimmen, bringen wir die als geradlinig angenommenen Integrationswege über φ_1 und φ_3 zum Schnitt:

$$\varphi_1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \delta_1 = \varphi_3 + \delta_3 ;$$

φ_1 und φ_3 ersetzen wir durch ihre in § 3 (S. 368) berechneten Werte:

$$-\operatorname{arctg}\varrho + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\delta_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\varrho}{1-\varrho^3} + \frac{i}{4}\log\frac{1+\sqrt{3}\varrho+\varrho^2}{1-\sqrt{3}\varrho+\varrho^2} + \delta_1 .$$

Durch Vergleichen der reellen und imaginären Bestandteile finden wir hieraus δ_1 und δ_3, und zwar wird bis auf Glieder fünfter Ordnung (die Glieder mit ϱ^3 sind Null):

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}\varrho, \qquad \delta_3 = -\frac{3-\sqrt{3}}{2}\varrho .$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (28) und (28′) ergeben sich die Integrationsgrenzen $\bar\eta_1$ und $\bar\eta_3$, die sich erst in Gliedern dritter Ordnung unterscheiden (vgl. Dissertation). Bilden wir nun

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \pi\mathfrak{B} = J_1 + J_3 = \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} & e^{-\frac{11}{2} i kp \left(\frac{y}{p}\right)^3} \\ & \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\eta^4 + n\eta)} d\eta + \int_{\bar\eta_3}^{-\bar\eta_1} e^{i(\eta^4 + n\eta)} d\eta \right), \end{aligned} \right.$$

so verhält sich das zweite Integral nach dem Mittelwertsatz auch wie ϱ^3, darf also gegenüber dem ersten vernachlässigt werden.

Setzen wir zur Abkürzung

$$F(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\eta^4 + n\eta)\, d\eta, \qquad G(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\eta^4 + n\eta)\, d\eta,$$

so wird die Intensität

$$\pi^2 |\mathfrak{B}|^2 = \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/2} [F(n)^2 + G(n)^2], \tag{32'}$$

wobei das Argument von F und G

$$n = (2kp)^{3/4} \frac{y}{p}$$

ist.

In der Dissertation sind für $F(n)$ und $G(n)$ konvergente und halbkonvergente Reihen und Tabellen angegeben; nach diesen wurde $F^2 + G^2$, das der Intensität proportional ist, berechnet und in Fig. 9 zur Abszisse y/λ aufgetragen. Man er-

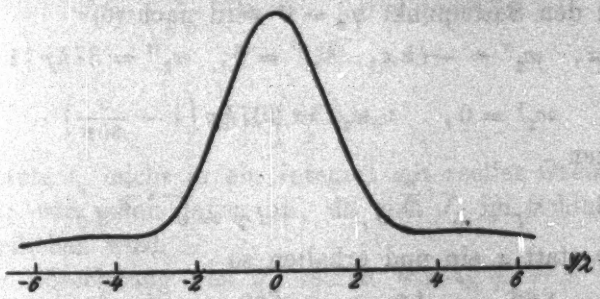


Fig. 9.

hält zu beiden Seiten des der Spitze der Brennlinie entsprechenden hohen Maximums, das einem Verhalten von $\mathfrak{B}$ wie $(kp)^{-1/4}$ entspricht, einen raschen Abfall der Intensität bis zu einem Minimum, das das 0,135fache des Maximums beträgt und bei $y = 3{,}7\,\lambda$ liegt. Diesem folgt bis etwa $y = 4{,}5\,\lambda$ ein kaum merklicher Anstieg bis zum 1,03fachen des Minimums und weiterhin ein sehr langsamer Abfall der Intensität. Daß diese immer noch merklich von Null verschieden ist, kommt daher, daß der Aufpunkt dem Gebiete I (Fig. 6) angehört, durch dessen Punkte ein Lichtstrahl im Sinne der geometrischen Optik geht. Bei nicht zu kleiner Öffnung des Bündels wird die Y-Achse von den Randstrahlen erst in größerer Entfernung geschnitten (für $\alpha = 30°$ bei $y = 0{,}29\,p$), so daß

die von den Randstrahlen herrührenden Beugungserscheinungen bei etwa $y = 10\,\lambda$ noch nicht in Frage kommen.

Für größere Entfernung von der Spitze der Brennlinie läßt sich die Intensität wie in § 5 berechnen, wenn man die Entwicklung (26) für $w(\varphi)$ mit dem quadratischen Glied abbricht.

§ 8. Die Intensitätsverteilung auf der Achse der Brennlinie.

Je nachdem der Aufpunkt auf der Achse des Bündels ($y = 0$) im Innern ($x > 0$) oder im Äußern ($x < 0$) der Brennlinie liegt, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

A. Ist $x > 0$, so sind nach § 3 (S. 370) die Sattelpunkte bei Benutzung der Abkürzung $\sigma^2 = \frac{2x}{p}$ bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\sigma, \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = 0, \qquad \operatorname{tg}\varphi_3 = +\sigma.$$

Über diese drei reellen Sattelpunkte haben wir zu integrieren.

Für den Sattelpunkt $\varphi_2 = 0$ wird nach (6)

$$w_2 = ikx, \quad w_2'' = -ikx, \quad w_2''' = 0, \quad w_2^{IV} = 3ikp\left(1 + \frac{x}{3p}\right),$$

$$w_2^{V} = 0, \qquad w_2^{VI} = 30ikp\left(1 - \frac{x}{30p}\right).$$

Wir setzen

$$\varphi = e^{-i\frac{\pi}{4}}\delta, \qquad d\varphi = e^{-i\frac{\pi}{4}}d\delta,$$

führen σ statt x ein und erhalten so

$$w(\varphi) = \frac{ikp}{2}\sigma^2 - \frac{kp}{4}\sigma^2\delta^2 - \frac{ikp}{8}\left(1 + \frac{1}{6}\sigma^2\right)\delta^4 - \frac{kp}{24}\left(1 - \frac{1}{60}\sigma^2\right)\delta^6 - \dots .$$

Da w_2'' für kleine σ verschwindet, müssen wir das Glied vierter Ordnung beibehalten. Die als geradlinig angenommenen Integrationswege über die Sattelpunkte bringen wir zum Schnitt, nehmen also als Integrationsgrenzen für δ die Katheten gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke mit der Hypotenuse $\varphi_3 = \operatorname{arctg}\sigma$, also

$$\delta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sigma .$$

Die abzuleitenden Formeln benutzen wir für Werte von σ^2 bis etwa $\frac{1}{30}$, also $x = \frac{p}{60}$; für solche Werte darf aber das Glied sechster Ordnung in der Entwicklung für $w(\varphi)$ vernach-

lässigt werden, ebenso im Glied vierter Ordnung $\frac{1}{8}\sigma^2$ gegenüber 1.

Führen wir als neue Integrationsvariable η ein durch die Beziehung

$$e^{-i\frac{\pi}{2}}\frac{kp}{8}\delta^4 = e^{i\frac{\pi}{2}}\eta^4, \qquad \text{also} \qquad \delta = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4}\eta\,,$$

so wird

$$w(\varphi) = \frac{ikp}{2}\sigma^2 + i\left[\eta^4 - \left(\frac{kp}{2}\right)^{1/2}\sigma^2\eta^2\right],$$

und die Integrationsgrenzen für η werden $\mp\bar{\eta}_2$, wo

$$\bar{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(\frac{kp}{8}\right)^{1/4}\operatorname{arctg}\sigma\,.$$

Daher

$$J_2 = \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} e^{\frac{ikp}{2}\sigma^2}\int_{-\bar{\eta}_2}^{+\bar{\eta}_2} e^{i(\eta^4 - m\eta^2)}\,d\eta\,, \tag{33}$$

wenn

$$m = \left(\frac{kp}{2}\right)^{1/2}\sigma^2\,. \tag{34}$$

Man könnte J_2 leicht in ein Integral mit reellen Grenzen verwandeln; wir sehen davon ab, da sich J_2 im Schlußresultat doch fortheben wird.

Zur Berechnung von J_2 setzen wir $\operatorname{tg}\varphi_2 = \sigma$ und die daraus folgenden Werte

$$\sin\varphi_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}, \qquad \cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}},$$

ferner

$$x = \frac{p}{2}\sigma^2, \qquad y = 0$$

in (6) ein und erhalten

$$\left\{\begin{aligned} w_2 &= ikp(\sqrt{1+\sigma^2}-1), \qquad w_2'' = ikp\,\sigma^2\sqrt{1+\sigma^2}\,,\\ w_2''' &= 3ikp\,\sigma\sqrt{1+\sigma^2}^{\,3}\,,\\ w_2^{IV} &= 3ikp\left(1+\frac{14}{3}\sigma^2+4\sigma^4\right)\sqrt{1+\sigma^2}\,,\\ w_1^{V} &= 30ikp\,\sigma(1+2\sigma^2)\sqrt{1+\sigma^2}^{\,3}\,. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Führt man, wie früher, δ ein:

$$\varphi = \varphi_2 + e^{i\frac{\pi}{4}}\delta,$$

so nimmt w die Form (26) an. Für $\sigma^2 = \frac{1}{80}$ wird, wie man sich leicht überzeugt, w eine schnell veränderliche Funktion, das Integral also Null, wenn etwa $\delta \geqq \frac{1}{10}$; für $\delta \leqq \frac{1}{10}$ sind aber die Glieder fünfter und höherer Ordnung unwesentlich.

Führen wir, wie in § 7 (S. 386), statt δ zunächst die Variable ε und dann η ein, so nimmt w wieder die Form an

$$w(\varphi) = w_3 + il + i(\eta^4 - m\eta^2 - n\eta);$$

dabei ist

$$(36)\quad \begin{cases} l = \frac{1}{2}\left(\frac{w_3'''}{w_3^{IV}}\right)^2 \left(\frac{w_3''}{i} - \frac{\left(\frac{w_3'''}{i}\right)^2}{4\frac{w_3^{IV}}{i}}\right) = \frac{kp}{8}\sigma^4\left(1 + \frac{7}{6}\sigma^2 - \ldots\right) \\ m = -\frac{1}{2}\left(\frac{24i}{w_3^{IV}}\right)^{1/2}\left(\frac{w_3''}{i} - \frac{\left(\frac{w_3'''}{i}\right)^2}{2\frac{w_3^{IV}}{i}}\right) \\ \qquad = \left(\frac{kp}{2}\right)^{1/2}\sigma^2\left(1 - \frac{121}{12}\sigma^2 + \ldots\right) \\ n = \left(\frac{24i}{w_3^{IV}}\right)^{1/4}\frac{w_3'''}{w_3^{IV}}\left(\frac{w_3''}{i} - \frac{\left(\frac{w_3'''}{i}\right)^2}{3\frac{w_3^{IV}}{i}}\right) \\ \qquad = \frac{8}{3}(2kp)^{3/4}\sigma^5(1 - 8\sigma^2 + \ldots). \end{cases}$$

Im Exponenten unter dem Integralzeichen verhält sich der Faktor n von η wie σ^5, während der Faktor m von η^2 wie σ^2 verschwindet. Für Werte von σ^2 bis $\frac{1}{80}$ darf daher das Glied $n\eta$ vernachlässigt und außerdem m durch sein erstes Glied ersetzt werden (vgl. die zahlenmäßige Begründung in der Dissertation). Dadurch erhält aber der Integrand von J_3 dieselbe charakteristische Form wie J_2 und denselben Parameter (34)

$$m = \left(\frac{kp}{2}\right)^{1/2}\sigma^2.$$

Die Integrationsgrenzen in δ sind $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sigma$, $+\infty$, in η also

$$\eta_3 = \left(\frac{w_3^{IV}}{24i}\right)^{1/4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\operatorname{arctg}\sigma + \frac{w_3'''}{w_3^{IV}}\right)$$

$$= \left(\frac{kp}{8}\right)^{1/4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sigma - \frac{137 + 28i}{48}\sigma^3 + \ldots\right)$$

und $e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \infty$;

vernachlässigen wir in η_3 die Glieder von σ^3 an, so wird $\bar{\eta}_3 = \bar{\eta}_2$. Wir zerlegen J_3 in zwei Integrale von $\bar{\eta}_3$ bis 0 und von 0 bis $e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \infty$; in letzterem dürfen wir als Grenzen 0 und ∞ wählen. Berücksichtigen wir auch von dem vor das Integral tretenden Faktor

$$\left(\frac{24\,i}{w_3^{IV}}\right)^{1/4} = \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4}\left(1 - \frac{31}{24}\sigma^2 + \ldots\right)$$

nur das erste Glied, ebenso von

$$w_3 + il = \frac{ikp}{2}\sigma^2 + \frac{5}{32}ikp\,\sigma^6 - \ldots,$$

wobei sich die Glieder vierter Ordnung ohnehin wegheben, so wird

$$J_3 = \left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} e^{ikx}\left(\int_0^{\infty} e^{i(\eta^4 - m\eta^2)}\,d\eta + \int_{\bar{\eta}_3}^{0} e^{i(\eta^4 - m\eta^2)}\,d\eta\right).$$

Da für $y = 0$ $w(\varphi)$ nach (6) eine gerade Funktion von φ ist, so wird $J_1 = J_3$. In der Summe $J_1 + J_2 + J_3$ der Integrale über die drei Sattelpunkte hebt sich also J_2 auf gegen das zweite in J_1 und J_3 auftretende Integral und wir erhalten schließlich für den Lichtvektor

$$\mathfrak{B} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} e^{ikx}\int_0^{\infty} e^{i(\eta^4 - m\eta^2)}\,d\eta \tag{37}$$

mit der Abkürzung

$$m = (2kp)^{1/2}\frac{x}{p}.$$

Setzen wir

$$K(m) = \int_0^{\infty}\cos(\eta^4 - m\eta^2)\,d\eta, \qquad L(m) = \int_0^{\infty}\sin(\eta^4 - m\eta^2)\,d\eta,$$

so wird die Intensität

$$|\mathfrak{B}|^2 = \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{2}{kp}\right)^{1/2}[K(m)^2 + L(m)^2]. \tag{37'}$$

Die Funktionen $K(m)$ und $L(m)$ sind in der Dissertation diskutiert; sie hängen, wie auch hier bemerkt sei, in folgender Weise mit den Besselschen Funktionen $J_{\pm 1/4}$ zusammen:

$$K(m) = \frac{\pi}{8}\sqrt{2m}\left\{\cos\frac{m^2+\pi}{8}\cdot J_{1/4}\left(\frac{m^2}{8}\right) + \cos\frac{m^2-\pi}{8}J_{-1/4}\left(\frac{m^2}{8}\right)\right\},$$

$$L(m) = -\frac{\pi}{8}\sqrt{2m}\left\{\sin\frac{m^2+\pi}{8}J_{1/4}\left(\frac{m^2}{8}\right) + \sin\frac{m^2-\pi}{8}J_{-1/4}\left(\frac{m^2}{8}\right)\right\}.$$

Für größere Werte von σ^2 dürfen wir die Entwicklung von w mit dem quadratischen Glied abbrechen und als Integrationsgrenzen für $\delta \mp \infty$ annehmen. Wir erhalten

$$J_1 = e^{\frac{ikp}{2}\sigma^2 - i\frac{\pi}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{kp}{4}\sigma^2\delta^2}\,d\delta = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\pi}{kp}}\,e^{\frac{ikp}{2}\sigma^2 - i\frac{\pi}{4}},$$

$$J_1 = J_3 = e^{w_2 + i\frac{\pi}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{w_2''}{2i}\delta^2}\,d\delta = \sqrt{\frac{2i\pi}{w_2''}}\,e^{w_2 + i\frac{\pi}{4}},$$

wo für w_2 und w_2'' ihre Werte (35) einzusetzen sind. Die Summe der drei Integrale liefert wieder bis auf den Faktor π den Lichtvektor $\mathfrak{P}$. Die Intensität wird

$$\pi^2|\mathfrak{P}|^2 = \frac{4\pi}{kp\,\sigma^2} + \frac{8i\pi}{w_2''} - \frac{8\pi}{kp\,\sigma}\sqrt{\frac{2ikp}{w_2''}}\sin\left(\frac{w_2}{i} - \frac{kp}{2}\sigma^2\right);$$

entwickeln wir zunächst nach Potenzen von σ^2 und führen dann an Stelle von σ^2 dieselbe Variable ein, die wir in dem für die nächste Nähe der Spitze gültigen Ausdruck (37) benutzt haben, nämlich

$$m = \sqrt{\frac{kp}{2}}\,\sigma^2,$$

so wird unter der Annahme $kp = 10^4$:

$$(38)\quad \begin{cases} |\mathfrak{P}|^2 = \dfrac{6}{\pi}\sqrt{\dfrac{2}{kp}}\cdot\dfrac{1}{m} \\ \qquad\cdot\left\{1 - 0{,}00482\,m + 0{,}00005\,m^2 - 0{,}00000059\,m^3\right. \\ \qquad + 0{,}9428\cdot(1 - 0{,}00354\,m + 0{,}0000310\,m^2 \\ \qquad\qquad - 0{,}00000023\,m^3 + \ldots) \\ \qquad\left.\times\sin\dfrac{m^2}{4}(1 - 0{,}00707\,m + 0{,}0000625\,m^2 - \ldots)\right\}. \end{cases}$$

B. Liegt der Aufpunkt außerhalb der Brennlinie ($x < 0$) in nächster Nähe der Spitze, so haben wir nach Fig. 5a außer dem reellen Sattelpunkt $\varphi_2 = 0$ auf der imaginären Achse die Sattelpunkte φ_1, φ_3 symmetrisch zu $\varphi_2 = 0$ in sehr geringer

Entfernung voneinander. Wir dürfen (vgl. die Dissertation) schon von $x = 1{,}25\,\lambda$ an die Entwicklung von w mit dem Glied vierter Ordnung abbrechen und als Integrationsgrenzen für das auf der Fallinie durch $\varphi_2 = 0$ gemessene $\delta \mp \infty$ annehmen. Berechnen wir J_2 in derselben Weise wie im Fall A, so wird

$$J_2 = 2\left(\frac{8}{kp}\right)^{1/4} e^{ikx} \int_0^\infty e^{i(\eta^4 - m\eta^2)}\, d\eta\,,$$

wo jetzt

$$m = (2kp)^{1/3} \frac{x}{p} < 0\,.$$

Für die Intensität ergibt sich also wieder der Wert (37).

Für größere $|x|$ beschränken wir uns auf das Glied mit δ^2 im Exponenten und erhalten

$$J_2 = \sqrt{-\frac{2\pi}{kx}}\, e^{ikx + i\frac{\pi}{4}}\,,$$

also wird die Intensität

$$|\mathfrak{B}|^2 = -\frac{2}{\pi kx} = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{kp}} \cdot \frac{1}{m}\,. \tag{39}$$

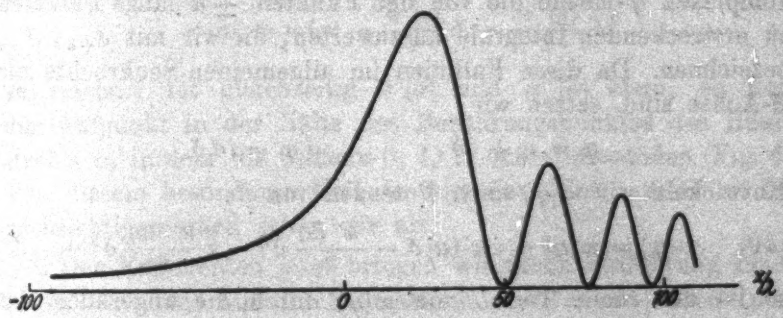


Fig. 10.

Nach (37), (38), (39) wurde die Intensität als Funktion von m berechnet und in Fig. 10 aufgetragen, dabei sind die Abszissenwerte m auf die proportionalen x/λ reduziert nach der Beziehung

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kp}{2}} \cdot m = 11{,}23\,m\,.$$

Wir erhalten also auf der Achse des Bündels im Innern der Brennlinie Schwankungen, im Äußern eine monotone Abnahme der Intensität. Das erste hohe Maximum, entsprechend einem Verhalten von $\mathfrak{B}$ wie $(kp)^{-1/4}$, fällt nicht mit der Spitze der

Brennlinie zusammen, sondern liegt bei unserer Annahme $kp = 10^4$ an der Stelle $x = 24{,}5\,\lambda$. Man vergleiche hierzu das ähnliche Verhalten der Intensität beim Übergang über einen beliebigen Punkt der Brennlinie (Fig. 7), wo auch das Maximum nicht mit dem Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Strahlen zusammenfällt. Die folgenden Maxima nehmen langsam ab und folgen sich in allmählich kleiner werdenden Abständen. Im ersten Minimum beträgt die Intensität 1,5 Proz. des ersten Maximums, in den folgenden wird sie immer kleiner.

§ 9. Die von den Randstrahlen herrührenden Beugungserscheinungen.

Bei den Intensitätsberechnungen der letzten Paragraphen haben wir lediglich Integrale über Sattelpunkte ausgewertet; in diesem Paragraphen haben wir den beugenden Einfluß der geradlinigen Begrenzung des Bündels zu berechnen.

Die Randstrahlen seien (Fig. 6) unter den Winkeln $\pm\alpha$ gegen die Achse des Bündels geneigt; wir haben dann in der komplexen φ-Ebene die von den Punkten $\pm\alpha$ längs Fallinien zu erstreckenden Integrale auszuwerten, die wir mit $J_{+\alpha}$, $J_{-\alpha}$ bezeichnen. Da diese Fallinien im allgemeinen Senkrechte zur Ξ-Achse sind, setzen wir

$$\varphi = \alpha + i\delta, \qquad d\varphi = i\,d\delta.$$

Entwickeln wir $w(\varphi)$ nach Potenzen von δ:

$$w(\varphi) = w(\alpha) + i\,w'(\alpha)\,\delta - \frac{w''(\alpha)}{2}\,\delta^2 - i\,\frac{w'''(\alpha)}{6}\,\delta^3 + \ldots, \tag{40}$$

so ist der reelle Teil U von $w(\varphi)$ durch die ungeraden, der imaginäre Teil V durch die geraden Potenzen von δ gegeben. Der Integrationsweg ist in das Gebiet negativen reellen Teils von w zu erstrecken, als Integrationsgrenzen also $\delta = 0$ und $\delta = \pm\infty$ zu wählen, je nachdem

$$i\,w'(\alpha) = \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_{\varphi=\alpha} \lessgtr 0$$

ist.

Nehmen wir zunächst an, daß in der Entwicklung (40) das Glied mit δ ausschlaggebend ist, daß also $w'(\alpha)$ nicht zu kleine Werte annimmt; dies bedeutet, da nach S. 365 $\frac{w'(\alpha)}{ik}$ der Abstand des Aufpunktes vom Randstrahl α ist, daß der Aufpunkt

in nicht zu große Nähe des Randstrahls rücken soll. Dann wird

$$(41) \qquad J_{+a} = -\frac{1}{w'(\alpha)} e^{w(\alpha)}, \qquad J_{-a} = -\frac{1}{w'(-\alpha)} e^{w(-\alpha)},$$

wie man sich leicht überzeugt, unabhängig davon, ob $\frac{w'(\alpha)}{i} \gtrless 0$. $J_{\pm a}$ verhalten sich also wie $(kp)^{-1}$, während die Integrale über die Sattelpunkte höchstens wie $(kp)^{-1/2}$ verschwinden. Wird, wie bisher immer in den Zahlenbeispielen, $kp = 10^4$ angenommen, so ist also der Fehler klein, wenn wir $J_{\pm a}$ gegenüber den Integralen über die Sattelpunkte vernachlässigen; anders ausgedrückt, die Lichtbewegung ist unabhängig von der Öffnung des Bündels, solange der Aufpunkt nicht in nächster Nähe der Randstrahlen liegt. Unter dieser Einschränkung ist also die Intensität mit hinreichender Genauigkeit durch die in den letzten Paragraphen angegebenen Formeln und Kurven wiedergegeben.

Für kleine Werte von $w'(\alpha)$ haben wir das Glied mit δ^3 zu berücksichtigen, also

$$w(\varphi) = w(\alpha) - \frac{w'(\alpha)}{i}\delta - \frac{w''(\alpha)}{2}\delta^2$$

zu setzen. Ist gleichzeitig $w'(\alpha)$ und $w''(\alpha)$ klein, so liegt der Aufpunkt in der Nähe des Berührungspunktes des Randstrahls α, in dem die Gebiete 0, I, II zusammenstoßen (Fig. 6). Von diesem besonderen Fall, in dem das Glied mit δ^3 zu berücksichtigen wäre, sehen wir ab.

Den Exponenten $w(\varphi)$ bringen wir durch Einführung einer neuen Variablen auf die Normalform des Fresnelschen Integrals. Dabei setzen wir $\frac{w''(\alpha)}{i} > 0$ voraus, $\frac{w''(\alpha)}{i} < 0$ wäre ähnlich zu behandeln; je nachdem $\frac{w'(\alpha)}{i} \gtrless 0$, also $\delta \gtrless 0$, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

Ist $\frac{w'(\alpha)}{i} > 0$, liegt also der Aufpunkt in Richtung des einfallenden α gesehen rechts von diesem, so wird

$$w(\varphi) = w(\alpha) - \frac{w'(\alpha)^2}{2w''(\alpha)} - i\left(\sqrt{\frac{w''(\alpha)}{2i}}\,\delta - \frac{w'(\alpha)}{\sqrt{\frac{2w''(\alpha)}{i}}}\right)^2;$$

wir setzen

$$\sqrt{\frac{w''(\alpha)}{2i}}\,\delta - \frac{w'(\alpha)}{\sqrt{\frac{2w''(\alpha)}{i}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\eta\,,$$

$$d\varphi = e^{i\frac{\pi}{2}}\,d\delta = e^{i\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi i}{w''(\alpha)}}\,d\eta\,.$$

Der unteren Grenze $\delta = 0$ entspricht

$$\eta = -i\bar{\eta} = -i\frac{w'(\alpha)}{i}\sqrt{\frac{i}{\pi w''(\alpha)}}\,, \tag{42}$$

wo $\bar{\eta}$ unter unserer Voraussetzung: $\frac{w'(\alpha)}{i}$ klein, $\frac{w''(\alpha)}{i}$ groß, eine mäßige positive reelle Zahl ist. Der oberen Grenze $\delta = \infty$ entspricht auch $\eta = \infty$. Wir erhalten so

$$J_{+\alpha} = \sqrt{\frac{\pi i}{w''(\alpha)}}\,e^{w(\alpha) - \frac{w'(\alpha)^2}{2w''(\alpha)} + i\frac{\pi}{2}} \int_{-i\bar{\eta}}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}\eta^2}\,d\eta\,.$$

Das Integral zerlegen wir in die Summe zweier Integrale mit den Grenzen $-i\bar{\eta}$, 0 und 0, ∞; das zweite Integral hat den Wert $\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$; im ersten Integral führen wir als neue Variable η' ein durch die Beziehung

$$\eta = e^{-i\frac{\pi}{2}}\eta'\,, \quad \text{also} \quad d\eta = e^{-i\frac{\pi}{2}}\,d\eta'\,, \quad -i\frac{\pi}{2}\eta^2 = i\frac{\pi}{2}\eta'^2;$$

die Integrationsgrenzen werden dann $\bar{\eta}$, 0. Bezeichnen wir die Integrationsvariable wieder mit η, so wird schließlich

$$J_{+\alpha} = \sqrt{\frac{\pi i}{w''(\alpha)}}\,e^{w(\alpha) - \frac{w'(\alpha)^2}{2w''(\alpha)}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\bar{\eta}} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2}\,d\eta\right). \tag{43}$$

Die Werte $w(\alpha)$, $w'(\alpha)$, $w''(\alpha)$ ergeben sich aus (6) für $\varphi = \alpha$, $\bar{\eta}$ hat den Wert (42).

Im Falle $\frac{w'(\alpha)}{i} < 0$ ergibt sich durch eine ähnliche Rechnung

$$J_{+\alpha} = -\sqrt{\frac{\pi i}{w''(\alpha)}}\,e^{w(\alpha) - \frac{w'(\alpha)^2}{2w''(\alpha)}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{4}} - \int_0^{-\bar{\eta}} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2}\,d\eta\right), \tag{43'}$$

wobei η, das wieder durch (42) definiert ist, negativ wird.

Liegt der Aufpunkt in nächster Nähe des Randstrahls $-\alpha$, so ist $\frac{w'(-\alpha)}{i}$ klein und für $J_{-\alpha}$ ergeben sich dieselben Werte (43) und (43'), nur daß $-\alpha$ an Stelle von $+\alpha$ tritt.

Für Aufpunkte in der Nähe der Randstrahlen verhalten sich also die Integrale $J_{\pm\alpha}$ wie $(kp)^{-1/3}$, sind daher von derselben Größenordnung wie die Integrale über die Sattelpunkte, wenn der Aufpunkt nicht zu nahe der Brennlinie liegt (vgl. 15 und 15'). Wir bemerken noch, daß (43) und (43') nicht nur für kleine, sondern für beliebige Werte von $\frac{w'(\alpha)}{i}$ gelten; für große $\frac{w'(\alpha)}{i}$ gehen (43) und (43') in (41) über, wie sich unmittelbar ergibt, wenn man die Fresnelschen Integrale durch die beiden ersten Glieder ihrer asymptotischen Entwicklung ersetzt; in der Tat wird $\bar{\eta}$ für diesen Fall eine große Zahl.

Es sei mir auch an dieser Stelle gestattet, meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. Sommerfeld für die Anregung zu dieser Arbeit und für das stete Interesse an ihrem Fortschreiten meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 14. April 1923.)

4. *Über die Bremsung bewegter Ladungen beim Überfliegen leitender Körper*[1]; *von Wilhelm Peter Radt.*

Inhalt: § 1. Der Hertzsche Versuch. — § 2. Darstellung des elektrischen Feldes durch Potentiale. — § 3. Form der Potentiale und Grenzbedingungen. — § 4. Verhalten der Influenzladung. — § 5. Bremskraft für rechteckige Ladungen. — § 6. Bremskraft für Punktladungen. — § 7. Integration der Bewegungsgleichung. — § 8. Kraft senkrecht zur Leiteroberfläche. — § 9. Berücksichtigung endlicher Plattendicke. — § 10. Punktförmige Ladungen, die durch einen Hohlzylinder fliegen. — § 11. Kathodenstrahlteilchen von der Geschwindigkeit $q = 10^9$ cm/sec^{-1}. — § 12. Möglichkeit experimenteller Prüfung.

§ 1. Der Hertzsche Versuch.

Heinrich Hertz[2]) hat folgenden Versuch angestellt: An den Enden einer wagerechten Nadel befanden sich zwei rechteckige Kupferscheiben, die über einer leitenden Glasscheibe schwebten. Die Nadel konnte um einen in ihrer Mitte befestigten Draht Torsionsschwingungen ausführen. Hertz beobachtete die *Zunahme der Dämpfung*, die eintrat, wenn er die Kupferscheiben mit Hilfe von Nadel und Draht an *Spannung* legte.

Weitere Versuche ähnlicher Art, sowie eine zahlenmäßige Berechnung dieser Wirkung sind mir *nicht* bekannt. Im Anschluß hieran sollen mit Hilfe der Maxwellschen Theorie zwei besondere Fälle von *Bremsung bewegter Ladungen* untersucht werden. Über der ebenen Oberfläche eines unendlich ausgedehnten Leiters bewegt sich in einer Ebene parallel zur Oberfläche mit gleichförmiger Geschwindigkeit eine Ladung, die gleichmäßig auf ein Rechteck verteilt ist. Das Rechteck soll sich späterhin auf einen Punkt zusammenziehen, wobei die Ergebnisse eine erheblich übersichtlichere Gestalt annehmen.

1) Auszug aus der Berliner Inaugural-Dissertation 1922.

2) H. Hertz, Ges. Werke 1. S. 143 u. Wied. Ann. 13. S. 274. 1881.

Ohne Rechnung soll dann noch die Lösung einer zweiten Aufgabe angegeben werden, nämlich die Bremskraft zu bestimmen, die auf punktförmige durch die Achse eines unendlich langen Hohlzylinders fliegende Ladungen ausgeübt wird.

Befindet sich eine ruhende Ladung gegenüber einer leitenden Oberfläche, so bildet sich auf dieser die entgegengesetzte Ladung, die *Influenzladung*. Diese wird im Falle der Bewegung der bewegten zu folgen suchen und dabei *zurückbleiben*. Die Anziehungskraft der Influenzladung auf die bewegte erhält also eine *Komponente der Bewegungsrichtung entgegen*. Die verlorene Bewegungsenergie des Ladungsträgers findet sich in der Wärmeentwicklung der Ströme wieder, durch die die Influenzladung immer nachgeschafft wird. Für diese Ströme soll bei allen betrachteten Körpern das Ohmsche Gesetz gelten:

$$J = \sigma \cdot \mathfrak{E},$$

wo σ die Leitfähigkeit im elektrostatischen Maße bedeutet. $[\sigma] = t^{-1}$.

Bei den zahllosen Versuchen mit Kathodenstrahlen fliegen diese stets an der Oberfläche guter oder doch mäßiger Leiter vorüber. Der Hertzsche Versuch beweist, daß dann streng genommen eine Geschwindigkeitsverminderung eintritt. Diese ist aber auch bei den besten Präzisionsbestimmungen von e/m nie in Betracht gezogen. Liegt auch wegen der vortrefflichen Übereinstimmung der verschiedenen Messungen dieser Größe die Vermutung nahe, daß die Bremskraft unter der Grenze der zu berücksichtigenden Fehler liegt, so schien doch eine theoretische Berechnung darüber erwünscht.

§ 2. Darstellung des elektrischen Feldes durch Potentiale.

Im ersten Falle seien die Koordinaten des Systems, das mit dem leitenden Körper ruht, x_0, y_0, z_0. Das System der x, y, z, in dem die Ladung ruht, bewege sich mit der Geschwindigkeit $q = q(t)$ gegen das erste. Es bestehen die Verknüpfungsgleichungen:

$$x = x_0 - q \cdot t; \quad y = y_0; \quad z = z_0.$$

Die Ebene, in der sich die Ladung bewegt, ist $y = y_0 = a$, die Oberfläche des leitenden Körpers $y = y_0 = 0$. Derselbe wird als unendlich ausgedehnt betrachtet. Später ist zu zeigen (§ 9), was die Vernachlässigung der endlichen Dicke ausmacht.

Um die Zeitkoordinate auszuschalten, betrachten wir die Verhältnisse zur Zeit $t = 0$, wo also $x = x_0$ ist. In diesem Augenblicke bestehen im Außenraume wie im Leiter elektrische Felder, die man bei *gegen Lichtgeschwindigkeit kleinem* q zunächst als wirbelfrei ansehen kann. Es lauten die Maxwellschen Gleichungen im Systeme der x_0, y_0, z_0:

$$\left.\begin{aligned} c \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \dot{\mathfrak{D}} + 4\pi J = \varepsilon \dot{\mathfrak{E}} + 4\pi\sigma \mathfrak{E} \\ -c \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= \dot{\mathfrak{B}} \end{aligned}\right\} \text{ im Leiter,}$$

$$\left.\begin{aligned} c \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \varepsilon \cdot \dot{\mathfrak{E}} \\ -c \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= \dot{\mathfrak{B}} \end{aligned}\right\} \text{ im Außenraume.}$$

Da nun durch die Bewegung der Ladung mit der Zeit keine Veränderung (solange q sich nicht verändert), sondern nur eine Verschiebung in der negativen x_0-Richtung stattfindet, so ist:

$$\dot{\mathfrak{E}} = -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x_0} \cdot q; \qquad \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x_0} \cdot q.$$

Wir finden rot rot $\mathfrak{E}$ von der Größenordnung

$$\frac{q^2}{c^2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x_0^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{4\pi q \cdot \sigma}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x_0}.$$

Damit also das hieraus sich ergebende Feld vernachlässigt werden kann gegen das wirbelfreie elektrische Feld, muß, wenn l eine Länge in der Größe der bei der Rechnung in Betracht kommenden, also etwa der Abstand a oder die Kantenlänge der Platten ist, jedesmal die Ungleichung erfüllt sein:

$$\frac{q^2}{c^2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x_0^2}}{\mathfrak{E}} \cdot \frac{l^2}{4} \ll 1; \qquad \frac{4\pi \cdot q \cdot \sigma}{c^2} \cdot \frac{\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x_0}}{\mathfrak{E}} \cdot \frac{l^2}{4} \ll 1.$$

Dann ist also:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0.$$

Wir bilden dann die Divergenz der ersten Gleichung:

$$c \cdot \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0 = -\varepsilon \cdot q \cdot \frac{\partial (\operatorname{div} \mathfrak{E})}{\partial x_0} + 4\pi\sigma \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E}.$$

Hieraus entsprängen Ladungen von der Verteilung:

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \text{constans} \cdot e^{\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon q} \cdot x_0},$$

die in unserem Falle nur mit constans $= 0$ möglich sind. Im Falle des Außenraumes ergibt das Bilden der Divergenz:

$$\frac{\partial(\operatorname{div} \mathfrak{E})}{\partial x_0} = 0, \quad \text{also} \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \text{constans}.$$

Auch von x_0 unabhängige Ladungen haben für uns kein Interesse. Wir werden daher setzen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0.$$

$\mathfrak{E}$ kann somit dargestellt werden als:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

wobei die Potentiale φ der Laplaceschen Gleichung genügen:

$$\Delta \varphi = 0.$$

Diese Folgerungen wollen wir auf das System der x, y, z übertragen, das *mit der Ladung ruht*, und von nun an ganz in diesem rechnen.

§ 3. Form der Potentiale und Grenzbedingungen.

In der Ebene $y = a$ soll sich nun eine Ladung E befinden, gleichmäßig verteilt auf ein Rechteck:

$$-\lambda_0 < x < +\lambda_0, \qquad -\mu_0 < z < +\mu_0.$$

Die Funktion $f(x, z)$, die die Flächendichte der Ladung in der Ebene $y = a$ darstellt, hat also in diesem Rechteck den konstanten Wert $F = \frac{E}{4\lambda_0\mu_0}$ und verschwindet in der übrigen Ebene. Nun ist jede Funktion $f(x, z)$ zweier Variablen, wenn sie gewissen Forderungen genügt (die für unser f erfüllt sind), darstellbar als vierfaches bestimmtes Integral, und zwar als der reelle Teil von:

$$f(x,z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \cdot f(\lambda,\mu)\, e^{i\alpha(x-\lambda)+i\beta(z-\mu)}.$$

Mit Einsetzen der Werte von $f(x, z)$ in $f(\lambda, \mu)$ ergibt dies:

$$f(x,z) = \frac{F}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \cdot d\beta \int_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} d\lambda \int_{-\mu_0}^{+\mu_0} d\mu \cdot e^{i\alpha(x-\lambda)+i\beta(z-\mu)},$$

die Integration nach λ und μ läßt sich ausführen:

$$f(x,z) = \frac{F}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\alpha \cdot \beta} \cdot \sin(\alpha \lambda_0) \cdot \sin(\beta \mu_0) \cdot e^{i\alpha x + i\beta z}.$$

Die Potentiale sollen die Form haben:

$$\varphi = \frac{F}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\alpha \cdot \beta} \sin(\alpha \lambda_0) \cdot \sin(\beta \mu_0) \cdot e^{i\alpha x + i\beta z} \cdot g(y, \alpha, \beta),$$

wo g von x und z unabhängig sein soll. Da φ der Laplaceschen Gleichung genügen muß, ergibt sich für $g(y)$ die *gewöhnliche* Differentialgleichung:

$$(\alpha^2 + \beta^2) \cdot g(y) = \frac{d^2 g}{dy^2},$$

deren Lösung ist:

$$g = C_1 \cdot e^{+y\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + C_2 \cdot e^{-y\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Die Größen, die sich auf den Raum $y \geqq a$ beziehen, erhalten den Index 1; die sich auf den Raum $a \geqq y \geqq 0$ beziehen, den Index 2; die sich auf den Raum $y \leqq 0$ beziehen, den Index 3.

Es wird also:

$$\varphi_1 = \frac{F}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\alpha \cdot \beta} \sin(\alpha \lambda_0) \cdot \sin(\beta \mu_0) \cdot e^{i\alpha x + i\beta z} \cdot A_1 \cdot e^{-y\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$\varphi_2 = \frac{F}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\alpha \cdot \beta} \sin(\alpha \lambda_0) \cdot \sin(\beta \mu_0) \cdot e^{i\alpha x + i\beta z} \left[A_2 \cdot e^{-y\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + B_2 \cdot e^{+y\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right],$$

$$\varphi_3 = \frac{F}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\alpha \cdot \beta} \sin(\alpha \lambda_0) \cdot \sin(\beta \mu_0) \cdot e^{i\alpha x + i\beta z} \cdot B_3 \cdot e^{+y\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Denn es muß φ_1 für $y = +\infty$, φ_3 für $y = -\infty$ verschwinden. Zur Bestimmung der vier komplexen Konstanten A_1, A_2, B_2, B_3 erhalten wir vier Grenzbedingungen. Da zunächst die senkrechten Komponenten der elektrischen Verschiebung, die negativen Ableitungen der φ nach y, nicht unendliche Werte annehmen können, dürfen an den Übergangsstellen die Potentiale keine Sprünge erleiden. Daher:

(I) $\varphi_1 = \varphi_2$ (für $y = a$),

(II) $\varphi_2 = \varphi_3$ (für $y = 0$).

Die Flächendivergenz der elektrischen Erregung ist gleich der Ladungsdichte auf der Fläche mal 4π, wenn also ε_0 die Dielektrizitätskonstante der Luft ist, so gilt:

$$\text{(III)}\quad (\mathfrak{D}_y^{\,1})_{y=a} - (\mathfrak{D}_y^{\,2})_{y=a} = \varepsilon_0\left[-\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_{y=a} + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_{y=a}\right] = 4\pi f(x,z).$$

An der Oberfläche des Leiters muß die Flächendivergenz des *wahren* Stromes (Leitungs- + Verschiebungsstromes) wie überall verschwinden. Demnach:

$$4\pi (J_y^{\,3})_{y=0} + (\dot{\mathfrak{D}}_y^{\,3})_{y=0} = (\dot{\mathfrak{D}}_y^{\,2})_{y=0}.$$

Da nun, wie oben erklärt,

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial t} = -q\,\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial x},$$

so erhalten wir, wenn dem Leiter die *Dielektrizitätskonstante* ε und die *Leitfähigkeit* σ zukommen, als vierte Bedingung:

$$\text{(IV)}\quad 4\pi\sigma\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_{y=0} - \varepsilon q\left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \cdot \partial y}\right)_{y=0} = -\varepsilon_0 q\left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \cdot \partial y}\right)_{y=0}.$$

Wir finden so

$$\text{(1a)}\quad \begin{cases} A_3 = -2\pi\,\dfrac{e^{-a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,[(4\pi\sigma)^2 + q^2\alpha^2(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2)]}{\varepsilon_0\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,[(4\pi\sigma)^2 + q^2\alpha^2(\varepsilon+\varepsilon_0)^2]} \\ \qquad\qquad - i\cdot 4\pi\,\dfrac{q\cdot\alpha\cdot(4\pi\sigma)\cdot e^{-a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot[(4\pi\sigma)^2 + q^2\alpha^2(\varepsilon+\varepsilon_0)^2]}; \\ B_3 = 2\pi\,\dfrac{e^{-a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{\varepsilon_0\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}; \\ B_3 = 4\pi\,\dfrac{q\cdot\alpha\cdot e^{-a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,[q\cdot\alpha(\varepsilon+\varepsilon_0) - i(4\pi\sigma)]}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,[(4\pi\sigma)^2 + q^2\alpha^2(\varepsilon+\varepsilon_0)^2]}; \\ A_1 = A_3 + \dfrac{2\pi\cdot e^{+a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{\varepsilon_0\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \end{cases}$$

Damit sind die Potentiale φ_1, φ_2, φ_3 gewonnen.

§ 4. Verhalten der Influenzladung.

Die Differenz der Komponenten der elektrischen Erregung senkrecht zu einer Fläche ist der auf der Fläche vorhandenen

Ladungsdichte mal 4π gleich. Um die Verteilung auf der Oberfläche der Platte zu erfahren, ist also zu bilden:

$$4\pi\varrho = (\mathfrak{D}_y{}^2)_{y=0} - (\mathfrak{D}_y{}^3)_{y=0} = \varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)_{y=0} - \varepsilon_0\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)_{y=0}$$

eingesetzt

$$4\pi\varrho = \frac{F}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\alpha\cdot d\beta}{\alpha\cdot\beta}\sin(\alpha\lambda_0)\cdot\sin(\beta\mu_0)\cdot e^{i\alpha x+i\beta z}$$
$$\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,[\varepsilon B_2 - \varepsilon_0 B_2 + \varepsilon_0 A_2].$$

Wir lassen λ_0 und μ_0 gegen Null konvergieren, das Rechteck also auf einen Punkt zusammenschrumpfen, und betrachten ferner die Gerade $z = 0$. Dann wird, wenn wir setzen:

$$d = \frac{q(\varepsilon+\varepsilon_0)}{4\pi\sigma},$$

$$\varrho = -\frac{E}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\alpha\cdot d\beta\cdot e^{-a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{1+d^2\sigma^2}\,[\cos(\alpha x) - \alpha d\cdot\sin(\alpha x)].$$

Für $q = 0$, d. h. $d = 0$ liegt das Maximum von ϱ bei $x = 0$; für $q \neq 0$ wird:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x} = +\frac{E}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\alpha\cdot d\beta\cdot\alpha\cdot e^{-a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{1+d^2\alpha^2}$$
$$[\alpha\cdot d\cdot\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)] = 0,$$

die Bedingung des Maximums. Diese ist zum Beispiel erfüllt, wenn innerhalb der Grenzen, wo $e^{-a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ noch nicht den Integranden zum Verschwinden bringt, immer die eckige Klammer verschwindet, d. h. $\operatorname{tg}(\alpha\cdot x) = -\alpha\cdot d$. Ist nun d sehr klein, so kann man für den Tangens das Argument setzen und es wird:

$$x_{\max} = -d = -\frac{q(\varepsilon+\varepsilon_0)}{4\pi\sigma}.$$

Dies gilt angenähert, aber nur für großes a und kleines d. In der Tat tritt demnach ein *Zurückbleiben der Influenzladung hinter der bewegten* ein.

§ 5. Bremskraft für rechteckige Ladungen.

Die Feldstärkenkomponente in der X-Richtung bei $y = a$ ist:

$$(\mathfrak{E}_x)_{y=a} = -\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)_{y=a} = -\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)_{y=a}.$$

Die Kraft, die auf die rechteckige Ladung ausgeübt wird, ist demnach aus (1) und (1a):

$$\mathfrak{K} = -\int_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} dx \int_{-\mu_0}^{+\mu_0} dz \cdot F \cdot \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)_{y=a}.$$

Mit Einsetzen von φ_2 und Integrieren nach x und z wird hiervon der reelle Teil:

$$(2)\quad \mathfrak{K} = -64 \cdot F^2 \cdot q \cdot \sigma \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \frac{\sin^2(\alpha\lambda_0) \cdot \sin^2(\beta\mu_0) \cdot e^{-2a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{\beta^2 \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \cdot [(4\pi\sigma)^2 + q^2\alpha^2(s+s_0)^2]}.$$

§ 6. Bremskraft für Punktladungen.

Für eine punktförmige Ladung wird $\sin(\alpha\lambda_0) = \alpha\lambda_0$ usw. und aus (2):

$$\mathfrak{K} = -16 \cdot E^2 \cdot q \cdot \sigma \int_0^{+\infty} d\alpha \int_0^{+\infty} d\beta \frac{\alpha^2 \cdot e^{-2a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \cdot [(4\pi\sigma)^2 + q^2\alpha^2(s+s_0)^2]}.$$

Ich setzte hier:

$$d = r \cdot \cos\vartheta, \quad \beta = r \cdot \sin\vartheta, \quad d\alpha \cdot d\beta = r \cdot dr \cdot d\vartheta.$$

$$\mathfrak{K} = -\frac{E^2 \cdot q}{\pi^2 \cdot \sigma} \int_0^{+\infty} dr \cdot r^2 \cdot e^{-2ar} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{\cos^2\vartheta}{1 + \frac{q^2 \cdot r^2 \cdot (s+s_0)^2}{(4\pi\sigma)^2} \cos^2\vartheta}.$$

Die Integration nach ϑ ergab:

$$\mathfrak{K} = -\frac{E^2 \cdot q}{\pi^2 \cdot \sigma} \int_0^{\infty} dr \cdot r^2 \cdot e^{-2ar} \frac{\pi \cdot (4\pi\sigma)^2}{2q^2 \cdot r^2 (s+s_0)^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{q^2(s+s_0)^2}{(4\pi\sigma)^2} r^2}}\right].$$

Ich setzte:

$$(3)\quad j = \frac{8a\pi \cdot \sigma}{q(s+s_0)},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = r \cdot \frac{q(s+s_0)}{4\pi\sigma} = r \cdot \frac{2a}{j}, \quad dr = d\varphi \cdot \frac{j}{\cos^2\varphi \cdot 2a}.$$

Dann wird:

$$\mathfrak{K} = -\frac{E^2 \cdot j^3}{2a^2(s+s_0)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} e^{-j \cdot \operatorname{tg}\varphi} [1 - \cos\varphi],$$

oder durch partielle Integration:

$$(4) \qquad \mathfrak{R} = -\frac{E^2 \cdot j}{2a^2(\varepsilon + \varepsilon_0)} \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot e^{-j \cdot \operatorname{tg}\varphi} \cdot \sin\varphi .$$

Das Integral

$$S(j) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot e^{-j \cdot \operatorname{tg}\varphi} \cdot \sin\varphi$$

ist eine Funktion der unter (3) eingeführten Veränderlichen j und gehorcht, wie man unschwer nachprüft, der gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$S'' - \frac{1}{j} S' + S\left(1 + \frac{1}{j^2}\right) = \frac{1}{j^2} .$$

Das allgemeine Integral der reduzierten Gleichung ist:

$$A \cdot j \cdot J_0(j) + B \cdot j \cdot Y_0(j),$$

wo A, B Konstante und J_0 die Besselsche, Y_0 die Neumannsche Funktion nullter Ordnung ist. Ein partikuläres Integral der kompletten Gleichung ist die Reihe:

$$P(j) = 1 - \frac{j^2}{1^2} + \frac{j^4}{1^2 \cdot 3^2} - \frac{j^6}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} + \frac{j^8}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} - + \cdots$$

Also ist das vollständige Integral, das S darstellen muß:

$$S = P(j) + A \cdot j \cdot J_0(j) + B \cdot j \cdot Y_0(j).$$

Für die Werte $j = 0{,}1$, $j = 0{,}2$, sowie $j = 1$, $j = 2$ bestimmte ich das Integral S durch mechanische Quadratur und berechnete ebenso die Funktion $P(j)$, J_0 und Y_0 entnahm ich Tabellen. Als Mittel der Werte aus der Vereinigung je zweier dieser so erhaltenen vier linearen Gleichungen für A und B erhielt ich:

$$A = -0{,}115,$$
$$B = +1{,}000.$$

Zunächst sollen noch die *Näherungswerte* von $S(j)$ für sehr große und sehr kleine j berechnet werden. Hierbei soll als das eigentlich *Veränderliche* in j nur die *Geschwindigkeit* q und die *Leitfähigkeit* σ betrachtet werden, nicht also a und $(\varepsilon + \varepsilon_0)$.

Wenn zunächst j so groß ist, daß $e^{-j \cdot \operatorname{tg}\varphi}$ den Integranden in $S(j)$ zum Verschwinden bringt außer für so kleine φ-Werte,

wo man noch unbeschadet $\sin\varphi = \varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi = \varphi$ setzen kann, so wird näherungsweise:

$$S \sim \int_0^{\pi/2} \varphi \cdot e^{-j\cdot\varphi} \cdot d\varphi = \frac{1}{j^2} .$$

Dann wird nach (4):

$$\mathfrak{K} = -\frac{E^2 \cdot q}{16\pi \cdot \sigma \cdot a^3} \tag{4a}$$

unter der Voraussetzung:

$$2a > \frac{q(\varepsilon + \varepsilon_0)}{4\pi\sigma} .$$

Man sieht aus (4a), daß für große j, d. h. große σ (metallische Leiter) die Bremskraft *unabhängig von* ε wird, die Dielektrizitätskonstante also auch hier sich der Wahrnehmung entzieht.

Ist andererseits j so klein, daß $e^{-j\cdot\operatorname{tg}\varphi} = 1$ ist bis auf φ-Werte ganz nahe an $\pi/2$, so wird näherungsweise:

$$S \sim \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cdot d\varphi = 1 .$$

Dann wird nach (4):

$$\mathfrak{K} = -\frac{(4\pi\sigma)\cdot E^2}{q\cdot a\,(\varepsilon + \varepsilon_0)^2} \tag{4b}$$

unter der Voraussetzung:

$$2a < \frac{q(\varepsilon + \varepsilon_0)}{4\pi\sigma} .$$

$\mathfrak{K}$ verschwindet demnach, wenn ich q und die anderen Größen konstant lasse, bei sehr *großem* wie bei sehr *kleinem* σ; ebenso wenn mit σ alle Größen außer q konstant bleiben, bei sehr *großem* wie bei sehr *kleinem* q. Da aber q wie σ nur in dem *Quotienten* q/σ erscheinen, so genügt es, die Abhängigkeit der Kraft von diesem zu betrachten. Wir zerlegen also j in $s\cdot a$, wo:

$$s = \frac{8\pi\sigma}{q(\varepsilon + \varepsilon_0)} . \tag{3a}$$

$\mathfrak{K}$ bekommt als Funktion von s das Aussehen:

$$\mathfrak{K}(s) = -\frac{E^2}{2(\varepsilon + \varepsilon_0)} \left\{ \frac{s}{a} \cdot P(s\cdot a) + s^2 \left[A \cdot J_0(s\cdot a) + B \cdot Y_0(s\cdot a) \right] \right\} .$$

Um den s-Wert zu finden, bei dem $\mathfrak{R}(s)$ ein Maximum wird, bilde man

$$\frac{d\mathfrak{R}(s)}{ds} = -\frac{E^2}{2(s+s_0)}\left[\frac{1}{a}\cdot P(s\cdot a) + s\cdot P'(s\cdot a) + 2s\{A\cdot J_0(s\cdot a) + B\cdot Y_0(s\cdot a)\} - s^2\cdot a^2\{A\cdot J_1(s\cdot a) + B\cdot Y_1(s\cdot a)\}\right].$$

Am Maximum muß also folgende Funktion $\Phi(s)$ verschwinden:

$$\Phi(s) = P(j) + s\cdot a\cdot P'(j) + 2s\cdot a\{A\cdot J_0(j) + B\cdot Y_0(j)\} - s^2\cdot a^2\{A\cdot J_1(j) + B\cdot Y_1(j)\}.$$

$$\Phi(s) = 0 \text{ für } s_{max}.$$

Hierbei ist $P'(j)$ die Reihe;

$$P'(j) = -\frac{2j}{1^2} + \frac{4j^3}{1^2\cdot 3^2} - \frac{6j^5}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2} + \frac{8j^7}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2} - + \ldots$$

Das Maximum errechnete ich für $j = 1{,}3$. Wie man sieht, ist nämlich $\Phi(s)$ nicht mehr Funktion von a und s allein, sondern des *Produktes* $s\cdot a = j$. Die Funktion $U(j) = j\cdot S(j)$, die den wesentlichen Bestandteil in dem Ausdrucke der Bremskraft bildet, ist dauernd positiv; sie verschwindet also für $j = 0$, steigt zunächst wie j, dann schwächer an bis zum Maximum bei $j = 1{,}3$ und fällt dann langsam wieder, für große Werte wie $1/j$. Die drei Funktionen, deren Summe $U(j)$ ist, $j\cdot P(j)$, $j^2\cdot AJ_0(j)$ und $j^2\cdot Y_0(j)$, schwanken im Verhältnis zu $U(j)$ beträchtlich; daher dürfte diese Darstellung von $U(j)$ nur für kleine Werte des Argumentes in Frage kommen.

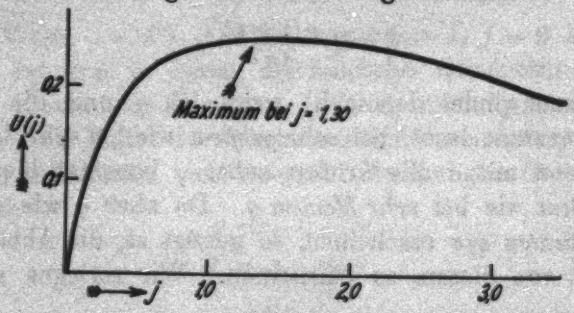


Fig. 1.

§ 7. Integration der Bewegungsgleichung.

Wenn wir nun den Fall einer punktförmigen Masse m haben, die in konstantem Abstand a über eine homogene Platte mit der Leitfähigkeit σ und der Dielektrizitätskon-

stanten ε hinwegfliegt, so wird uns die Integration der Bewegungsgleichung:

$$\mathfrak{K}(q) = m \cdot \frac{d\,q}{d\,t},$$

die uns q als Funktion von t liefert, im allgemeinen Ausdruck (4) *nicht* gelingen. Ist jedoch q *einerseits* $\ll \frac{8\,a\,\sigma}{\varepsilon + \varepsilon_0}$ nach (4a) und $\mathfrak{K} = -\frac{E^2 \cdot q}{16\,\pi\,\sigma \cdot a^3}$, so wird:

(5a) $$q = q_0 \cdot e^{-\frac{E^2}{16\,\pi\,\sigma\,a^3 \cdot m} \cdot t}.$$

Ist *andererseits* nach (4b): $q \gg \frac{8\,a\,\pi\,\sigma}{\varepsilon + \varepsilon_0}$ und dann $\mathfrak{K} = -\frac{(4\,\pi\,\sigma) \cdot E^2}{q \cdot a \cdot (\varepsilon + \varepsilon_0)^2}$, so wird

(5b) $$q = \operatorname{sign}(q_0) \left| \sqrt{q_0^2 - t\,\frac{8\,\pi\,\sigma \cdot E^2}{a \cdot m \cdot (\varepsilon + \varepsilon_0)^2}} \right|.$$

Wenn die Bremsung die Geschwindigkeit der bewegten punktförmigen Ladung nur gering vermindert, so wird folgende Näherung erlaubt sein:

Die Länge der im Abstande a überflogenen Platte sei l, die Zeit des Überfliegens t, dann ist die Geschwindigkeit, mit der die Platte verlassen wird, $q(t) = q(0) + t\,\dot{q}(0)$. Wir vernachlässigen höhere Glieder und setzen die mittlere Geschwindigkeit beim Überfliegen:

$$\frac{q(0) + q(t)}{2} = \frac{l}{t},$$

woraus wir schließen:

$$t = \frac{2 \cdot l}{q(0) + q(t)}.$$

Wir berechnen $\mathfrak{K}(q)$ jetzt nur für $q = q(0)$, es gilt ja: $\mathfrak{K}(0) = m \cdot \dot{q}(0)$, also: $\dot{q}(0) = \frac{\mathfrak{K}(0)}{m}$, so ergibt sich angenähert mit Einsetzen von t und $\dot{q}(0)$ in die abgebrochene Taylorreihe:

$$q(t) = q(0) + \frac{2 \cdot l \cdot \mathfrak{K}(0)}{m\,(q(0) + q(t))}$$

und daraus:

(5c) $$q(t) = \operatorname{sign}(q_0) \cdot \left| \sqrt{q^2(0) + \frac{2 \cdot l \cdot \mathfrak{K}(0)}{m}} \right|.$$

§ 8. Kraft senkrecht zur Leiteroberfläche.

Wir wollen die Kraft *senkrecht* zur Oberfläche der Platte berechnen, die die Influenzladung auf die bewegte Ladung ausübt, und bilden zu dem Zwecke:

$$(\mathfrak{E}_y)_{y=a} = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}_y{}^1 + \mathfrak{E}_y{}^2)_{y=a} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_{y=a},$$

dann wird die Kraft in der negativen Y-Richtung:

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{2}\int_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} dx \int_{-\mu_0}^{+\mu_0} dz \cdot F \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_{y=a},$$

mit Einsetzen der Potentiale und Integration nach x und z wird der reelle Teil hiervon für eine Punktladung E:

$$\mathfrak{K} = \frac{2 \cdot E^2 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\pi \cdot \varepsilon_0 (\varepsilon + \varepsilon_0)} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \cdot e^{-2a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdot \frac{\alpha^2 + \alpha_1{}^2}{\alpha^2 + \alpha_2{}^2},$$

wo:

$$\alpha_1 = \frac{4\pi\sigma}{q \cdot \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0{}^2}}; \quad \alpha_2 = \frac{4\pi\sigma}{q(\varepsilon + \varepsilon_0)}; \quad \alpha_1 > \alpha_2.$$

Mit den Substitutionen: $\alpha = r \cdot \cos\vartheta$; $\beta = r \cdot \sin\vartheta$; $d\alpha \cdot d\beta = r \cdot dr \cdot d\vartheta$ wird dies:

$$\mathfrak{K} = \frac{2 \cdot E^2 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\pi \cdot \varepsilon_0 (\varepsilon + \varepsilon_0)} \int_0^\infty dr \cdot r \cdot e^{-2ar} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \, \frac{\cos^2\vartheta + \left(\frac{\alpha_1}{r}\right)^2}{\cos^2\vartheta + \left(\frac{\alpha_2}{r}\right)^2}.$$

Ich setze in dem Integral:

$$\Psi = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \, \frac{\cos^2\vartheta + \left(\frac{\alpha_1}{r}\right)^2}{\cos^2\vartheta + \left(\frac{\alpha_2}{r}\right)^2}, \quad \operatorname{tg}\vartheta = u, \quad d\vartheta = du \cdot \cos^2\vartheta:$$

$$\Psi = \frac{\alpha_1{}^2}{\alpha_2{}^2} \int_0^\infty du \, \frac{u^2 + 1 + \frac{r^2}{\alpha_1{}^2}}{(1+u^2)\cdot\left(1 + \frac{r^2}{\alpha_2{}^2} + u^2\right)} = \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} + \left(\frac{\alpha_1{}^2}{\alpha_2{}^2} - 1\right) \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + 1 + \frac{r^2}{\alpha_2{}^2}},$$

$$\Psi = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{2 \cdot \varepsilon_0}{(\varepsilon - \varepsilon_0)\cdot\sqrt{1 + \frac{r^2}{\alpha_2{}^2}}}\right],$$

so wird die Anziehungskraft:

$$\mathfrak{K} = \frac{E^2 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \cdot (\varepsilon + \varepsilon_0)} \cdot \left[\int_0^\infty dr \cdot r \cdot e^{-2ar} + \frac{2 \cdot \varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} \int_0^\infty dr \cdot r \cdot e^{-2ar} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{\alpha_2^2}}} \right].$$

Für $q = 0$, d. h. $\alpha_2 = \frac{4\pi\sigma}{q(\varepsilon + \varepsilon_0)} = \infty$, wird das zweite Integral dem ersten gleich. Wir erhalten:

$$\mathfrak{K} = \frac{E^2}{\varepsilon_0} \int_0^\infty dr \cdot r \cdot e^{-2ar} = \frac{E^2}{\varepsilon_0 \cdot 4a^2},$$

ein von dem berühmten Musterbeispiel der Elektrostatik hinlänglich bekanntes Ergebnis.

Mit wachsender Geschwindigkeit nimmt α_2 und damit das zweite Integral stetig ab und verschwindet endlich für unendliches q. Die Anziehungskraft ist dann nur noch

$$\mathfrak{K} = \frac{E^2}{\varepsilon_0 \cdot 4a^2} \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0};$$

sie hat also *in dem Verhältnis* $\varepsilon - \varepsilon_0 / \varepsilon + \varepsilon_0$ *abgenommen.* Das Integral

$$J = \int_0^\infty dr \cdot r \cdot e^{-2ar} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{\alpha_2^2}}}$$

wird mit der Substitution

$$r = \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad dr = \alpha_2 \cdot d\varphi \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \quad 2a \cdot \alpha_2 = j = \frac{8a\pi\sigma}{q(\varepsilon + \varepsilon_0)}:$$

$$J = \alpha_2^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \, \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \cdot e^{-j \cdot \operatorname{tg} \varphi}$$

und mit partieller Integration

$$J = -\frac{\alpha_2^2}{j} \cdot e^{-j \cdot \operatorname{tg} \varphi} \cdot \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\alpha_2^2}{j} \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \cos \varphi \cdot e^{-j \cdot \operatorname{tg} \varphi}.$$

$[e^{-j \cdot \operatorname{tg} \varphi} \cdot \sin \varphi]$ verschwindet an den Grenzen; es wird:

$$J = \frac{\alpha_2^2}{j} \cdot D(j); \quad \text{wo} \quad D(j) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \cos \varphi \cdot e^{-j \cdot \operatorname{tg} \varphi}.$$

Bildet man nun:

$$\frac{dD(j)}{dj} = -\int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \sin\varphi \cdot e^{-j\cdot\operatorname{tg}\varphi} = -S(j),$$

so findet man, daß die Ableitung von D gleich dem oben in dem Ausdrucke der Bremskraft vorkommenden Integrale, negativ genommen ist. Man braucht also nur zu integrieren:

$$D = -\int S(j)\cdot dj + \text{Constans} =$$
$$-\int dj\,[P(j) + A\cdot j\cdot J_0(j) + B\cdot j\cdot Y_0(j)] + \text{Constans}.$$

Für alle Zylinderfunktionen Z von der Ordnung p gilt die unbestimmte Integrationsformel: $\int j^{p+1}\cdot Z_p(j)\cdot dj = j^{p+1}\cdot Z_{p+1}(j)$. Somit wird

$$D(j) = -j + \frac{1}{3}\cdot\frac{j^3}{1^2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{j^5}{1^2\cdot 3^2} + \frac{1}{7}\cdot\frac{j^7}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2} - + \ldots$$
$$- A\cdot j\cdot J_1(j) - B\cdot j\cdot Y_1(j) + \text{Constans}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten müssen wir $D(j)$ für *einen* Wert von j berechnen. Für $j = 0$ wird:

$$\lim_{j=0} D(j) = \int_0^{\pi/2} d\varphi\cdot\cos\varphi\cdot e^{-j\cdot\operatorname{tg}\varphi} = \int_0^{\pi/2}\cos\varphi\cdot d\varphi = 1.$$

Die Reihe, die das Integral von $P(j)$ darstellt, sowie die Funktion $J_1(j)$, um so mehr $j\cdot J_1(j)$, verschwinden für $j = 0$. Da $Y_1(j)$ darstellbar ist als die unendliche Summe von Zylinderfunktionen erster Art:

$$Y_1(j) = -\frac{1}{j}J_0(j) + J_1(j) + \frac{3}{1\cdot 2}\cdot J_3(j) - \frac{5}{2\cdot 3}\cdot J_5(j) + - \ldots,$$

ferner:

$$\lim_{j=0} J_0(j) = 1, \quad \lim J_p(j) = \frac{(j/2)^p}{p!} \text{ für } p = 1, 2, 3\ldots,$$

so wird: $\lim_{j=0} Y_1(j) = -1/j$. Da nun $B = 1$, wie oben berechnet, so ist: $\lim_{j=0}(D(j) - \text{Constans}) = 1$. Die Konstante ist demnach = Null. Wir erhalten

$$\frac{D(j)}{j} = Q(j) + 0{,}115\cdot J_1(j) - Y_1(j).$$

Hier ist

$$Q(j) = -\frac{\int dj\cdot P(j)}{j}$$
$$= -1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{j^2}{1^2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{j^4}{1^2\cdot 3^2} + \frac{1}{7}\cdot\frac{j^6}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2} - + \ldots$$

Dann wird:

$$J = \int_0^\infty dr \cdot r \cdot e^{-2ar} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{a_2^2}}} = a_2^2 \cdot \frac{D(j)}{j} = \frac{j^2}{(2a)^2} \cdot \frac{D(j)}{j} \cdot$$

$$J = \frac{1}{4a^2} \cdot j \cdot D(j).$$

Ich berechnete Q und $D(j)$, sowie $(D(j) \cdot j)$ für einzelne Werte von j. Q oszilliert ebenso wie J_1 und $A \cdot J_1$; $D(j)/j$ fällt monoton; $(D \cdot j)$ steigt monoton und hat die Asymptote $(D \cdot j) = 1$. Dies sieht man, wenn man den Grenzwert von $D(j)$ für große j ermittelt. Für solche wird in dem Integral

$$D(j) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \cos\varphi \cdot e^{-j \cdot \operatorname{tg}\varphi}$$

der Faktor $e^{-j \cdot \operatorname{tg}\varphi}$ des Integranden für so kleine φ-Werte schon praktisch verschwinden, für die noch ohne merklichen Fehler gesetzt werden darf: $\cos\varphi = 1$, $\operatorname{tg}\varphi = \varphi$. Nennen wir φ_1 den φ-Wert, für den der Integrand zuerst unmerklich wird, so wird:

$$\lim_{j=\infty} D(j) = \int_0^{\varphi_1} d\varphi \cdot e^{-j \cdot \varphi} = -\frac{1}{j} \cdot e^{-j \cdot \varphi} \Big|_0^{\varphi_1} = \frac{1}{j} \cdot$$

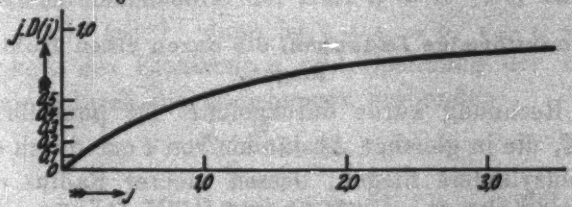


Fig. 2.

Daher ist $\lim_{j=\infty} (j \cdot D(j)) = 1$. Da, wie oben gezeigt, $\lim_{j=0} D(j) = 1$, so ist: $\lim_{j=0} (j \cdot D(j)) = j$. $(j \cdot D(j))$ steigt also anfangs linear an. Als vollständigen Ausdruck für die *Anziehungskraft* erhalten wir:

$$(6) \qquad \mathfrak{K} = \frac{E^2 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 (\varepsilon + \varepsilon_0) \cdot 4a^2} \left[1 + \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} (j \cdot D(j))\right].$$

§ 9. Berücksichtigung endlicher Plattendicke.

Bislang war der leitende Körper als unendlich ausgedehnt betrachtet worden. Die Rechnung ist auch durchgeführt worden für Leiter *mit endlicher Dicke h*. Da aber keine grundsätz-

lichen Schwierigkeiten dabei auftreten, soll hier nur das Ergebnis Platz finden:

In dem Doppelintegral (2), das die auf den Ladungsträger in der Bewegungsrichtung ausgeübte Kraft darstellt, tritt anstatt des Bruches $\frac{1}{(4\pi\sigma)^2 + q^2\alpha^2(\varepsilon+\varepsilon_0)^2}$ der kompliziertere:

$$\frac{1 - \frac{q\alpha e}{4\pi\sigma} \cdot e^{-2h\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdot \frac{N\cdot J}{R^2+J^2} - e^{-4h\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdot \frac{N^2}{R^2+J^2}}{[(4\pi\sigma)^2 + q^2\alpha^2(\varepsilon+\varepsilon_0)^2] + 2\cdot e^{-2h\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdot \frac{N\cdot(J^2-R^2)}{J^2+R^2} + e^{-4h\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdot \frac{N^2}{J^2+R^2}},$$

wobei:

$$J = 8\pi\sigma q\alpha\varepsilon_0; \quad N = q^2\alpha^2(\varepsilon-\varepsilon_0)^2 + (4\pi\sigma)^2;$$
$$R = q^2\alpha^2(\varepsilon^2-\varepsilon_0^2) + (4\pi\sigma)^2.$$

Für $h = \infty$, d. h. $e^{-h\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = 0$, geht er in den ersten über, wirkt jedoch bei endlichem h für alle Werte von α und β verkleinernd und bringt für $h = 0$, d. h. $e^{-h\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = 1$, den Integranden zum Verschwinden.

§ 10. Punktförmige Ladungen, die durch einen Hohlzylinder fliegen.

Die Rechnung wurde durchgeführt für punktförmige Ladungen E, die in gleichen Abständen von l cm durch die Achse eines Hohlzylinders fliegen, dessen innerer Radius r_2 beträgt und dessen äußerer unendlich groß ist. Die Lösung gelang hier mit Fourierreihen und, naturgemäß, Zylinderfunktionen. Die Schlüsse des § 2 sind auch *hier* für die elektrischen Felder maßgebend. Es bedeuten: $(J_0)_2$ die Besselsche Funktion nullter Ordnung, $\left(\frac{i\pi}{2}H_0\right)_2$, $\left(\frac{\pi}{2}H_2\right)_2$ die Hankelschen Funktionen nullter und erster Ordnung, sämtlich zu nehmen vom Argumente

$$w_2 = \frac{2\pi i k r_2}{l}, \tag{7}$$

k ist die Ordnungszahl der Fourierreihe. Dann ist die auf jede Ladung E ausgeübte *Bremskraft* durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$(8)\quad \left\{ \mathfrak{K} = \frac{8 \cdot E^2 \cdot \sigma}{q \cdot r_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{i\pi}{2} H_0\right)_2 \left(\frac{\pi}{2} H_1\right)_2}{k \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2} H_1\right)_2^2 \cdot (J_0)_2^2 \left\{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \frac{4\sigma^2 l^2}{k^2 \cdot q^2}\right\} - \frac{\varepsilon_0 \cdot l (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\pi \cdot k \cdot r_2} \left(\frac{\pi}{2} H_1\right)_2 (J_0)_2 + \frac{\varepsilon_0^2 \cdot l^2}{4\pi^2 k^2 r_2^2}\right.} \right.$$

Zahlenrechnungen.

§ 11. **Kathodenstrahlteilchen mit $q = 10^9 \cdot \mathrm{cm/sec^{-1}}$.**

Um zunächst einen Begriff von der Größenordnung der hier in Frage kommenden Erscheinungen zu erhalten, wollen wir für ein Kathodenstrahlteilchen, das einem Potentialgefälle von etwa 300 Volt entstammt, die *Anziehungs-* und die *Bremskraft* nach (6) und (4) berechnen für den ebenen Fall und nach (8) auch die *Bremskraft* für den zylindrischen Fall. Der Abstand von der Leiteroberfläche soll sein

$$a = 0{,}032 \left(= \frac{1}{10 \cdot \pi}\right) \mathrm{cm},$$

ebenso groß soll der Radius r_2 des Zylinders sein. Wir setzen die Dielektrizitätskonstante der Luft $\varepsilon_0 = 1$. Der Leiter habe $\varepsilon = 5$, $\sigma = 10^{10}\ \mathrm{sec^{-1}}$; dann ist $\varepsilon + \varepsilon_0 = 6$, $\varepsilon - \varepsilon_0 = 4$. Geschwindigkeit des Elektrons q und Spannung der Kathodenröhre V sind durch die Gleichungen verbunden:

$$\frac{m \cdot q^2}{2} = E \cdot V;$$

es ist $E = 4{,}774 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{cm^{3/2}\, g^{1/2}\, sec^{-1}}$, $m = 0{,}903 \cdot 10^{-27}$ g. 300 Volt $= 300 \cdot \frac{1}{300} = 1$ elektrostatische Spannungseinheiten.

$$q = \sqrt{\frac{2 \cdot E \cdot V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}774 \cdot 10^{-10}}{0{,}903 \cdot 10^{-27}}}; \quad q \sim 10^9 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}};$$

die wichtige Größe j wird:

$$j = \frac{8 a \pi \sigma}{q(\varepsilon + \varepsilon_0)} = \frac{8 \cdot 0{,}032 \cdot \pi \cdot 10^{10}}{10^9 \cdot 6} = 1{,}33.$$

Wir erhalten aus (4) für die *Bremskraft*:

$$\mathfrak{K} = -\frac{E^2}{2a^2(\varepsilon + \varepsilon_0)} U(j) = -\frac{(4{,}774)^2 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot (0{,}032)^2 \cdot 6} \cdot 0{,}2495,$$

$$\underline{\mathfrak{K} = -4{,}68 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{dyn},}$$

d. h. wenn das Elektron die Länge $l = 10$ cm überfliegt und zu Beginn die Geschwindigkeit $q_0 = 10^9$ cm/sec^{-1}, danach die Geschwindigkeit q_t hat, so ist die Geschwindigkeitsverminderung:

$$q_0 - q_t = \frac{(-\mathfrak{K}) \cdot t}{m} = \frac{(-\mathfrak{K}) \cdot l}{m \cdot q_0} = \frac{4{,}63 \cdot 10^{-18} \cdot 10}{0{,}903 \cdot 10^{-27} \cdot 10^9},$$

$q_0 - q_t = 52$ cm/sec. Das Elektron verliert also *nur den zwanzigmillionsten Teil* seiner Geschwindigkeit.

Die *Anziehungskraft* wird nach (6):

$$\mathfrak{K} = \frac{E^2 (e - e_0)}{e_0 (e + e_0) \cdot 4a^2} \left(1 + \frac{2e_0}{e - e_0} \cdot j \cdot D(j)\right),$$

$$\mathfrak{K} = \frac{(4{,}774)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-20}}{6 \cdot 4 \cdot (0{,}032)^2} (1 + \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}624) = \underline{+ 49{,}3 \cdot 10^{-18} \text{ dyn.}}$$

Für $q = 0$ wäre die Anziehungskraft:

$$\mathfrak{K} = \frac{E^2}{e_0 \cdot 4a^2} = \frac{(4{,}774)^2 \cdot 10^{-20}}{4 \cdot (0{,}032)^2} = \underline{+ 56{,}2 \cdot 10^{-18} \text{ dyn.}}$$

Ich bestimmte dann auch die Bremskraft für den zylindrischen Fall aus (8). Ich wählte die Periode $l = 1$ cm. Damit wird

$$\mathfrak{K} = \frac{8 \cdot E^2 \cdot \sigma}{q \cdot r_2} \sum_{k=1}^{k=\infty} = - \frac{8 \cdot (4{,}774)^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{10} \cdot 0{,}0150}{10^9 \cdot 0{,}032}$$

$$= \underline{- 8{,}6 \cdot 10^{-18} \text{ dyn.}}$$

Die Bremskraft ist also unter diesen Verhältnissen *nahezu doppelt so groß* wie im ebenen Falle.

§ 12. Möglichkeit experimenteller Prüfung.

Zunächst soll die hier auftauchende Frage entschieden werden, ob bewegte Elektronen (Kathodenstrahlen) beim Vorüberfliegen an Leitern *merklich* gebremst werden. Da an der Verneinung dieser Frage die Sicherheit vieler grundlegender Versuche hängt, darf sie wohl schon Platz finden. Nach (4) ist die Bremskraft:

$$\mathfrak{K} = - \frac{E^2}{2a^2 (e + e_0)} \cdot U(j).$$

Wir nehmen den Abstand möglichst klein, etwa $a = 0{,}01$ cm, und als die Geschwindigkeit langsamer Kathodenstrahlen $q = 10^8$ cm/sec^{-1}. Das entspricht einer Spannung von 3 Volt. Für das Elektron ist $E = - 4{,}774 \cdot 10^{-10}$ cm$^{3/2}$ g$^{1/2}$ sec^{-1},

$m = 0{,}903 \cdot 10^{-27}$ g. Wir wollen die *für die Bremsung günstigsten Bedingungen* wählen, es sei also $\varepsilon = 1$ und σ so beschaffen, daß $j = \frac{8 a \pi \sigma}{q(\varepsilon + \varepsilon_0)} \sim 1{,}3$ wird, $U(j)$ demnach seinen größten Wert hat. Ob dieser günstigste Körper mit solchem ε und σ besteht, ist *gleichgültig*, wenn nur bei diesem schon die Bremsung nicht mehr wahrnehmbar wird. Die vom Elektron überflogene Strecke sei $l = 10$ cm. Mit diesen Zahlen wird nach (5c):

$$q(t) = \operatorname{sign}(q_0) \cdot \sqrt{q_0^2 - \frac{E^2 \cdot l \cdot U(j)}{m \cdot a^2 \cdot (\varepsilon + \varepsilon_0)}} = \sqrt{10^{16} - 3{,}1 \cdot 10^{16}}$$
$$= 0{,}9999985 \cdot 10^8 \text{ cm/sec},$$

eine Größe, deren Abweichung von q_0 *nicht zu messen* sein dürfte. Bei geringeren Geschwindigkeiten würde das die Bremsung hervorrufende Glied in (5c):

$$b = \frac{2 \cdot \mathfrak{R}_0 \cdot l}{m} = -\frac{E^2 \cdot l \cdot U(j)}{m \cdot a^2 \cdot (\varepsilon + \varepsilon_0)} \tag{4d}$$

bei gleichbleibendem Verhältnis q/σ mit abnehmendem q das erste Glied q_0^2 unter der Wurzel in (5c) weit übertreffen, die Bremsung also *sehr stark* sein. Wenn q in die Größenordnung der Hertzschen Versuche kommt, etwa $q = 1$ cm/sec^{-1}, so ergibt sich, wenn ε etwa 4 und $a = 0{,}2$ cm ist, das günstigste σ (das $j = 1{,}3$ macht) zu etwa $\sigma = 1{,}5$ sec^{-1}. Das ist die Größenordnung der Leitfähigkeit von Spiegelglas, das Hertz verwendete. Bei einem seiner Versuche drehten sich zwei rechteckige Kupferscheiben mit den Kantenlängen 3 cm und 2 cm an einer 10 cm langen Nadel, während die Spannung von 50 Daniellelementen $= 50 \cdot 1{,}085$ Volt $= \frac{50 \cdot 1{,}085}{300} = 0{,}018$ absolute elektrostatische Spannungseinheiten angelegt war. Die Kapazität C dieses ebenen Kondensators ist mit Vernachlässigung der Randwirkung:

$$C = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\text{Fläche}}{\text{Abstand}} = \frac{2 \cdot 3}{4\pi \cdot 0{,}2} = 2{,}4 \text{ cm}.$$

Die Ladung = Kapazität mal Spannung

$$= 0{,}018 \cdot 2{,}4 \sim 0{,}5 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}.$$

Berücksichtigen wir den Trägheitswiderstand der an die Nadel gehängten Gewichte, indem wir etwa setzen $m = 5$ g, so wird mit: $q = 1$ cm/sec^{-1}, $E = 0{,}5$ cm$^{3/2}$ g$^{1/2}$ sec^{-1}, $\varepsilon + \varepsilon_0 = 5$,

$\sigma = 0{,}25\ \text{sec}^{-1}$, $a = 0{,}2$ cm, daher $j = \frac{8\pi \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2}{1 \cdot 5} \sim 0{,}2$ und $U(j) = 0{,}12$ die Bremsung auf der Strecke $l = 1$ cm nach (4d):

$$b = -\frac{(0{,}5)^2 \cdot 1 \cdot 0{,}12}{5 \cdot (0{,}2)^2 \cdot 5} = -0{,}03\ \text{cm}^2/\text{sec}^{-2},$$

eine Größe, die auf $q = 1$ cm/sec^{-1} merkbar vermindernd wirkt, selbst wenn wir berücksichtigen, daß wir hier einerseits die Ladung nicht als endlich ausgedehnt, sondern punktförmig betrachten, was aber wohl keine außerhalb der Größenordnung liegende Werte hervorruft, ferner natürlich Formel (5c) nur für geringe Bremsung oder sehr kurze Bremszeiten annähernd gilt. Ein genaues Zahlenbeispiel nach der ursprünglichen Formel (2) auszurechnen, hielt ich aus dem Grunde nicht der Mühe lohnend, da auch bei einer solchen Rechnung q als räumlich konstant angenommen werden müßte, was für die Hertzschen Torsionsversuche eben nicht gilt.

Ich möchte es nicht unterlassen, Hrn. Prof. M. von Laue auch an dieser Stelle meinen ehrerbietigen und tiefgefühlten Dank auszusprechen für die Anregung zu dieser Arbeit und viele gütige Hilfe und Teilnahme an derselben.

Ich gedenke auch gern der Anteilnahme und mancher Ratschläge meines Freundes, Hrn. Marianus Czerny.

(Eingegangen 7. Mai 1923.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

LEITZ

MIKROSKOPE

für alle wissenschaftlichen Untersuchungen
im gewöhnlichen u. polarisierten Licht
Binokular-Mikroskope · Lupen u. Lupenmikroskope
Mikroskopische Nebenapparate
insbesond. für Dunkelfeld- u. Ultramikroskopische Untersuchungen
Mikrophotographische- u. Projektions-Apparate
Prismen - Fernrohre

ERNST LEITZ OPTISCHE WERKE WETZLAR
Man verlange Sonderliste: Mikro 289

Inhalt.

Seite

W. Gerdien. Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie 421

J. Aloys Wenzl. Gegen ein Mißverständnis der Äquivalenzhypothese 457

A. Joffé. Elektrizitätsdurchgang durch Kristalle 461

Die Redaktion der Annalen wird von den unterzeichneten Herren besorgt. Der geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 9[I].

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Jedermann ist Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren sonst möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

1923. № 22.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 72.

1. *Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie;* *von W. Gordon.*

Im ersten Teil dieser Arbeit wird gezeigt, daß der Einfluß der Materie auf die elektromagnetischen Vorgänge äquivalent ist mit dem Einfluß eines Gravitationsfeldes mit den Potentialen $k u_\mu u_\nu$ (k Fresnelscher Mitführungskoeffizient, u_μ Vierergeschwindigkeit). Durch diese Zurückführung auf das Vakuum erhält man unmittelbar das Prinzip der kleinsten Wirkung und daraus insbesondere den Energietensor des elektromagnetischen Feldes in ponderabeln Körpern. Man gelangt so zu dem von M. Abraham aufgestellten Tensor. Im zweiten Teil werden die für beliebige lineare Tensoren gültigen Wellengleichungen abgeleitet. Zu den aus der speziellen Theorie durch Transformation hervorgehenden Ausdrücken (die nach dem Äquivalenzprinzip in durch Transformation erzeugten „künstlichen“ Schwerefeldern gelten würden) kommen noch Terme hinzu, die den unverjüngten und einmal verjüngten Krümmungstensor enthalten. Trotzdem befolgen diese Ausdrücke die Rechnungsregeln, von denen man in der speziellen Theorie Gebrauch macht. Es genügen daher, wie im dritten Teil gezeigt wird, das Feld, das Viererpotential und das Sechserpotential (Hertzscher Tensor) der verallgemeinerten Wellengleichung. Der Vorzug des Sechserpotentials besteht darin, daß außer der Wellengleichung keine weitere Nebenbedingung zu erfüllen ist. Es steht zur Sechserpolarisation in genau derselben Beziehung wie das Viererpotential zum Viererstrom. Im vierten Teil wird präzisiert, unter welchen Voraussetzungen man von Lichtstrahlen in geometrisch-optischer Beziehung sprechen kann. Die Weltlinien der Strahlen sind die geodätischen Nullinien in einem Gravitationsfeld, das außer dem wirklich vorhandenen noch das der Vierergeschwindigkeit der Materie entsprechende enthält.

1.

Transformation der elektromagnetischen Gleichungen. Die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes, die die Grundlage für die Untersuchung der Lichtfortpflanzung bilden, werden gewöhnlich so geschrieben:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\, H^{ik}) = s^i, \tag{2}$$

$$H_i = \varepsilon F_i, \tag{3}$$

$$u_i F_{kl} + u_k F_{li} + u_l F_{ik} = \mu(u_i H_{kl} + u_k H_{li} + u_l H_{ik}), \tag{4}$$

$$s_i + u_i(s^k u_k) = \sigma F_i, \tag{5}$$

wo zur Abkürzung

$$F_i = F_{ik} u^k, \quad H_i = H_{ik} u^k \tag{6}$$

gesetzt ist. u^i ist die Vierergeschwindigkeit der Materie

$$u^i = \frac{dx^i}{\sqrt{-ds^2}}, \tag{7}$$

so daß

$$g_{ik} u^i u^k = u^i u_i = -1 \tag{8}$$

(das Linienelement habe eine negative und drei positive Dimensionen). Die Bedeutung der übrigen Größen ist bekannt. Zu diesen Gleichungen treten die inhomogenen Einsteinschen Gravitationsgleichungen, in die die Summe aus elastischem und elektromagnetischem Energietensor einzusetzen ist. Letzteren werden wir später angeben.

Die Gleichungen (3) und (4) stellen zusammen sechs voneinander unabhängige Gleichungen dar; denn sie drücken aus, daß im Ruhsystem (und bei Normalwerten der g_{ik}) $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ ist. Wir wollen sie nach H_{ik} auflösen. Multiplikation von (4) mit u^i ergibt, wenn man (3), (6) und (8) beachtet,

$$\begin{aligned} -F_{kl} + u_k F_l - u_l F_k &= \mu\{-H_{kl} + u_k H_l - u_l H_k\} \\ &= \mu\{-H_{kl} + \varepsilon(u_k F_l - u_l F_k)\} \end{aligned}$$

oder

$$\mu H_{ik} = F_{ik} + (\varepsilon\mu - 1)(u_i F_k - u_k F_i). \tag{9}$$

Aus (9) folgen wieder rückwärts (3) und (4). Wir können daher (3) und (4) durch (9) ersetzen.

In den Differentialgleichungen (1) und (2) tritt die Vierergeschwindigkeit nicht auf. Wir wollen die Gleichungen so schreiben, daß auch das Gravitationsfeld auf die Zusatzgleichungen verwiesen wird. Wir ersetzen (1) und (2) durch

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0, \tag{1'}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}^{ik}}{\partial x^k} = \mathfrak{s}^i \tag{2'}$$

und machen auch in den übrigen Gleichungen die Substitution

$$\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{g}\, H^{ik}, \qquad \mathfrak{s}^i = \sqrt{g}\, s^i. \tag{10}$$

Es ist also das elektromagnetische Feld charakterisiert durch

$$F_{ik}, \qquad \mathfrak{H}^{ik}, \tag{11}$$

F_{ik} ein linearer Tensor, $\mathfrak{H}^{ik}$ eine lineare Tensordichte[1]); das Gravitationsfeld durch

$$g_{ik}; \tag{12}$$

der elektrische Zustand der Materie durch

$$\varepsilon, \ \mu, \ \sigma, \ \mathfrak{s}^i, \tag{13}$$

ε, μ, σ Skalare, $\mathfrak{s}^i$ eine Vektordichte; der mechanische Zustand der Materie (durch mechanische Konstante) und durch die Funktionen

$$x^i = x^i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau), \tag{14}$$

die die Weltlinien der materiellen Punkte (durch α_1, α_2, α_3 voneinander unterschieden, während τ die Lage auf der Weltlinie angibt) darstellen. In den elektrischen und mechanischen Gleichungen treten nur die Ableitungen dieser Funktionen auf. Die Vierergeschwindigkeit ist eine Kombination der Bestimmungsstücke (12) und (14)

$$u^i = \frac{\dfrac{\partial x^i}{\partial \tau}}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\dfrac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\dfrac{\partial x^\nu}{\partial \tau}}}. \tag{15}$$

Für die auszuführende Transformation und die daran anschließenden Entwicklungen ist der Umstand ausschlaggebend, daß in der „dielektrischen" Gleichung (9), die für die Lichtfort-

1) Nach der Terminologie von H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. 4. Aufl. S. 51 und 98.

pflanzung in durchsichtigen Körpern maßgebend ist, die Größen (12) und (15) nur in der Verbindung

$$\gamma^{ik} = g^{ik} - (\varepsilon\mu - 1)\, u^i u^k \tag{16}$$

auftreten.

Um dies zu zeigen, schreiben wir (9) zunächst in kontravarianter Form

$$\mu H^{ik} = F^{ik} + (\varepsilon\mu - 1)(u^i F^k - u^k F^i). \tag{9'}$$

Die linke Seite ist nach (10) $\frac{\mu \mathfrak{H}^{ik}}{\sqrt{g}}$; das erste Glied rechts $g^{ir} g^{ks} F_{rs}$. Nach (6) gilt ferner

$$F^k = g^{ks} F_{sr} u^r = - g^{ks} F_{rs} u^r, \qquad F^i = g^{ir} F_{rs} u^s,$$

so daß wir für die rechte Seite von (9')

$$F_{rs}\{g^{ir} g^{ks} - (\varepsilon\mu - 1)(u^i u^r g^{ks} + u^k u^s g^{ir})\}$$

erhalten. Fügen wir hier in der geschweiften Klammer noch das Glied $(\varepsilon\mu - 1)^2 u^i u^k u^r u^s$ hinzu, das wegen der Antisymmetrie von F_{rs} verschwindet, so wird aus dieser Klammer $(g^{ir} - (\varepsilon\mu - 1) u^i u^r)\,(g^{ks} - (\varepsilon\mu - 1) u^k u^s)$ oder gemäß (16) $\gamma^{ir}\gamma^{ks}$. Wir können also (9') einmal in die Form

$$\mu \mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{g}\, \gamma^{ir} \gamma^{ks} F_{rs} \tag{17}$$

bringen. Für das weitere führen wir die zu den γ^{ik} reziproken Größen γ_{ik} ein, die sich eindeutig aus der Forderung $\gamma^{ir}\gamma_{rk} = \delta^i{}_k$ zu

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_i u_k \tag{18}$$

bestimmen. In Analogie zu g werde die negative Determinante der γ_{ik} mit γ bezeichnet. Das Verhältnis γ/g ist eine Invariante (Zähler und Nenner multiplizieren sich bei Transformation mit dem Quadrat der Funktionaldeterminante). Wir dürfen daher der Rechnung den Fall $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ zugrunde legen und erhalten

$$-\gamma = \begin{vmatrix} g_{11} \cdots g_{14} \\ \cdots\cdots \\ g_{41} \cdots g_{44} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_4 u_4 \end{vmatrix} = -g - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) g g^{44} u_4 u_4;$$

denn $-g g^{44}$ ist die Unterdeterminante des Elementes (4, 4) der Determinante. Nach (8) ist $g^{44} u_4 u_4 = -1$; also

(19) $$\gamma = \frac{g}{\varepsilon\mu}$$

und damit erhält (17) die Form

(20) $$\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sqrt{\gamma}\,\gamma^{ir}\gamma^{ks}F_{rs},$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Wir werden also dazu veranlaßt, an Stelle des Linienelements ds mit den Koeffizienten g_{ik} ein neues Linienelement $d\sigma$ mit den durch (18) gegebenen Koeffizienten γ_{ik} einzuführen. Wir wollen die auf dieses neue Linienelement bezüglichen Indizes durch Einklammern kenntlich machen. (Nur statt $g^{(i)(k)}$ bzw. $g_{(i)(k)}$ schreiben wir wie bisher γ^{ik} bzw. γ_{ik}). Die Bestimmungsstücke (11), (13), (14) bleiben natürlich von dieser Transformation unberührt, und es ist

(21) $$F_{(i)(k)} = F_{ik}, \qquad \mathfrak{H}^{(i)(k)} = \mathfrak{H}^{ik}, \qquad \mathfrak{s}^{(i)} = \mathfrak{s}^{i}.$$

Wir werden daher bei diesen Größen die Klammern bei den Indizes auch weglassen können. Die zu den Dichten $\mathfrak{H}^{(i)(k)}$, $\mathfrak{s}^{(i)}$ bezüglich (18) gehörigen Tensoren $H^{(i)(k)}$, $s^{(i)}$ werden nach dem Muster (10) wegen (19)

(22) $$H^{(i)(k)} = \frac{\mathfrak{H}^{(i)(k)}}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\,\mathfrak{H}^{ik}}{\sqrt{g}} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,H^{ik}, \qquad s^{(i)} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,s^{i}.$$

Die in (20) auftretende Verbindung $\gamma^{ir}\gamma^{ks}F_{rs}$ kann nach unserer Festsetzung offenbar $F^{(i)(k)}$ geschrieben werden, $\frac{\mathfrak{H}^{ik}}{\sqrt{\gamma}}$ ist $H^{(i)(k)}$. (20) erscheint dann in der symmetrischen Form

(23) $$\sqrt{\varepsilon}\,F^{(i)(k)} = \sqrt{\mu}\,H^{(i)(k)}$$

oder wenn man zu den bezüglich der Metrik γ_{ik} kovarianten Komponenten übergeht

(23′) $$\sqrt{\varepsilon}\,F_{(i)(k)} = \sqrt{\mu}\,H_{(i)(k)}.$$

Erzetzt man in (23) $H^{(i)(k)}$ nach (22) durch $\sqrt{\varepsilon\mu}\,H^{ik}$, so erhält man die Gleichung $F^{(i)(k)} = \mu H^{ik}$ und der Vergleich mit (9′) zeigt, daß für $F^{(i)(k)}$ die Transformationsformel

(24) $$F^{(i)(k)} = F^{ik} + (\varepsilon\mu - 1)(u^i F^k - u^k F^i)$$

gilt. (3) und (4) gehen in sich über, wenn man ε und μ mit ihren reziproken Werten und gleichzeitig F mit H vertauscht. Bei

dieser Vertauschung wird aus der mit (3) und (4) äquivalenten Gleichung (9)

$$\frac{F_{ik}}{\mu} = H_{ik} + \left(\frac{1}{\varepsilon\mu} - 1\right)(u_i H_k - u_k H_i).$$

Vergleicht man dies mit (23'), indem man beachtet, daß nach (21) $F_{(i)(k)} = F_{ik}$ ist, so erhält man für $H_{(i)(k)}$ die Transformationsformel

$$H_{(i)(k)} = \sqrt{\varepsilon\mu}\left[H_{ik} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)(u_i H_k - u_k H_i)\right]. \tag{25}$$

Für das Linienelement $d\sigma$ finden wir allgemein nach (18)

$$\begin{cases} d\sigma^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)(u_i\,dx^i)^2 = ds^2 \\ \qquad\qquad + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)(u_i\,dx^i)^2. \end{cases} \tag{26}$$

Für die Weltrichtung der Materie ist $dx^i = u^i\sqrt{-ds^2}$ und daher wegen (8) $d\sigma^2 = \frac{ds^2}{\varepsilon\mu}$. Es ist also

$$u^{(i)} = \frac{dx^i}{\sqrt{-d\sigma^2}} = u^i\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{27}$$

Die kovarianten Komponenten $u_{(i)} = \gamma_{ir}u^{(r)}$ werden, wenn man wiederum (8) berücksichtigt,

$$u_{(i)} = \frac{u_i}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{28}$$

Nach (21_1) und (27) wird

$$F_{(i)} = F_{(i)(k)}u^{(k)} = F_{ik}u^k\sqrt{\varepsilon\mu} = F_i\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{29}$$

und nach (16)

$$F^{(i)} = \gamma^{ir}F_{(r)} = \left(g^{ir} - (\varepsilon\mu - 1)u^i u^r\right)F_r\sqrt{\varepsilon\mu} = F^i\sqrt{\varepsilon\mu}, \tag{30}$$

denn es ist $F_r u^r = 0$. Ganz analog erkennt man, daß

$$H^{(i)} = H^i, \qquad H_{(i)} = H_i. \tag{31}$$

Wir sind jetzt in der Lage, auch das Ohmsche Gesetz (5) auf das neue Linienelement umschreiben zu können. Die kontravariante Komponente der linken Seite von (5) ist nach (22_2), (27) und (28) $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(s^{(i)} + u^{(i)}(u_{(k)}s^{(k)})\right)$, die kontravariante rechte Seite nach (30) $\frac{\sigma F^{(i)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Demnach

$$s^{(i)} + u^{(i)}(u^{(k)}s^{(k)}) = \sigma F^{(i)}, \tag{32}$$

oder (bezüglich γ_{ik}) kovariant geschrieben

$$s_{(i)} + u_{(i)}(u^{(k)} s_{(k)}) = \sigma F_{(i)}. \tag{32'}$$

Für das hier auftretende $s_{(i)}$ erhält man nach (18) und (22_2)

$$s_{(i)} = \gamma_{ir} s^{(r)} = \sqrt{\varepsilon\mu}\left[s_i + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_i (u^r s_r)\right]. \tag{33}$$

Zusammenfassend können wir also folgenden Satz aussprechen:

Transformiert man das Gravitationsfeld von g_{ik} auf γ_{ik} durch die Transformationsformeln

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_i u_k,$$

d. h. bildet man die Komponenten der den Differentialgleichungen des Feldes zugrunde liegenden Größen F_{ik}, $\mathfrak{H}^{ik}$, $\mathfrak{s}^i$ bezüglich dieser Metrik, dann nehmen die Zusatzgleichungen die Form

$$\sqrt{\varepsilon}\, F_{(i)(k)} = \sqrt{\mu}\, H_{(i)(k)}, \quad s_{(i)} + u_{(i)}(u^{(k)} s_{(k)}) = \sigma F_{(i)}, \quad u^{(i)} = \frac{dx^i}{\sqrt{-d\sigma^2}}$$

an. Aus der dielektrischen Gleichung fällt die Vierergeschwindigkeit heraus, während das Ohmsche Gesetz seine Form behält.

Für nichtleitende ($\sigma = 0$), ungeladene ($u^k s_k = 0$), homogene (ε, μ konstant) Medien sind die Differentialgleichungen für das Feld F mit denen des reinen Vakuums beim Gravitationsfeld γ_{ik} identisch.

Im letzteren Falle können wir unserm Satze die folgenden zwei physikalischen Deutungen geben:

1. Die elektromagnetischen Erscheinungen in ponderablen Körpern sind dieselben wie im Vakuum, in dem außer dem vorhandenen Gravitationsfeld noch ein Zusatzfeld mit den Potentialen $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_i u_k$ herrscht. In der speziellen Theorie ist bei Beschränkung auf Größen erster Ordnung

$$\gamma_{\alpha\beta} = 1, \quad \gamma_{\alpha 4} = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)\frac{v_\alpha}{c}, \quad \gamma_{44} = -\frac{1}{\varepsilon\mu}$$

$$\left(\alpha, \beta = 1, 2, 3; \; v_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}\right)$$

und das Linienelement $d\sigma$ wird

$$d\sigma^2 = dx_\alpha\, dx^\alpha - 2\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) v_\alpha\, dx^\alpha\, dt - \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\, dt^2. \tag{34}$$

Die Lichtgeschwindigkeit wird (wie wir im vierten Teil zeigen werden) bei gegebener Richtung durch $d\sigma^2 = 0$ bestimmt. Sind

Licht- und Körpergeschwindigkeit einander parallel, so folgt aus (34) die bekannte Formel

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) v, \tag{35}$$

oder mit derselben Genauigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu} - (\varepsilon\mu - 1)\frac{v}{c}}. \tag{35'}$$

(35') kann man dahin interpretieren, daß sich das Licht, wie in einem ruhenden Medium vom Brechungsindex $\sqrt{\varepsilon\mu} - (\varepsilon\mu - 1)\frac{v}{c}$ fortpflanzt. Unsere Deutung des Transformationstheorems ist eine Verallgemeinerung dieser Interpretation. Wir haben gewissermaßen eine „Ruhtransformation" vor uns.

In der vorrelativistischen Physik wurde der Term $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) v$ in (35) als „Mitführung des Äthers" angesprochen. Wir können unserm Satz eine analoge Deutung geben.

2. Wir zerlegen die Weltverschiebung PQ in die der Vierergeschwindigkeit parallele Mitführungskomponente PP'

$$-\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) u^i u_r dx^r \tag{36}$$

und in die Ätherkomponente $P'Q$

$$d\xi^i = dx^i + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) u^i u_r dx^r.$$

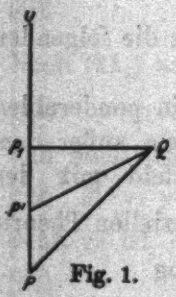


Fig. 1.

Für die Entfernung $P'Q$ nach der *tatsächlich vorhandenen Metrik* ergibt sich

$$g_{ik} d\xi^i d\xi^k = g_{ik} dx^i dx^k + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)(u_r dx^r)^2,$$

also nach (26) gleich der Entfernung PQ nach der Metrik γ_{ik}. Ist PQ ein Lichtstrahl im Körper, dann ist $d\sigma^2 = 0$, woraus $g_{ik} d\xi^i d\xi^k = 0$ folgt, d. h. $P'Q$ ist ein Lichtstrahl im Vakuum (beim tatsächlich vorhandenen Gravitationsfeld g_{ik}). Beide unterscheiden sich durch die Mitführung (36). P_1 sei die senkrechte Projektion von Q auf die Richtung u, so daß $PP' = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) PP_1$. Das Analogon der Hertzschen Theorie wäre die Zerlegung PP_1, P_1Q, was einer unendlich großen Vakuum-

lichtgeschwindigkeit im Ruhsystem (P_1 und Q sind in ihm gleichzeitig) entsprechen würde, ganz gemäß dem Galileischen Relativitätsprinzip, das dieser Theorie zugrunde liegt. Man könnte demnach den Faktor $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)$ als „relativistischen" Mitführungskoeffizienten bezeichnen.[1])

Aus dem Vergleich mit den Vakuumfeldgleichungen können wir unmittelbar das *Prinzip der kleinsten Wirkung* und damit nach den Ergebnissen der allgemeinen Relativitätstheorie den *Energietensor* ableiten. Wir sehen vom Ohmschen Gesetz ab, und fassen $\mathfrak{s}^i$ als eine an der Materie haftende Eigenschaft auf wie ε und μ [vgl. (13)]. Dann haben wir nurmehr die Zusatzgleichung (20), die wir nach den getroffenen Festsetzungen auch

$$\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sqrt{\gamma}\, F^{(i)(k)} \tag{20'}$$

schreiben können. (20) bzw. (20') unterscheiden sich von den im Vakuum beim Gravitationsfeld γ_{ik} zu den Differentialgleichungen (1') und (2') hinzutretenden Zusatzgleichung nur dadurch, daß an Stelle von $\sqrt{\gamma}$ der Faktor $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sqrt{\gamma}$ steht. Demnach erhalten wir ohne weiteres durch diese Substitution aus der elektrischen Wirkungsdichte $L^{(e)}$ des Wirkungsprinzips für das Vakuum (beim Gravitationsfeld γ_{ik})

$$\delta_\varphi W^{(e)} = \delta_\varphi \int L\, d\mathcal{S} = 0, \quad (d\mathcal{S} = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4), \tag{37}$$

$$L^{(e)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{\gamma}\, F_{rs} F^{(r)(s)} - \mathfrak{s}^i \varphi_i, \tag{38}$$

wo das Viererpotential φ_i mit dem Felde F durch die Gleichung

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \tag{39}$$

zusammenhängt, die elektrische Wirkungsdichte bei Anwesenheit von Materie

---

1) Die erste Deutung ist, wenn man schon einmal die Verhältnisse in bewegten Körpern mit denen bei Ruhe vergleichen will, offenbar die dem Geist der Relativitätstheorie angemessene. Denn anstatt dem Äther eine Eigenschaft der Materie, nämlich eine Geschwindigkeit zuzuschreiben, wird umgekehrt der Materie ein Gravitationsfeld, also eine Eigenschaft des Äthers, zugeschrieben.

$$L^{(e)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sqrt{\gamma}\, F_{\sigma\tau} F^{(\sigma)(\tau)} - \mathfrak{s}^i \varphi_i \tag{40}$$

oder nach (20')

$$L^{(e)} = \tfrac{1}{4} F_{\sigma\tau} \tilde{F}^{\sigma\tau} - \mathfrak{s}^i \varphi_i ; \tag{40'}$$

denn es ist nur das Viererpotential zu varieren (was wir durch δ_φ angedeutet haben). An den Grenzen des Gebietes, über das das Integral in (37) erstreckt wird, sollen diese Variationen verschwinden.[1])

Um die Gleichungen für die Materie zu erhalten, haben wir zur elektrischen Wirkungsgröße $W^{(e)}$ noch die mechanische $W^{(m)}$ hinzuzufügen. In der Variationsgleichung

$$\delta_m W^{(e)} + \delta_m W^{(m)} = 0 \tag{41}$$

sind nur die Funktionen (14) zu varieren. (Dies soll durch δ_m angedeutet werden, an der Grenze sei $\delta_m = 0$). Dabei erleidet die Vierergeschwindigkeit (15) die lokale Änderung

$$\left\{\begin{aligned} \delta_m u^i = {} & \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial x^\tau} u^\tau - \frac{\partial u^i}{\partial x^\tau} \delta x^\tau + u^i u_\mu \frac{\partial\, \delta x^\mu}{\partial x^\tau} u^\tau \\ & + \tfrac{1}{2} u^i \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} u^\mu u^\nu\, \delta x^\tau . \end{aligned}\right. \tag{42}$$

(Diese Größe ist natürlich ein Vektor. Um das auch in der Darstellung hervortreten zu lassen, hat man nur die gewöhnlichen Ableitungen durch die im zweiten Teil erklärten kovarianten Ableitungen zu ersetzen[2]).) Von der durch die Funktionen δx^i charakterisierten Verrückung der Materie werden auch die in der Materie enthaltenen elektrischen Korpuskeln mitgenommen. Die durch die Variation δx^i induzierte Variation von ε und μ (gebundene Elektronen) und $\mathfrak{s}^i$ (freie Elektronen) erhält man am einfachsten[3]) aus dem Transformationscharakter dieser Größen (ε, μ Skalare, $\mathfrak{s}^i$ kontravariante Vektordichte):

$$\delta_m \varepsilon = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\tau} \delta x^\tau , \quad \delta_m \mu = - \frac{\partial \mu}{\partial x^\tau} \delta x^\tau . \tag{43}[4])$$

---

1) Das Prinzip (37) (40') ist von E. Henschke, Diss. Berlin 1912. Ann. d. Phys. 42. S. 887. 1913 aufgestellt worden.

2) Es ist $\delta_m u^i = u^\tau D_\tau\, \delta x^i - \delta x^\tau D_\tau u^i + u^i u_\mu u^\tau D_\tau\, \delta x^\mu$.

3) H. Weyl, a. a. O. S. 212.

4) Wir sehen damit von der Veränderlichkeit von ε und μ mit dem Deformationszustand der Materie ab.

$$(44)\quad \begin{cases} \delta_m \mathfrak{s}^i = \mathfrak{s}^r \dfrac{\partial \delta x^i}{\partial x^r} - \dfrac{\partial}{\partial x^r}(\mathfrak{s}^i \delta x^r) = \dfrac{\partial}{\partial x^r}(\delta x^i \mathfrak{s}^r - \delta x^r \mathfrak{s}^i) \\ \qquad\qquad - \dfrac{\partial \mathfrak{s}^r}{\partial x^r} \delta x^i . \end{cases}$$

Aus der zweiten Form von $\delta_m \mathfrak{s}^i$ sieht man, daß $\delta_m \mathfrak{s}^i$ eine Vektordichte ist (vgl. Gl. (98) und (99)). Setzen wir den aus (2') sich ergebenden Erhaltungssatz der Elektrizität $\dfrac{\partial \mathfrak{s}^r}{\partial x^r} = 0$ voraus, so vereinfacht sich (44) zu

$$(44')\qquad \delta_m \mathfrak{s}^i = \frac{\partial}{\partial x^r}(\delta x^i \mathfrak{s}^r - \delta x^r \mathfrak{s}^i).$$

Der Vektor u^i wird dagegen von der Variation δx^i nicht mitgenommen, weil sich, da das metrische Feld an Ort und Stelle bleibt, der Abstand zweier materieller Raumzeitpunkte im allgemeinen ändert. (Vgl. Anmerkung 1) S. 432.)

Die zu $W^{(m)}$ gehörige Wirkungsdichte $L^{(m)}$ ist abhängig von den ersten Ableitungen der Funktionen (14) und den g_{ik}.[1])

Aus den elektrischen Gleichungen (37) und den mechanischen Gleichungen (41) folgt der Energieimpulssatz. Man zeigt dies, ohne von dem expliziten Ausdruck von $L^{(e)}$ und $L^{(m)}$ Gebrauch zu machen, bekanntlich[2]), indem man eine Variation betrachtet, bei der alle Größen, auch das Gravitationsfeld, mitgenommen werden. Dann gilt wegen der Invarianz von $W^{(e)}$ und $W^{(m)}$ identisch

$$(45)\qquad \delta_g W^{(e)} + \delta_m W^{(e)} + \delta_g W^{(e)} = 0,$$

$$(46)\qquad \delta_m W^{(m)} + \delta_g W^{(m)} = 0,$$

wo δ_g auf die Änderung der g_{ik} hinweist. Wir setzen

$$(47)\qquad \delta_g L^{(e)} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{T}_{ik} \delta g^{ik}, \quad \delta_g L^{(m)} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{M}_{ik} \delta g^{ik};$$

$\mathfrak{T}_{ik}$ und $\mathfrak{M}_{ik}$ elektrische und mechanische Energietensordichte. In δ_g ist für δg^{ik} einzusetzen

$$(48)\qquad \delta g^{ik} = g^{ir} \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^r} + g^{kr} \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^r} - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^r} \delta x^r .$$

---

1) G. Herglotz, Ann. d. Phys. 36. S. 493. 1911; G. Nordström, Versl. Amst. 25. S. 836. 1916.

2) H. Weyl, a. a. O. § 28.

(Den Tensorcharakter von δg^{ik} erkennt man, indem man wie oben die gewöhnlichen durch die kovarianten Ableitungen ersetzt.) Partielle Integration ergibt

$$\delta_g W^{(e)} = -\int \left(\frac{\partial \mathfrak{T}_i^r}{\partial x^r} + \tfrac{1}{2} \mathfrak{T}_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} \right) \delta x^i \, dS \tag{49}$$

und eine analoge Formel (49') für $\delta_g W^{(m)}$. Aus (45), (46), (49) und (49') folgt

$$\delta_g W^{(e)} + \delta_m W^{(e)} + \delta_m W^{(m)} = \int \left(\frac{\partial \mathfrak{S}_i^r}{\partial x^r} + \tfrac{1}{2} \mathfrak{S}_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} \right) \delta x^i \, dS, \tag{50}$$

wo $\mathfrak{S}_{ik}$ die Summe beider Energietensordichten ist. Die Gleichungen (37) und (41) haben also in der Tat den Energieimpulssatz

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_i^r}{\partial x^r} + \tfrac{1}{2} \mathfrak{S}_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} = 0 \tag{60}$$

zur Folge.

Den aus (47_1) sich ergebenden elektrischen Energietensor können wir nun leicht auf Grund unseres Satzes aus demjenigen für das Vakuum ableiten. Im Vakuum beim Gravitationsfeld γ_{ik} gilt

$$\delta_\gamma L^{(e)} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{T}_{(i)(k)} \delta \gamma^{ik} \tag{61}$$

$$\mathfrak{T}_{(i)}^{(k)} = \sqrt{\gamma} \left(F_{ir} F^{(k)(r)} - \tfrac{1}{4} F_{rs} F^{(r)(s)} \delta_i^k \right). \tag{62}$$

Wir haben hier einfach wieder wie oben $\sqrt{\gamma}$ durch $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sqrt{\gamma}$ zu ersetzen und erhalten, wenn wir wiederum (20') berücksichtigen

$$\mathfrak{T}_{(i)}^{(k)} = F_{ir} \mathfrak{H}^{kr} - \tfrac{1}{4} F_{rs} \mathfrak{H}^{rs} \delta_i^k. \tag{63}$$

Um die Beziehung zwischen $\mathfrak{T}_i^k$ und $\mathfrak{T}_{(i)}^{(k)}$ zu ermitteln, haben wir bloß noch $\delta \gamma^{ik}$ durch δg^{ik} auszudrücken. Es ist zunächst nach (15)

$$\delta_g u^i = \tfrac{1}{2} u^i u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2} u^i u_\mu u_\nu \delta g^{\mu\nu} \tag{64}^{1}$$

---

1) Setzt man hier für δg^{ik} den Wert (48) ein, so wird

$$\delta_g u^i = -u^i u_\mu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^r} u^r + \tfrac{1}{2} u^i \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^r} u_\mu u_\nu \delta x^r = -u^i u_\mu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^r} u^r - \tfrac{1}{2} u^i \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^r} u^\mu u^\nu \delta x^r.$$

Dadurch werden die zwei letzten Terme in (42) kompensiert:

und daher weiter

$$(65)\quad \begin{cases} \delta\gamma^{ik} = \delta\{g^{ik} - (\varepsilon\mu - 1)u^i u^k\} = \delta g^{ik} \\ \qquad\qquad + (\varepsilon\mu - 1)u^i u^k u_\mu u_\nu \delta g^{\mu\nu}. \end{cases}$$

Setzen wir dies in (61) ein und vergleichen mit (47_1), so finden wir

$$(66)\qquad \mathfrak{T}_{ik} = \mathfrak{T}_{(i)(k)} + (\varepsilon\mu - 1)u_i u_k \mathfrak{T}_{(\mu)(\nu)} u^\mu u^\nu.$$

Die gemischten Komponenten ergeben sich hieraus, indem man die linke Seite und das zweite Glied rechts mit g^{kl}, das erste Glied rechts mit $\gamma^{kl} + (\varepsilon\mu - 1)u^k u^l$ multipliziert zu

$$(66')\quad \mathfrak{T}_i^l = \mathfrak{T}_{(i)}^{(l)} + (\varepsilon\mu - 1)(\mathfrak{T}_{(i)(k)} u^k + u_i \mathfrak{T}_{(\mu)(\nu)} u^\mu u^\nu) u^l.$$

Im Ruhsystem (und bei Normalwerten der g_{ik}) hat der Faktor von $(\varepsilon\mu - 1)u^i$ die Werte $\mathfrak{T}_{(\alpha)(4)}$, 0 ($\alpha = 1, 2, 3$). Nach (66) ist in diesem Fall $\mathfrak{T}_{\alpha 4} = \mathfrak{T}_{(\alpha)(4)}$. Mithin

$$(67)\qquad \mathfrak{T}_i^l = \mathfrak{T}_{(i)}^{(l)} + (\varepsilon\mu - 1)(\mathfrak{T}_{ik} u^k + u_i \mathfrak{T}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) u^l$$

und daraus gemäß (63)

$$(67')\qquad T_i^k = F_{ir} H^{kr} - \tfrac{1}{4} F_{rs} H^{rs} \delta_i^k - (\varepsilon\mu - 1)\Omega_i u^k,$$

wo wir den „Ruhstrahl"

$$(68)\qquad \Omega^i = -(T_r^i u^r + u^i T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu)$$

eingeführt haben. Denn ist $\mathfrak{S}^\alpha$ der Energiestrom ($\alpha = 1, 2, 3$), so ist $T_4{}^\alpha = -\dfrac{\mathfrak{S}^\alpha}{c}$ und im Ruhsystem

$$(68')\qquad \Omega^\alpha = \frac{\mathfrak{S}^\alpha}{c}, \quad \Omega^4 = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Trägt man (67') in (68) ein, so findet man wegen $\Omega^r u_r = 0$

$$(69)\quad \Omega^i = F_i{}^l H^{il} - F_l H^l u^i = u_k F_l (H^{ik} u^l + H^{kl} u^i + H^{li} u^k).$$

Durch die Formeln (67') und (69) ist der von *M. Abraham* *angegebene Energietensor* bestimmt.[1])

$$(42')\qquad \delta u^i = \delta_m u^i + \delta_\varphi u^i = \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial x^r} u^r - \frac{\partial u^i}{\partial x^r} \delta x^r.$$

Dies ist in der Tat die lokale Variation von u^i bei vollständiger Mitnahme von der Verrückung δx^i.

1) W. Pauli jr., Enz. d. math. Wiss. V 19, Formel (303). Nach (50) und (60) gilt auch das Variationsprinzip

$$(A)\qquad \delta_\varphi W^{(l)} + \delta_m W^{(l)} + \delta_m W^{(l)} = 0,$$

wo in δ_φ das Viererpotential von der Variation mitgenommen wird

2.

Die Wellenausdrücke. Der Einfachheit halber werden wir uns im folgenden mit der Lichtausbreitung in homogenen (ungeladenen) Isolatoren beschäftigen. Für diese gelten, wie wir gesehen haben, die Gleichungen des Vakuums beim Gravitationsfeld γ_{ik}. Bis auf weiteres werden wir auch die Klammern bei den Indizes weglassen (und zuweilen auch g_{ik} für γ_{ik} schreiben).

An Stelle der Feldgleichungen verwendet man bei optischen Fragen die aus ihnen abgeleiteten Wellengleichungen. In der speziellen Relativitätstheorie wird die wellenartige Fortpflanzung einer Größe A durch eine Gleichung der Form

$$\Box A = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x_4^2} = 0$$

gegeben. Diese Summe vom zweiten Differentialquotienten ist der (vierdimensionale) Laplacesche Operator angewandt auf A. Wir wollen zunächst die entsprechenden Operatoren der allgemeinen Theorie aufstellen. Dies gelingt leicht, wenn wir die gewöhnliche Differentiation durch die sog. kovariante Differentiation ersetzen.[1])

Sei p ein Skalar, φ_i ein Vektor, T_{ik} ein Tensor, so lauten die kovarianten Differentialquotienten

---

Dann wird auch das Feld F_{ik} mitgenommen, *nicht aber das Feld* H_{ik}, weil die u^i die Variation (42) und nicht die (42′) Anm. 1) S. 432 erfahren (denn das metrische Feld bleibt unverändert). I. Ishiwara ist, Ann. d. Phys. 42. S. 986. 1913, von dem Prinzip (A) ausgegangen, wobei er aber noch verlangt (a. a. O. Gleichung (15a)), daß H von der Variation mitgenommen wird. Dann würde dasselbe auch für die u^i folgen, d. h. man legt die Variation δu^i (42′) zugrunde, die auch bei konstanten g_{ik} mit (42) *nicht verträglich* ist. Setzt man aber in die Identität (45) in $\delta_m W^{(1)}$ die Variation (42′) ein, so hat man dafür in $\delta_g W^{(1)}$ die g_{ik} nur soweit sie nicht in den u^i vorkommen zu varieren. Dann ist $\delta\gamma^{ik} = \delta g^{ik}$ und man gelangt gemäß (61) zur Tensordichte (63), die zum von Minkowski (W. Pauli, a. a. O. Formel (301)) angegebenen Energietensor führt, wie dies in der Tat auch aus den expliziten Rechnungen von I. Ishiwara hervorgeht.

1) Sie stammt von E. B. Christoffel. Die angegebenen Regeln 1 bis 4 sind von G. Ricci und T. Levi-Civita. Math. Ann. 54. S. 135, 1901 aufgestellt worden. Für den Beweis des Tensorcharakters der kovarianten Ableitungen vgl. z. B. M. v. Laue, Relatitivitätsprinzip II, § 19.

$$D_i p = p_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \tag{70}$$

$$D_k \varphi_i = \varphi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\} \varphi_l, \tag{71}$$

$$D_l T_{ik} = T_{ikl} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_l} - \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ m \end{matrix} \right\} T_{mk} - \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix} \right\} T_{im} \tag{72}$$

und allgemein für einen Tensor

$$\left\{ \begin{aligned} D_m T_{i_1 i_2 \ldots i_s} &= T_{i_1 i_2 \ldots i_s m} = \frac{\partial T_{i_1 i_2 \ldots i_s}}{\partial x^m} \\ &\quad - \left\{ \begin{matrix} i_1\,m \\ n \end{matrix} \right\} T_{n i_2 \ldots i_s} - \cdots - \left\{ \begin{matrix} i_s\,m \\ n \end{matrix} \right\} T_{i_1 i_2 \ldots i_{s-1} n}. \end{aligned} \right. \tag{73}$$

Die Andeutung der Differentiation durch einen Index ist deshalb bequem, weil nach Definition folgendes gelten soll:

1. Regel. Die kontravariante Ableitung wird aus der kovarianten durch den üblichen Übergang von ko- zu kontravarianten Komponenten erhalten, d. h. es ist

$$D_m T_{i_1 i_2 \ldots i_s}{}^{} = T_{i_1 i_2 \ldots i_s}{}^{m} = g^{m r} T_{i_1 i_2 \ldots i_s r}. \tag{74}$$

2. Regel. Auf dieselbe Weise geht man von der Ableitung der kovarianten zu der der kontravarianten Komponenten über, d. h.

$$\left\{ \begin{aligned} &D_m T_{i_1 \ldots i_s}{}^{k_1 \ldots k_t}{}_{l_1 \ldots l_u} \\ &\quad = g^{k_1 r_1} g^{k_2 r_2} \ldots g^{k_t r_t} D^m T_{i_1 \ldots i_s r_1 \ldots r_t l_1 \ldots l_u}. \end{aligned} \right. \tag{75}$$

Auf Grund dieser beiden Regeln kann man daher in einer Gleichung, die diese allgemeinen Ableitungen enthält, entsprechende Indizes nach oben oder nach unten bringen, gleichgültig, ob diese Indizes die Komponente oder die Differentiation andeuten.

Mit Hilfe der Identität

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = - g^{nk} \left\{ \begin{matrix} n\,l \\ i \end{matrix} \right\} - g^{in} \left\{ \begin{matrix} n\,l \\ k \end{matrix} \right\} \tag{76}$$

kann man auf der rechten Seite von (75) die entsprechenden gemischten Komponenten wie links auftreten lassen. Z. B. ist nach (72) und (75)

$$D_l T^i{}_k = g^{is} T_{skl} = g^{is} \frac{\partial T_{sk}}{\partial x^l} - g^{is} \left\{ \begin{matrix} s\,l \\ m \end{matrix} \right\} T_{mk} - g^{is} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix} \right\} T_{sm}$$

und für das erste Glied rechts kann man gemäß (76) schreiben

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(g^{is}T_{sk}) - \frac{\partial g^{is}}{\partial x^l}T_{sk} = \frac{\partial T^i{}_k}{\partial x^l} + g^{ns}\left\{\begin{matrix} n\,l \\ s \end{matrix}\right\}T_{sk} + g^{in}\left\{\begin{matrix} n\,l \\ s \end{matrix}\right\}T_{sk},$$

so daß die Formel

$$D_l T^i{}_k = \frac{\partial T^i{}_k}{\partial x^l} + \left\{\begin{matrix} n\,l \\ i \end{matrix}\right\}T^n{}_k - \left\{\begin{matrix} k\,l \\ n \end{matrix}\right\}T^i{}_n$$

resultiert. Allgemein ist

$$(77)\quad \begin{cases} D_m T_{i_1\ldots i_s}{}^{k_1\ldots k_t}{}_{l_1\ldots l_n} = \dfrac{\partial}{\partial x^m}T_{i_1\ldots i_s}{}^{k_1\ldots k_t}{}_{l_1\ldots l_n} \\ \quad - \sum_{\lambda=1}^{s}\left\{\begin{matrix} i_\lambda\, m \\ p \end{matrix}\right\}T_{i_1\ldots i_{\lambda-1}\,p\,i_{\lambda+1}\ldots i_s}{}^{k_1\ldots k_t}{}_{l_1\ldots l_n} \\ \quad + \sum_{\lambda=1}^{t}\left\{\begin{matrix} p\,m \\ k_\lambda \end{matrix}\right\}T_{i_1\ldots i_s}{}^{k_1\ldots k_{\lambda-1}\,p\,k_{\lambda+1}\ldots k_t}{}_{l_1\ldots l_n} \\ \quad - \sum_{\lambda=1}^{n}\left\{\begin{matrix} l_\lambda\, m \\ p \end{matrix}\right\}T_{i_1\ldots i_s}{}^{k_1\ldots k_t}{}_{l_1\ldots l_{\lambda-1}\,p\,l_{\lambda-1}\ldots l_n}. \end{cases}$$

3. Regel. Für die Differentiation von Summe und Produkt gelten die gewöhnlichen Differentiationsregeln.

Dies folgt daraus, daß in einem geodätischen Koordinatensystem, in welchem die Ableitungen der g_{ik} und daher auch die Dreiindizessymbole verschwinden, die kovarianten mit dem gewöhnlichen Ableitungen zusammenfallen.

4. Regel. Vertauschung der Differentiation ist im allgemeinen nicht gestattet, sondern es gilt

$$(78)\qquad p_{ik} - p_{ki} = 0,$$

$$(79)\qquad \varphi_{ikl} - \varphi_{ilk} = R^h{}_{ikl}\varphi_h,$$

$$(80)\qquad T_{iklm} - T_{ikml} = R^h{}_{ilm}T_{hk} + R^h{}_{klm}T_{ih}$$

und allgemein

$$(81)\quad \begin{cases} T_{i_1\ldots i_s lm} - T_{i_1\ldots i_s ml} = R^h{}_{i_s lm}T_{h i_1\ldots i_{s-1}} + \ldots \\ \qquad + R^h{}_{i_1 lm}T_{i_1\ldots i_{s-1}h}, \end{cases}$$

wo

$$(82)\quad \begin{cases} R^i{}_{klm} = \dfrac{\partial}{\partial x^l}\left\{\begin{matrix} k\,m \\ i \end{matrix}\right\} - \dfrac{\partial}{\partial x^m}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} l\,n \\ i \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} k\,m \\ n \end{matrix}\right\} \\ \qquad - \left\{\begin{matrix} m\,n \\ i \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ n \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

der Riemann-Christoffelsche Krümmungstensor ist. Man bestätigt (81) leicht in einem geodätischen System. In einem solchen ist

$$T_{i_1 \dots i_s l m} = \frac{\partial^2 T_{i_1 \dots i_s}}{\partial x^l \partial x^m} - \sum_{\lambda=1}^{s} T_{i_1 \dots i_{\lambda-1} n i_{\lambda+1} \dots i_s} \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \begin{matrix} i_\lambda l \\ n \end{matrix} \right\},$$

$$T_{i_1 \dots i_s l m} - T_{i_1 \dots i_s m l}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{s} T_{i_1 \dots i_{\lambda-1} n i_{\lambda+1} \dots i_s} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \begin{matrix} i_\lambda m \\ n \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \begin{matrix} i_\lambda l \\ n \end{matrix} \right\} \right).$$

Setzen wir ferner

$$\left\{ \begin{matrix} (i)(k) \\ (l) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\} + p^{\,l}_{ik}, \tag{83}$$

wo gemäß der im ersten Teil getroffenen Verabredung die Dreiindizessymbole mit eingeklammerten Indizes sich aus den γ_{ik} genau so aufbauen, wie die gewöhnlichen Symbole aus den g_{ik}. Setzt man (83) z. B. in (72) ein, so findet man unmittelbar

$$D_{(l)} T_{ik} = D_l T_{ik} - p^m{}_{il} T_{mk} - p^m{}_{kl} T_{im}, \tag{84}$$

woraus man erkennt, daß die p Tensoren sind. Durch Zurückgehen auf ein geodätisches System bestätigt man sofort

$$p^i{}_{ik} = \gamma^{rl} \left((k\, u_k\, u_r)_i + (k\, u_r\, u_i)_k - (k\, u_i\, u_k)_r \right), \quad k = 1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}. \tag{85}$$

Auf gleiche Weise

$$R^{(i)}{}_{(k)(l)(m)} = R^i{}_{klm} + D_l p^i{}_{km} - D_m p^i{}_{kl} + p^i{}_{in} p^n{}_{kn} - p^i{}_{mn} p^n{}_{kl}. \tag{86}$$

5. Regel. Man erhält die auf γ_{il} bezogenen kovarianten Ableitungen aus den auf g_{ik} bezogenen, indem man die gewöhnlichen durch die kovarianten (auf g_{ik} bezogenen) Ableitungen und die Dreiindizessymbole durch die Größen p ersetzt. Der Krümmungstensor $R^{(i)}{}_{(k)(l)(m)}$ geht aus $R^i{}_{klm}$ durch Hinzufügung eines Gliedes hervor, das man aus $R^i{}_{klm}$ durch dieselbe Substitution gewinnt.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir imstande, die Laplaceschen Ausdrücke niederzuschreiben. Es ist

$$\square\, p = p^k{}_k, \tag{87}$$

$$\square_i \varphi = \varphi_i{}^k{}_k, \tag{88}$$

$$\square_{ik} T = T_{ik}{}^l{}_l \text{ usw.} \tag{89}$$

Man sieht, daß diese Ausdrücke jeweils denselben Tensorcharakter haben, wie die Größe, auf die der Operator angewandt wird. Bei einem Skalar p treten nach (70) und (71) nur die ersten Ableitungen der g_{ik} auf. Daher wird der Wellen-

ausdruck für einen Skalar auch in der allgemeinen Relativitäts theorie mit dem Laplaceschen Ausdruck zusammenfallen Wenden wir allgemein den Buchstaben W für einen Wellen ausdruck an und führen die Bezeichnungen

$$\text{Grad}_i p = \frac{\partial p}{\partial x^i}, \tag{90}$$

$$\text{Div}\,\varphi = \varphi^k{}_k \tag{91}$$

ein, so haben wir also für einen Skalar

$$\text{Div Grad}\, p = W p. \tag{92}$$

Die Ausdrücke (83), (84) usw. enthalten die zweiten Ab leitungen g_{ik}. Sie werden daher nur noch im Bereich der spe ziellen Relativitätstheorie oder in Gravititationsfeldern mit ver schwindendem Krümmungstensor Wellenausdrücke darstellen im allgemeinen Falle werden noch Terme hinzutreten, in denen dieser Tensor vorkommt. Wir wollen diese Zusatzterme be stimmen.

Dazu gelangen wir, wenn wir die Relation (92) auf Ten soren zu verallgemeinern suchen. Diese Verallgemeinerung ist in der speziellen Theorie wohlbekannt. Für einen Vektor gilt dort die Formel[1])

$$\text{Div Rot}\,\varphi = \text{Grad Div}\,\varphi - W\varphi, \tag{93}$$

wo der Wellenausdruck W mit $\square$ identisch ist. Die Opera toren Rot und Div existieren auch in der allgemeinen Theorie Bezeichnen wir mit p, φ_i, F_{ik}, S_{ikl}, L_{iklm} usw. *lineare* Ten soren 0. (Skalar), 1., 2., 3., 4. usw. Stufe[2]), so sind die Rota tionen definiert durch

$$\text{Rot}_i p = \frac{\partial p}{\partial x^i}, \tag{94}$$

$$\text{Rot}_{ik}\varphi = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k}, \tag{95}$$

$$\text{Rot}_{ikl} F = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}, \tag{96}$$

$$\text{Rot}_{iklm} S = \frac{\partial S_{klm}}{\partial x^i} - \frac{\partial S_{lmi}}{\partial x^k} + \frac{\partial S_{mik}}{\partial x^l} - \frac{\partial S_{ikl}}{\partial x^m} \text{ usw.}, \tag{97}$$

1) M. v. Laue, Relativitätstheorie I, Formel (115).

2) In einem vierdimensionalen Raum bricht die Reihe mit L_{iklm} ab. Um die formalen Zusammenhänge besser erkennen zu lassen, setzen wir im folgenden einen n-dimensionalen Raum voraus.

die Divergenzen durch

$$\text{Div}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,\varphi^k), \tag{98}$$

$$\text{Div}\,{}^{i}F = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,F^{ik}), \tag{99}$$

$$\text{Div}\,{}^{ik}S = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{g}\,S^{ikl}), \tag{100}$$

$$\text{Div}\,{}^{ikl}L = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^m}(\sqrt{g}\,L^{iklm}) \text{ usw.} \tag{101}$$

An Stelle der Bezeichnung (94) wird gewöhnlich die in (90) angeführte Grad benutzt. Die durch diese Bildungen entstehenden Tensoren sind wiederum linear. Die Namen Rotationen und Divergenzen rühren daher, daß für sie verallgemeinte Stokessche bez. Gausssche Sätze[1]) gelten. Diese Darstellungen der Rotationen gelten nur für die kovarianten, diejenigen der Divergenzen nur für die kontravarianten Komponenten. Ersetzen wir aber in (94) bis (97) die gewöhnlichen durch die kovarianten Ableitungen, so erhalten wir die Formeln

$$\text{Rot}_{i}\,p = p_i\,, \tag{94'}$$

$$\text{Rot}_{ik}\,\varphi = \varphi_{ki} - \varphi_{ik}\,, \tag{95'}$$

$$\text{Rot}_{ikl}\,F = F_{ikl} + F_{kli} + F_{lik}\,, \tag{96'}$$

$$\text{Rot}_{iklm}\,S = S_{klmi} - S_{lmik} + S_{mikl} - S_{iklm} \text{ usw.}, \tag{97'}$$

wo wir nunmehr nach Regel 1 und 2 auf beiden Seiten die gleichen Indizes nach oben bringen dürfen. Verfahren wir analog mit (98) und (101), indem wir beachten, daß die kovariante Anleitung von $\sqrt{g}$ verschwindet, so gewinnen wir die Formeln

$$\text{Div}\,\varphi = \varphi^{k}{}_{k} \text{ (vgl. 91)}, \tag{98'}$$

$$\text{Div}\,{}^{i}F = F^{ik}{}_{k}\,, \tag{99'}$$

$$\text{Div}\,{}^{ik}S = S^{ikl}{}_{l}\,, \tag{100'}$$

$$\text{Div}\,{}^{ikl}L = L^{iklm}{}_{m} \text{ usw.} \tag{101'}$$

---

1) W. Pauli jun., a. a. O., S. 606. Für die eindimensionale „Rotation" lautet der Stokessche Satz $\int_{P_1}^{P_2} \text{Rot}_{i}\,p\,\delta x^i = p_2 - p_1$.

Durch Herunterziehen des Indizes erhalten wir die kovarianten Komponenten. Die Tensoren (94) bis (101) sind bez. mit den Tensoren (94') bis (101') identisch, weil sie in einem geodätischen System miteinander übereinstimmen.

Aus der Darstellung (94') bis (101') geht hervor, daß nicht nur die geometrische, sondern auch die *formale* Definition der Rotation und Divergenz aus der gewöhnlichen Vektoranalysis in die allgemeine übertragen werden kann Bekanntlich ist, wenn ∇ der Vektoroperator $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$ und $\mathfrak{a}$ ein Vektor ist,

(102) $\qquad \text{rot}\,\mathfrak{a} = [\nabla\,\mathfrak{a}]$ (äußeres Produkt),

(103) $\qquad \text{div}\,\mathfrak{a} = \nabla\,\mathfrak{a}$ (inneres Produkt).

An Stelle von ∇ tritt der Operator D. Das äußere Produkt eines Vektors (linearer Tensor erster Stufe) A mit den linearen Tensoren 1., 2., 3. usw. Stufe φ_i, F_{ik}, S_{ikl} usw. ist

(104) $\qquad [A\varphi]_{ik} = A_i\varphi_k - A_k\varphi_i,$

(105) $\qquad [AF]_{ikl} = A_iF_{kl} + A_kF_{li} + A_lF_{ik},$

(106) $\qquad [AS]_{iklm} = A_iS_{klm} - A_kS_{lmi} + A_lS_{mik} - A_mS_{ikl}$ usw.

Ist der Vektor A speziell eine Verschiebung $\xi_{(1)}$ und der lineare Tensor $s$ter Stufe, mit dem man ihn äußerlich multipliziert, ein aus den s-Verschiebungen $\xi_{(2)}, \xi_{(3)}, \cdots \xi_{(s+1)}$ gebildeter s-dimensionaler Raumtensor, so ist also das äußere Produkt der aus den $s+1$ Verschiebungen $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \cdots \xi_{(s+1)}$ gebildete $s+1$-dimensionale Raumtensor. Entsprechend definiert man das äußere Produkt zweier beliebiger Tensoren [1]) und allgemein das äußere Produkt zweier Tensoren, die in den zu multiplizierenden Indizes vollständig antisymmetrisch sind (was

1) Das äußere Produkt von A_{ik} und B_{lm} wird also gegeben durch Entwicklung der Determinante

$$[AB]_{iklm} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k & \alpha_l & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_k & \beta_l & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_k & \gamma_l & \gamma_m \\ \delta_i & \delta_k & \delta_l & \delta_m \end{vmatrix}$$

nach den Unterdeterminanten der ersten zwei Zeilen, indem man nach der Entwicklung $\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_k \end{vmatrix} = A_{ik}$, $\begin{vmatrix} \gamma_l & \gamma_m \\ \delta_l & \delta_m \end{vmatrix} = B_{lm}$ setzt. Man sieht sofort, daß das äußere Produkt sein Vorzeichen bei Vertauschung der Faktoren nur dann ändert, wenn beide Faktoren ungerader Stufe sind.

bei den übrigen Indizes nicht der Fall zu sein braucht). Ist z. B. $A_{\varrho\sigma ik}$ in i und k und $B_{\lambda lm}$ in l und m antisymmetrisch, so wollen wir mit

$$A_{\varrho\sigma[i][k]} B_{\lambda[l][m]} \tag{107}$$

das äußere Produkt bezüglich dieser Indizes anzeigen.

Nach diesen Erklärungen lautet die allgemeine formale Definition der Rotation eines linearen Tensors M

$$\mathrm{Rot}\, M = [D M]. \tag{108}$$

Die innere Multiplikation besteht bekanntlich (bei beliebigen, nicht notwendig linearen Tensoren) in dem Prozeß der Verjüngung an den zu multiplizierenden Indizes. Es ist also

$$\mathrm{Div}\, M = D M, \tag{109}$$

wo die Multiplikation über den letzten Index von M vorzunehmen ist.

Entsprechend den Formeln (92) und (93) in Verbindung mit (94) definieren wir allgemein den *Wellenausdruck W für einen beliebigen linearen Tensor M* durch

$$\mathrm{Div}\, \mathrm{Rot}\, M = \mathrm{Rot}\, \mathrm{Div}\, M \pm W M, \tag{110}$$

wo das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem M von gerader oder ungerader Stufe ist.

Für einen Tensor erster Stufe φ_i ist nach (88), (95'), (99')

$$\mathrm{Div}_i \mathrm{Rot}\, \varphi = \varphi^k{}_{ik} - \varphi_i{}^k{}_k = \varphi^k{}_{ik} - \Box_i \varphi.$$

Nach der vierten Regel Formel (79) ist

$$\varphi^k{}_{ik} = \varphi^k{}_{ki} + R^{hk}{}_{ik} \varphi_h = \varphi^k{}_{ki} - R_i^h \varphi_h,$$

wo $-R_h^k{}_{ik} = R^k{}_{hik} = R^k{}_{ihk}$ der verjüngte Krümmungstensor ist. Unter Beachtung von (94') und (98') wird also

$$\mathrm{Div}_i \mathrm{Rot}\, \varphi = \mathrm{Rot}_i \mathrm{Div}\, \varphi - \Box_i \varphi - R_i^h \varphi_h$$

und der Vergleich mit (110) lehrt, daß

$$W_i \varphi = \Box_i \varphi + R_i^h \varphi_h. \tag{111}$$

Es ist bemerkenswert, daß der Zusatzterm hier nur den verjüngten Krümmungstensor enthält.

Für einen Tensor zweiter Stufe F_{ik} ist gemäß (96') und (100')

$$\mathrm{Div}_{ik} \mathrm{Rot}\, F = F_{ikl}{}^l + F_{kli}{}^l + F_{lik}{}^l. \tag{112}$$

Das erste Glied ist nach (89) $\square_{ik} F$, die beiden anderen sind zusammen von der Form $K_{ki} - K_{ik}$, wenn $K_{ik} = F_{il}{}^{l}{}_{k}$ bedeutet. Nach der 4. Regel Formel (80) ist

$$K_{ik} = F_{il}{}^{l}{}_{k} + R^{h}{}_{lk}{}^{l} F_{ih} + R^{h}{}_{ik}{}^{l} F_{hl},$$

oder unter Einführung der Divergenz (99′) und des verjüngten Krümmungstensors

$$K_{ik} = (\mathrm{Div}_i F)_k + R_k{}^{h} F_{hi} + R^{h}{}_{ik}{}^{l} F_{hl},$$

so daß nach der Definition (95′) der Rotation

$$K_{ki} - K_{ik} = \mathrm{Rot}_{ik} \mathrm{Div}\, F + R_i{}^{h} F_{hk} - R_k{}^{h} F_{hi} + (R^{h}{}_{ki}{}^{l} - R^{h}{}_{ik}{}^{l}) F_{hl}.$$

Infolge der Symmetrieeigenschaften von R_{iklm} ist schließlich noch $R_{hkil} - R_{hikl} = R_{ikhl}$ und damit geht (112) über in (110) für $M = F$ mit

$$W_{ik} F = \square_{ik} F + R_i{}^{h} F_{hk} - R_k{}^{h} F_{hi} + R_{ik}{}^{hl} F_{hl}. \tag{113}$$

Nach (104) kann man dies mit Benutzung der Schreibweise (107) auch

$$W_{ik} F = \square_{ik} F + R_{[i]}{}^{h} F_{h[k]} + R_{ik}{}^{hl} F_{hl} \tag{113′}$$

schreiben.

Genau so leitet man für den Tensor dritter Stufe S_{ikl}

$$\left\{\begin{aligned} W_{ikl} S = \square_{ikl} S &+ R_i{}^{h} S_{hkl} + R_k{}^{h} S_{hli} + R_l{}^{h} S_{hik} \\ &+ R_{ik}{}^{hm} S_{hml} + R_{kl}{}^{hm} S_{hmi} + R_{li}{}^{hm} S_{hmk} \end{aligned}\right. \tag{114}$$

ab, was sich wieder nach (105)

$$W_{ikl} S = \square_{ikl} S + R_{[i]}{}^{h} S_{h[k][l]} + R_{[i][k]}{}^{hm} S_{hm[l]} \tag{114′}$$

schreiben läßt.

Die *allgemeine* Formel für den Wellenausdruck W des linearen Tensors $s$ter Stufe $M_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ lautet

$$\left\{\begin{aligned} W_{i_1 \ldots i_s} M = \square_{i_1 \ldots i_s} M &+ R_{[i_1]}{}^{h} M_{h[i_2] \ldots [i_s]} \\ &+ R_{[i_1][i_2]}{}^{hm} M_{hm[i_3] \ldots [i_s]}. \end{aligned}\right. \tag{115}$$

Aus den Formen (94) bis (101) der Rotationen und Divergenzen folgt unmittelbar

$$\mathrm{Div}\,\mathrm{Div}\, M = \mathrm{Rot}\,\mathrm{Rot}\, M = 0. \tag{116}$$

Nimmt man also von (110) die Divergenz bzw. die Rotation, so wird

$$\mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{Div}\, M = \mp\, \mathrm{Div}\, WM, \quad \mathrm{Rot}\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\, M = \pm\, \mathrm{Rot}\, WM.$$

Da sich die Stufenzahl eines Tensors bei Divergenz- oder

Rotationsbildung um eine Einheit ändert, gibt (110) angewandt auf Div M und Rot M

$$\text{Div Rot Div } M = \mp W \text{ Div } M, \quad \text{Rot Div Rot } W = \pm W \text{ Rot } M.$$

Demnach ist

$$\text{(117)} \qquad \text{Div } WM = W \text{ Div } M, \qquad \text{Rot } WM = W \text{ Rot } M.$$

Der Wellenausdruck ist mit Rot und Div vertauschbar.

Für zwei lineare Tensoren gleicher (etwa zweiter) Stufe M und N gilt für das innere Produkt $M \square N$ wegen der 3. Regel unter Beachtung von (98) und (98′)

$$M^{ik} \square_{ik} N = M^{ik} N_{ik}{}^{l}{}_{l} = (M^{ik} N_{ik}{}^{l})_{l} - M^{ik}{}_{l} N_{ik}{}^{l}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{l}} (\sqrt{g}\, M^{ik} N_{ik}{}^{l}) - M^{ik}{}_{l} N_{ik}{}^{l}$$

und damit

$$\text{(118)} \qquad M \square N - M \square N = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{l}} \{\sqrt{g}\,(M^{ik} N_{ik}{}^{l} - M^{ik} N_{ik}{}^{l})\}.$$

Hier kann man $\square$ durch W ersetzen; denn die Zusatzterme heben sich, wie man an (111), (113), (114) und der allgemeinen Formel (115) erkennt, wegen der Symmetrie von R_{ik} bzw. R_{iklm} in den Indizes i, k bzw. in dem Indexpaar (ik), (lm) fort. Integrieren wir (118) über einen geschlossenen vierdimensionalen Raum (Volumenelement $d\Sigma = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$), so erhält man aus dem Gaussschen Satz[1])

$$\text{(119)} \qquad \int (M W N - N W M)\, d\Sigma = \int (M N_{n} - N M_{n})\, dS$$

(dS Oberflächenelement der Begrenzungsfläche, n *kovariante* Ableitung nach der äußern Normalen). *Für die Wellenausdrücke (und Laplaceschen Operatoren) gilt der Greensche Satz.*[2])

3.

Feld, Vierervotential, Hertzscher Tensor. Die Differentialgleichungen für das Feld F schreiben sich (wieder mit Fortlassung der Klammern bei den Indizes), wenn man die Definitionen (96) und (99) einführt

$$\text{(120)} \qquad \text{Rot } F = 0, \qquad \text{Div } F = 0.$$

---

1) W. Pauli jun., a. a. O., Formel (139a).

2) Die Dichten $\sqrt{g}\,\square$, $\sqrt{g}\, W$ stellen also sich selbst adjungierte Differentialausdrücke dar.

Aus (110) folgt sodann

$$WF = 0. \tag{121}$$

WF ist der Ausdruck (113) (wobei Regel 5 zu beachten ist). *Das Feld pflanzt sich wellenartig fort.* Mit Hilfe des Vertauschungssatzes (117) beweist man ganz analog wie in der klassischen Theorie [1]) die Umkehrung: Eine Lösung der Wellengleichung (121), die zu einem Zeitpunkt der Feldgleichungen (120) genügt, tut dies stets.

Die unbequeme Einschränkung der Anfangswerte kann man mildern oder ganz beseitigen, das erstere durch Einführung des *Viererpotentials* φ, das letztere durch Einführung des *Sechserpotentials* Z, das wir auch den *Hertzschen Tensor* nennen wollen. (Wir werden diesen Namen sogleich rechtfertigen.) Wie in (39) setzen wir

$$F = \mathrm{Rot}\,\varphi, \tag{122}$$

wodurch nach (116) die erste Gleichung (120) erfüllt wird. Aus (93) folgt dann

$$\mathrm{Div}\,F = \mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\,\varphi = \mathrm{Grad}\,\mathrm{Div}\,\varphi - W\varphi, \tag{123}$$

so daß auch die zweite Gleichung (120) erfüllt wird, wenn φ der Wellengleichung

$$W_i\varphi = \Box_i\varphi + R_i^h\,\varphi_h = 0 \tag{124}$$

mit der Nebenbedingung

$$\mathrm{Div}\,\varphi = 0 \tag{125}$$

unterworfen wird. Von dieser kann man sich endlich nach (116) noch befreien durch den Ansatz

$$\varphi = \mathrm{Div}\,Z. \tag{126}$$

Nach der Vertauschungsregel (117) ist

$$W\varphi = W\,\mathrm{Div}\,Z = \mathrm{Div}\,WZ, \tag{127}$$

so daß (124) durch die Gleichung

$$WZ = 0 \tag{128}$$

Genüge geleistet wird. Aus (122) und (126) erhält man die Darstellung des Feldes durch das Sechserpotential

$$F = \mathrm{Rot}\,\mathrm{Div}\,Z, \tag{129}$$

---

1) Vgl. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, S. 410—412.

oder wegen (110) und (128)

$$F = \mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\,Z. \tag{129'}$$

Vierer- und Sechserpotential erfüllen die Wellengleichung.

Ein System geladener Teilchen (im folgenden kurz Molekül genannt) von der Gesamtladung e ruft im Weltpunkt P (x^1, x^2, x^3, x^4) nach der speziellen Relativitätstheorie (wir legen für den Rest dieses Teils die Elektronentheorie des Vakuums zugrunde) in erster Annäherung ein Viererpotential

$$\varphi_i = \frac{e\,u_i}{R}, \qquad R = -(x_r - \xi_r)\,u^r \tag{130}$$ [1])

hervor. (ξ_r, u_r Koordinaten und Vierergeschwindigkeit des Moleküls im Schnittpunkt seiner Weltlinie mit dem Vorkegel $(x_r - \xi_r)\,(x^r - \xi^r) = 0$ von P). Statt der Eigenzeit s können wir aber wie in (14) einen beliebigen Parameter τ wählen, durch den die Lage des Moleküls auf seiner Weltlinie bestimmt wird. Die in (15) auftretende Wurzel hebt sich in (130) in Zähler und Nenner weg und wir können schreiben

$$\varphi_i = \frac{e}{R}\,\frac{d\xi_i}{d\tau}, \qquad R = -(x_r - \xi_r)\,\frac{d\xi^r}{d\tau}. \tag{130'}$$

Verschwindet die Gesamtladung e, so ist das Molekül *elektromagnetisch polarisiert* (wobei die Trennung in elektrische und magnetische Polarisation abhängt von der Trennung in Raum und Zeit). In diesem Falle reicht (130') nicht aus, sondern man hat in der Näherung einen Schritt weiter zu gehen. Nach (126) liegt Z eine Differentiationsstufe vor φ. Wir werden daher vermuten, daß in Analogie zu (130') durch die Formel

$$Z_{ik} = \frac{m_{ik}}{R} \tag{131}$$

das Sechserpotential eines elektromagnetischen Dipols dargestellt wird (in erster Annäherung, falls die elektromagnetischen Momente m nicht verschwinden). Spalten wir in Raum und Zeit nach dem Schema

$$\begin{aligned} F_{14}\ F_{24}\ F_{34},\ F_{23}\ F_{31}\ F_{12} &= \mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \\ \varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3,\ \varphi_4 &= \mathfrak{A}, \varphi, \\ Z_{14}\ Z_{24}\ Z_{34},\ Z_{23}\ Z_{31}\ Z_{12} &= -\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}', \\ m_{14}\ m_{24}\ m_{34},\ m_{23}\ m_{31}\ m_{12} &= -\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, \end{aligned}$$

1) M. v. Laue, Relativitätstheorie I, Formel (218); W. Pauli jun., a. a. O., Formel (238a).

$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ elektrische und magnetische Feldstärke, $\mathfrak{A}$, φ Vektor- und skalares Potential, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{p}$ polare, $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{m}$ axiale räumliche Vektoren, so zerfällt zunächst (126) und (129), (129′) in die Gleichungen

$$(126') \qquad \mathfrak{A} = \frac{\dot{\mathfrak{Z}}}{c} + \operatorname{rot} \mathfrak{Z}', \qquad \varphi = -\operatorname{div} \mathfrak{Z},$$

$$(129'') \qquad \mathfrak{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{Z} - \frac{1}{c}\operatorname{rot} \dot{\mathfrak{Z}}', \qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot} \dot{\mathfrak{Z}} + \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{Z}'$$

$$\left(\text{Punkt} = \frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Aus (128) geht die gewöhnliche Wellengleichung für $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ hervor. (131) aber zerfällt, wenn das Molekül ruht $\left(\frac{d\xi^1}{d\tau} = \frac{d\xi^2}{d\tau} = \frac{d\xi^3}{d\tau} = 0\right)$, in

$$(131') \qquad \mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \qquad \mathfrak{Z}' = \frac{\mathfrak{m}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \left(\begin{matrix} r = \text{Entfernung} \\ P - \text{Molekül} \end{matrix}\right)$$

Ist $\mathfrak{m}$ und damit $\mathfrak{Z}'$ gleich Null, so ist, wie man aus (126′), (129″) und (131′) erkennt, $\mathfrak{Z}$ gleich dem *Hertzschen Vektor* für ein *elektrisch* polarisiertes Molekül vom Moment $\mathfrak{p}$.[1]) Ist umgekehrt $\mathfrak{p} = \mathfrak{Z} = 0$, so wird durch (126′), (129′) in Verbindung mit (131′) Potentiale und Feld eines *magnetisch* polarisierten Moleküls vom Moment $\mathfrak{m}$ wiedergegeben.[2]) $\mathfrak{Z}'$ ist das magnetische Gegenstück zu $\mathfrak{Z}$. *Das Sechserpotential ist die vierdimensionale Zusammenfassung des elektrischen und magnetischen Hertzschen Vektors.*

Wir wollen den Hertzschen Tensor für ein beliebiges ungeladenes Molekül angeben und damit auch die Formel (131) bestätigen. Sei

$$(132) \qquad \eta^i(\tau, \varepsilon) = \xi^i(\tau) + \varepsilon\, \delta\xi^i, \qquad \varepsilon = 1$$

die Weltlinie eines der geladenen Teilchen von der Ladung e, $\xi^i(\tau)$ die Weltlinie des Molekülmittelpunktes, die $\delta\xi^i$, Funktionen von τ, also die relativen Koordinaten des Teilchens. Die formale Einführung des Faktors ε dient in bekannter Weise dazu, die Entwicklung nach den $\delta\xi^i$ und ihren Ableitungen nach τ in eine solche nach ε zu verwandeln. (Hinterher ist dann

1) Vgl. z. B. M. Planck, Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. § 87, 88.

2) H. A. Lorentz, Enz. d. math. Wiss. V. 14. Nr. 15.

wieder ε gleich 1 zu setzen.) Nach (130′) ist das Viererpotential des Teilchens

$$\varphi_i = \frac{e}{R}\frac{\partial \eta_i}{\partial \tau}, \qquad R = -(x_r - \eta_r)\frac{\partial \eta^r}{\partial \tau}, \tag{133}$$

wo τ die aus der Gleichung

$$(x_r - \eta_r)(x^r - \eta^r) = 0 \tag{134}$$

des Nullkegels in P sich ergebende Funktion von s und den Koordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 von P ist. Die rechten Seiten von (133), die ursprünglich (wo die η^i die Funktionen (132) von s und τ sind) Funktionen $\psi_i(\tau, s, x^1, x^2, x^3, x^4)$ sind, verwandeln sich durch die Substitution von τ in Funktionen $\varphi_i(s, x^1, x^2, x^3, x^4)$:

$$\psi_i(\tau, s, x^1, x^2, x^3, x^4) = \varphi_i(s, x^1, x^2, x^3, x^4). \tag{135}$$

Um nach s zu entwickeln, haben wir die Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}$ usw. zu bilden. Differentiation von (134) und (135) liefert sofort

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^k} = -\frac{x_k - \eta_k}{R}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{x_r - \eta_r}{R}\frac{\partial \eta^r}{\partial s} = -\frac{\partial \tau}{\partial x^r}\frac{\partial \eta^r}{\partial s}, \tag{136}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial s} = \frac{\partial \psi_i}{\partial s} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{d\psi_i}{ds}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x^k} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^k}, \tag{136′}$$

woraus folgt

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial s} = \frac{\partial \psi_i}{\partial s} - \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^r}\frac{\partial \eta^r}{\partial s} = \frac{\partial \psi_i}{\partial s} + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^r} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^r}\right)\frac{\partial \eta^r}{\partial s}. \tag{137}$$

Für die hier rechts auftretenden Posten erhält man aus (133)

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial s} = \frac{e}{R}\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial \tau \partial s} - \frac{e}{R^2}\frac{\partial \eta_i}{\partial \tau}\left\{\frac{\partial \eta_r}{\partial s}\frac{\partial \eta^r}{\partial \tau} - (x_r - \eta_r)\frac{\partial^2 \eta^r}{\partial \tau \partial s}\right\}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x^r}\frac{\partial \eta^r}{\partial s} = \frac{e}{R^2}\frac{\partial \eta_i}{\partial \tau}\frac{\partial \eta_r}{\partial \tau}\frac{\partial \eta^r}{\partial s}$$

$$-\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^r}\frac{\partial \eta^r}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\varphi_i \frac{\partial \eta^r}{\partial s}\right) + \varphi_i \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \eta^r}{\partial s}\right).$$

Bei der Summation dieser drei Ausdrücke hebt sich das zweite Glied des ersten Ausdrucks gegen den zweiten Ausdruck weg. Das letzte Glied des ersten Ausdrucks ist nach (133) und der ersten Gleichung (136) $-\varphi_i \frac{\partial \tau}{\partial x^r}\frac{\partial^2 \eta^r}{\partial \tau \partial s} = -\varphi_i \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \eta^r}{\partial s}\right)$ und wird also durch das letzte Glied des dritten Ausdrucks vernichtet. Nach der ersten Gleichung (136) und der Definition von R in (133) ist $\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \eta^i}{\partial s}\right)\cdot\frac{\partial \eta^r}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \eta^i}{\partial \tau \partial s}\frac{\partial \tau}{\partial x^r}\frac{\partial \eta^r}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \eta^i}{\partial \tau \partial s}$,

so daß man für das erste Glied des ersten Ausdrucks $\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \eta^i}{\partial \varepsilon}\right)\cdot \varphi^r$ oder wegen der Divergenzfreiheit (125) des Viererpotentials $\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \eta^i}{\partial \varepsilon}\varphi^r\right)$ schreiben kann. Wir erhalten somit schließlich

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \eta^i}{\partial \varepsilon}\varphi^r - \frac{\partial \eta^r}{\partial \varepsilon}\varphi^i\right) \tag{138}$$

oder, wenn wir die Definition (104) des äußern Produkts zweier Vektoren einführen,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = \mathrm{Div}\left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\varphi\right]. \tag{138'}$$

Nach der ersten Gleichung (136') angewandt auf $\left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\varphi\right]$ ist ferner

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon^2} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\mathrm{Div}\left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\varphi\right] = \mathrm{Div}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\varphi\right] = \mathrm{Div}\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\psi\right], \tag{139}$$

wo zuerst $\partial\eta/\partial\varepsilon$ als Funktion von ε und den x, zuletzt als Funktion von ε und τ gedacht ist. Aus (138') und (139) ersieht man, daß das *Sechserpotential eines polarisierten Moleküls* durch

$$Z = z + \frac{1}{2!}\frac{dz}{d\varepsilon} + \frac{1}{3!}\frac{d^2 z}{d\varepsilon^2} + \cdots \tag{140}$$

dargestellt wird, worin für z nach (132), (133) und (138')

$$\begin{cases} z = \left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\varphi\right] = \frac{e}{R}\left(\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right] + \varepsilon\left[\delta\xi\frac{d\delta\xi}{d\tau}\right]\right), \\ R = -(x_r - \xi_r)\frac{d\xi^r}{d\tau} - \varepsilon\frac{d}{d\tau}\{(x_r - \xi_r)\delta\xi^r\} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d}{d\tau}(\delta\xi_r\,\delta\xi^r) \end{cases} \tag{140'}$$

einzusetzen ist. (τ ist die durch (134) implizit gegebene Funktion von ε und dem x); z und seine Differentialquotienten sind für $\varepsilon = 0$ zu nehmen. Es ist über alle Teilchen des Moleküls zu summieren.

Um $dz/d\varepsilon$ zu bilden, beachte man, daß nach (132), (136) und (140')

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{R}\{(x_r - \xi_r)\delta\xi^r - \varepsilon\,\delta\xi_r\,\delta\xi^r\};$$
$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = -\frac{d}{d\tau}\{(x_r - \xi_r)\delta\xi^r\} + \varepsilon\frac{d}{d\tau}(\delta\xi_r\,\delta\xi^r)$$

ist, so daß

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial \tau}\left(R\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}\right), \quad \frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} = -R\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}\right).$$

Danach erhält man aus (140′) ohne weiteres

$$\frac{d\,\mathfrak{z}}{d\,\varepsilon} = \frac{e}{R}\left\{\left[\delta\xi\,\frac{d\,\delta\xi}{d\,\tau}\right] + \frac{\partial}{\partial\,\tau}\left(\left(\left[\delta\xi\,\frac{d\,\xi}{d\,\tau}\right] + \varepsilon\left[\delta\xi\,\frac{d\,\delta\xi}{d\,\tau}\right]\right)\frac{\partial\,\tau}{\partial\,\varepsilon}\right)\right\}.$$

Für $\varepsilon = 0$ ist also

$$(141)\quad \begin{cases} \mathfrak{z} = \dfrac{e}{R}\left[\delta\xi\,\dfrac{d\,\xi}{d\,\tau}\right], \\ \dfrac{d\,\mathfrak{z}}{d\,\varepsilon} = \dfrac{e}{R}\left[\delta\xi\,\dfrac{d\,\delta\xi}{d\,\tau}\right] + \dfrac{e}{R^2}\left\{\dfrac{d}{d\,\tau}\left((x_r - \xi_r)\,\delta\xi^r\left[\delta\xi\,\dfrac{d\,\xi}{d\,\tau}\right]\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{\zeta}{R}\,(x_r - \xi_r)\,\delta\xi^r\left[\delta\xi\,\dfrac{d\,\xi}{d\,\tau}\right]\right\}, \\ R = -\,(x_r - \xi_r)\,\dfrac{d\,\xi^r}{d\,\tau} \end{cases}$$

mit der Abkürzung

$$(141')\qquad \zeta = -\left(\frac{\partial\,R}{\partial\,\tau}\right)_{\varepsilon=0} = -\,\frac{d\,\xi_r}{d\,\tau}\,\frac{d\,\xi^r}{d\,\tau} + (x_r - \xi_r)\,\frac{d^2\,\xi^r}{d\,\tau^2}\,.$$

Beschränken wir uns in (140) auf die zwei ersten Glieder, so resultiert

$$(140'')\quad \begin{cases} Z = \dfrac{m}{R} + \dfrac{e}{2\,R^2}\left\{\dfrac{d}{d\,\tau}\left((x_r - \xi_r)\,\delta\xi^r\left[\delta\xi\,\dfrac{d\,\xi}{d\,\tau}\right]\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{\zeta}{R}\,(x_r - \xi_r)\,\delta\xi^r\left[\delta\xi\,\dfrac{d\,\xi}{d\,\tau}\right]\right\} \end{cases}$$

mit

$$(140''')\qquad m = e\left[\delta\xi\,\frac{d\,\xi}{d\,\tau}\right] + \frac{e}{2}\left[\delta\xi\,\frac{d\,\delta\xi}{d\,\tau}\right].$$

Bei Vernachlässigung der Momente zweiten Grades $\delta\xi^r\,\delta\xi^s$ gilt demnach in der Tat die Formel (131). Zerspalten wir in Raum und Zeit, indem wir als Parameter τ die Variable $\xi^4 = c\,t$ wählen $\left(\text{dann wird } \frac{d\,\xi^4}{d\,\tau} = -\,\frac{d\,\xi_4}{d\,\tau} = 1,\ \delta\,\xi^4 = -\,\delta\,\xi_4 = 0\right)$, so gewinnen wir für das elektrische und magnetische Moment die Darstellungen

$$(142)\qquad \mathfrak{p} = \sum e\,\mathfrak{s}, \qquad \mathfrak{m} = \left[\mathfrak{p}\,\frac{\mathfrak{v}}{c}\right] + \tfrac{1}{2}\sum e\left[\mathfrak{s}\,\frac{\mathfrak{u}}{c}\right].$$

Hier bedeuten $\mathfrak{s}$ die Lagenvektoren der Teilchen vom Molekülmittelpunkt aus, $\mathfrak{v}$ dessen Geschwindigkeit, $\mathfrak{u}$ die relative Geschwindigkeit der Teilchen. Die Summen sind zu erstrecken über die Figur des Moleküls zur Zeit $t - \frac{r}{c}$, wo r die Entfernung Beobachter–Molekül zu dieser Zeit ist. Für die beiden Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ finden wir nach (140″), (141_3) und (141′)

$$(143)\quad \begin{cases} \mathfrak{F} = \dfrac{\mathfrak{p}}{r\left(1-\frac{v_r}{c}\right)} + \dfrac{1}{2r^2\left(1-\frac{v_r}{c}\right)^2} \\ \qquad \left\{\dfrac{1}{c}\dfrac{d}{dt}\sum e\,\mathfrak{s}\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}) + \dfrac{\zeta}{r\left(1-\frac{v_r}{c}\right)}\sum e\,\mathfrak{s}\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{s})\right\}, \end{cases}$$

$$(143')\quad \begin{cases} \mathfrak{F}' = \dfrac{\mathfrak{m}}{r\left(1-\frac{v_r}{c}\right)} + \dfrac{1}{2r^2\left(1-\frac{v_r}{c}\right)^2} \\ \left\{\dfrac{1}{c}\dfrac{d}{dt}\sum e\left[\mathfrak{s}\,\dfrac{\mathfrak{v}}{c}\right](\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}) + \dfrac{\zeta}{r\left(1-\frac{v_r}{c}\right)}\sum e\left[\mathfrak{s}\,\dfrac{\mathfrak{v}}{c}\right](\mathfrak{r}\,\mathfrak{s})\right\}, \end{cases}$$

$$(143'')\ ^{1})\qquad \zeta = 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{r})}{c^2},$$

$\mathfrak{r}$ Radiusvektor Molekül–Beobachter, v_r Komponente von $\mathfrak{v}$ in dieser Richtung, $\dot{\mathfrak{v}} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}$. (142) zeigt, daß ein *bewegter* Hertzscher Oszillator ein magnetisches Moment $\left[\mathfrak{p}\,\frac{\mathfrak{v}}{c}\right]$ besitzt und daß daher zur Darstellung seines Feldes die *beiden* Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ notwendig sind.

Setzen wir $H = F - M$, so lauten die Feldgleichungen (2) Div $F = s +$ Div M. Nach (123) ist dann wegen (125) $W\varphi = -s -$ Div M. Trennen wir φ in zwei Teile $\varphi_1 + \varphi_2$ derart, daß $W\varphi_1 = -s$, $W\varphi_2 = -$ Div M und setzen $\varphi_2 =$ Div Z, so ergibt sich Div $WZ = -$ Div M, was durch $WZ = -M$ befriedigt wird. Daraus schließen wir: *Das Feld F läßt sich durch ein Vierer- und ein Sechserpotential*

$$(144)\quad F = \text{Rot}\,\varphi + \text{Rot Div}\,Z,\quad \varphi = \int\frac{[s]}{r}\,dV,\quad Z = \int\frac{[M]}{r}\,dV$$

(dV = räumliches Volumenelement)

darstellen $\left([\,]\text{ Wert zur Zeit } t - \frac{r}{c}\right)$, *von denen sich das erste auf den Viererstrom, das zweite auf die Sechserpolarisation bezieht.* Aus (143) und (143') erhält man (bei Vernachlässigung der Momente zweiten Grades)

$$(144')\qquad \mathfrak{P} = N\sum e\,\mathfrak{s},\quad \mathfrak{M} = \left[\mathfrak{P}\,\frac{\mathfrak{v}}{c}\right] + \tfrac{1}{2}N\sum e\left[\mathfrak{s}\,\frac{\mathfrak{u}}{c}\right]$$

---

1) Vgl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. 4. Aufl. Formel (72c).

(N Anzahl der Moleküle in der Volumeneinheit). Dies ist die wohlbekannte Darstellung des Feldes nach der Elektronentheorie.[1]) Auf dem oben erwähnten magnetischen Moment bewegter polarisierter Moleküle beruht die magnetische Wirkung des Röntgenstroms.

4.

Die Strahlen. Der Fall, daß nach gegebenen Anfangsbedingungen das Feld in allen Einzelheiten bestimmt werden soll, entspricht nicht den in der Optik im allgemeinen vorliegenden Verhältnissen. Dort kommt es vielmehr darauf an, die Geschwindigkeit der „Strahlen" zu kennen, um die durch die Bewegung und das Gravitationsfeld hervorgebrachten Interferenzeffekte beurteilen zu können.

Durch die vorhergehenden Entwicklungen haben wir den in der klassischen elektromagnetischen Optik verwendeten formalen Apparat gewonnen. Wir können uns daher bei der Behandlung unseres jetzigen Problems vollkommen an die klassischen Methoden halten.[2]) Wie wir gesehen haben, brauchen wir, wenn wir den Hertzschen Tensor als Darstellungsmittel des elektromagnetischen Feldes wählen, uns nur mit der Wellengleichung zu beschäftigen und haben weiter keine Nebenbedingung zu berücksichtigen. Wir machen für Z den Ansatz

$$Z = A \cos \varkappa E + a \tag{145}$$

($\varkappa$ eine Konstante, E ein Skalar, A und a lineare Tensoren zweiter Stufe). Nach Regel 3 des zweiten Teils ist (wenn wir wieder die Klammern bei den Indizes fortlassen

$$Z_i = A_i \cos \varkappa E - \varkappa A E_i \sin \varkappa E + a_i$$

$$\square Z = Z_i^{\iota} = A_i^{\iota} \cos \varkappa E - 2\varkappa A_i E^{\iota} \sin \varkappa E - \varkappa A E_i^{\iota} \sin \varkappa E - \varkappa^2 A E_i E^{\iota} \cos \varkappa E + a_i^{\iota}$$

und daher nach (92) und (113)

$$\left\{ \begin{aligned} WZ = &- \varkappa^2 A E_i E^{\iota} \cos \varkappa E - 2\varkappa (A_i E^{\iota} + \tfrac{1}{2} AWE) \sin \varkappa E \\ &+ \cos \varkappa E \cdot WA + Wa = 0. \end{aligned} \right. \tag{146}$$

Unter Strahlen versteht man Linien, die, wenn man die Beugungsphänomene außer Acht läßt, Lichtkomplexe seitlich

1) H. A. Lorentz, a. a. O.; W. Dällenbach, Ann. d. Phys. 58. S. 523. 1919.

2) Vgl. z. B. J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes, Paris 1902, S. 331ff; H. A. Lorentz, Abh. über theor. Physik, S. 415.

begrenzen können und sich unabhängig voneinander verhalten. Damit man von der Beugung absehen kann, müssen die Wellenlängen klein gegenüber den Dimensionen der Apparate sein. Um diese Voraussetzung mathematisch zu formulieren, geben wir dem Parameter $\varkappa$ die Dimension und Größenordnung einer reziproken Wellenlänge λ. Die ersten Ableitungen von E haben dann die Größenordnung von Richtungskosinussen und Brechungsindizes, also die Größenordnung 1. Der leichtern Ausdrucksweise wegen wollen wir ferner annehmen, daß ds (und damit auch $d\sigma$) und die Koordinaten x die Dimensionen von Längen haben. (g_{ik}, g^{ik}, γ_{ik}, γ^{ik} sind dann dimensionslos). Wir nennen eine Größe langsam veränderlich[1]), wenn ihre relative Änderung und die ihrer (gewöhnlichen) Ableitungen auf der Strecke λ klein ist, d. h. $\frac{\lambda P'}{P} \ll 1$, $\frac{\lambda P''}{P'} \ll 1$ usw., wenn P, P', P'' usw. die Größenordnung der betreffenden Größe und ihrer Ableitungen sind. Dann lautet die Voraussetzung, die wir machen müssen, um von Strahlen reden zu können: A, E', γ_{ik} sind langsam veränderlich, a ist klein gegen A. Ferner mögen die Koordinaten so gewählt sein, daß g_{ik} und u_i (höchstens) von der Ordnung 1 sind. (Das gilt dann auch von g^{ik} und w^i). Ist γ diese Ordnung, so haben wir also

$$(147)\quad \begin{cases} \frac{\lambda A'}{A} \ll 1,\ \frac{\lambda A''}{A'} \ll 1,\ E' \sim 1,\ \lambda E'' \ll 1,\ \gamma \sim 1,\ \lambda\gamma' \ll 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\lambda\gamma''}{\gamma} \ll 1,\ a \ll A. \end{cases}$$

Langsamveränderlichkeit von A und Kleinheit von a (das schnell veränderlich sein wird) bedeutet Außerachtlassung der Randerscheinungen, die Voraussetzung über E'' Beschränkung der Krümmung der Wellenfronten (Beugung in der Nähe der Bildpunkte), Langsamveränderlichkeit von γ_{ik} heißt: die durch die mechanische und Schwerewirkung des Lichtes hervorgebrachten Geschwindigkeiten und Gravitationsfelder (die schnell veränderlich sind) sind so klein, daß man ihre Rückwirkung auf die Lichtfortpflanzung vernachlässigen kann und unter g_{ik} und u_i nur die von außen erregten (langsam veränderlichen) Größen zu verstehen hat.

---

1) H. A. Lorentz, a. a. O.

Die Größenordnung der ersten kovarianten Ableitung ist nach (73) $P' + \gamma' P$, die der zweiten daher $(P' + \gamma' P)' + \gamma'(P' + \gamma' P) \sim P'' + \gamma'' P + \gamma' P' + \gamma'^2 P$ (bei einem Skalar ist $P = 0$ zu setzen), die des Krümmungstensors nach (82) $\gamma'' + \gamma'^2$ und damit die von WZ nach (92), (113), (146) und (147)

$$(146') \quad \frac{A}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}(A' + \gamma' A + A E') + (A'' + \gamma' A' + \gamma'' A + \gamma'^2 A) + (a)$$

((a) ist analog wie der vorhergehende Ausdruck zu bilden). Wenn wir daher die zweiten und die Produkte der ersten Ableitungen der langsam veränderlichen Größen, sowie das Beugungsglied a vernachlässigen, so haben wir in (146) nur die Terme mit $\varkappa$ und $\varkappa^2$ zu berücksichtigen, die, wie aus (147) und (146') zu ersehen ist, von verschiedener Größenordnung sind. Deshalb zerfällt (146) in die zwei Gleichungen

$$(148) \quad E_i E^i = \gamma^{ir} \frac{\partial E}{\partial x^i} \frac{\partial E}{\partial x^r} = 0,$$

$$(149) \quad A_i E^i = -\tfrac{1}{2} A W E.$$

(148) ist die Jacobische Differentialgleichung eines „mechanischen" Problems mit der Hamiltonschen Funktion $H = \frac{1}{2}\gamma^{ir} p_i p_r$, wo $p_i = \frac{\partial E}{\partial x^i}$ die Impulse sind. Nach den kanonischen Gleichungen ist

$$(150) \quad \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p^i} = \gamma^{ir} p_r = p^i = E^i, \quad (\tau = \text{Parameter}).$$

Daher $H = \frac{1}{2}\gamma_{ir} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^r}{d\tau}$, so daß die aus dem Variationsproblem $\delta \int H d\tau$ fließenden Lagrangeschen Gleichungen die Gleichungen

$$(151) \quad \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0$$

der geodätischen Linien[1]) (der Mannigfaltigkeit mit dem Linienelement $d\sigma$) sind, und zwar handelt es sich, da nach (148) und (150)

$$(152) \quad \gamma_{ir} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^r}{d\tau} = 0$$

ist, um *geodätische Nullinien.*

1) Vgl. z. B. W. Pauli jun., a. a. O. Nr. 15.

Wegen der Langsamveränderlichkeit der γ^{ir} kann man (148) durch Funktionen E mit langsam veränderlichen Ableitungen auflösen. Tragen wir die Lösung in (149) ein, so entstehen nach (150), unter Beachtung der Definition (72) der kovarianten Ableitung, Gleichungen der Form

$$\frac{dA}{d\tau} = \text{lineare homogene Funktion der } A, \tag{153}$$

d. h. gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichungen für die Komponenten von A, deren Koeffizienten sich aus den ersten und zweiten Ableitungen von E und den (mit den γ_{ik} gebildeten) Dreiindizessymbolen zusammensetzen, also bekannte langsamveränderliche Funktionen sind. Aus (153) bestimmen sich die Änderungen der Amplituden A längs der geodätischen Nullinien, sobald die Anfangswerte für ein τ bekannt sind. Diese Anfangswerte können von Nullinie zu Nullinie *beliebig* gewählt werden, unter der Einschränkung, daß sie langsam veränderlich sind. Abgesehen hiervon sind aber die Amplituden völlig unabhängig voneinander. Ihr Verschwinden an einem Punkte hat wegen der Linearität und Homogeneität der Gleichungen (153) ihr Verschwinden auf der ganzen von diesem Punkte ausgehenden Nullinie zur Folge. *Daher können die geodätischen Nullinien Weltgebiete begrenzen, außerhalb deren die Amplituden verschwinden.* Aus (148) und (150) folgt ferner

$$\frac{dE}{d\tau} = 0, \tag{148'}$$

d. h. die Phase E bleibt auf jeder Nullinie konstant.

Wir müssen noch zeigen, daß die letzte der Ungleichheiten (147) erfüllt werden kann. Wegen (148) und (149) reduziert sich (146) auf

$$Wa = -WA \cdot \cos \varkappa E. \tag{154}$$

Wir haben also die inhomogene Wellengleichung zu lösen. Diese Lösung kann mittels des Greenschen Satzes (119) prinzipiell auf dieselbe Weise wie in der klassischen Theorie bewerkstelligt werden. Die Lösung wird darstellbar sein durch Integrale der Form[1])

$$a = \int (G \cos \varkappa E\, WA)_L\, dx^1\, dx^2\, dx^3,$$

1) M. v. Laue, Berl. Ber. 1922, S. 118.

wo G eine Funktion ist, die wie in der klassischen Theorie im Aufpunkt von der ersten Ordnung unendlich wird, und der Index L auf dem vom Aufpunkt ausgehenden Vorkegel hinweist. Die Theorie der Fourrierschen Reihen lehrt uns, daß a durch Vergrößerung von $\varkappa$, d. h. Verkleinerung der Wellenlänge beliebig klein gemacht werden kann.[1]) Wir sind mithin zu dem Resultat gelangt, daß *die Strahlen in bewegten Körpern durch geodätische Nullinien der Mannigfaltigkeit mit dem Linienelement* $d\sigma^2 = \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k$ *dargestellt sind.* Die Strahlgeschwindigkeit ist dabei nach (148′) gleich der Phasengeschwindigkeit längs des Strahls.

Aus $d\sigma^2 = 0$ folgt nach (26) $ds^2 = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)(u_i\, dx^i)^2$. Für $\varepsilon\mu > 1$ haben also die Weltlinien der Strahlen zeitartige Richtung. Es existiert dann eine *Viererstrahlgeschwindigkeit*, die nach (15) und (150) (wenn wir wieder die Klammern bei den Indizes einführen) gleich

$$(155) \qquad w^i = \frac{E^{(i)}}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\, E^{(\mu)}\, E^{(\nu)}}}, \qquad E^{(i)} = \gamma^{ir}\frac{\partial E}{\partial x^r}$$

ist. Aus der Existenz einer Vierergeschwindigkeit folgt[2]) die *Gültigkeit des Additionstheorems der Geschwindigkeiten.*

Als Beispiel für die Lichtfortpflanzung in einem Körper bei Anwesenheit eines Gravitationsfeldes nehmen wir den Fall eines in einem Zentrifugalkraftfeld ruhenden Mediums (Harreßscher Versuch). Bei Benutzung von Polarkoordinaten und Beschränkung auf die Ebene ist

$$(156) \quad ds^2 = dx_1^2 + x_1^2\, dx_2^2 - \frac{2\omega}{c}\, x_1^2\, dx_2\, dx_4 - \left(1 - \frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}\right) dx_4^2$$

(x_1 Radiusvektor, x_2 Polarwinkel, ω Drehgeschwindigkeit). Da die Materie ruht, ist $u^1 = u^2 = u^3 = 0$, $u^4 = 1/\sqrt{-g_{44}} = 1/\sqrt{1 - \frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}}$. Die kovarianten Komponenten sind

$$u_1 = u_3 = 0,\quad u_2 = g_{24}\, u^4 = \frac{-\frac{\omega}{c}\, x_1^2}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}}},\quad u_4 = g_{44}\, u^4 = -\sqrt{1 - \frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}}.$$

1) Vgl. z. B. M. Born, Dynamik der Kristallgitter, Anhang.
2) W. Pauli jun., a. a. O. Nr. 25.

Für die γ_{ik} findet man hieraus nach (18)

$$\gamma_{22} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}\right) x_1^2}{1 - \frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}}, \quad \gamma_{24} = -\frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\omega}{c} x_1^2,$$

$$\gamma_{44} = -\frac{1}{\varepsilon\mu}\left(1 - \frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}\right).$$

Die übrigen γ_{ik} sind gleich den g_{ik}. Es wird also

$$(157)\quad \left\{ d\sigma^2 = dx_1^2 + x_1^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}}{1 - \frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}} dx_2^2 - \frac{2\omega}{\varepsilon\mu c} x_1^2 dx_2 dx_4 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\left(1 - \frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}\right) dx_4^2. \right.$$

Bei Vernachlässigung von ω^2 reduzieren sich (156) und (157) auf

$$(156')\quad ds^2 = dx_1^2 + x_1^2 dx_2^2 - \frac{2\omega}{c} x_1^2 dx_2 dx_4 - dx_4^2,$$

$$(157')\quad d\sigma^2 = dx_1^2 + x_1^2 dx_2^2 - \frac{2\omega}{\varepsilon\mu c} x_1^2 dx_2 dx_4 - \frac{dx_4^2}{\varepsilon\mu}.$$

Aus $ds^2 = 0$ leitet man die Erscheinungen im Vakuum ab (Versuch von Sagnac).[1]) In diesem Falle ist der Unterschied der Umlaufszeiten zweier in entgegengesetzter Richtung umlaufender Strahlen $\Delta t = \frac{4\omega F}{c^2}$ (F umlaufene Fläche). Vertauscht man nun in (156') x_4 mit $x_4/\sqrt{\varepsilon\mu}$ und ω mit $\omega/\sqrt{\varepsilon\mu}$, so erhält man (157'). Bei dieser Vertauschung geht aber die Formel für Δt in sich über. Sie gilt daher auch in einem ponderabeln Medium.[2])

Berlin, Institut für theoretische Physik.

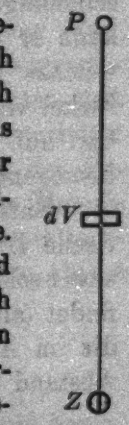
1) P. Langevin, Compt. Rend. 173. 831. 1921; R. Ortvay, Phys. Zeitschr. 23. 176. 1922.

2) M. v. Laue, Relativitätstheorie I, § 24 d.

(Eingegangen 28. Mai 1923.)

2. *Gegen ein Mißverständnis der Äquivalenzhypothese;* *von Aloys Wenzl.*

Eine jüngst erschienene Broschüre von A. H. Bucherer, „Die Planetenbewegung auf Grund der Quantentheorie und eine Kritik der Einsteinschen Gravitationsgleichungen“[1], die in anregender, im übrigen hier nicht zu diskutierender Weise die Rotverschiebung im Gravitationsfeld aus einem Lichtquantenansatz herleitet und auf Grund des Gleichgewichtszustandes zwischen Lichtquanten und Materie die Bewegungsgleichungen im Schwerefeld abzuleiten versucht, beginnt und schließt mit einer grundsätzlichen Kritik der allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins. Sie beruht indes gedanklich auf einem charakteristischen Mißverständnis der Äquivalenzhypothese. Der Verfasser argumentiert:



a) Ein Beobachter, der im Punkt P des Schwerefeldes eines Zentralkörpers Z ruht, macht bezüglich eines in einem unendlich kleinen Raumteil dV sich abspielenden Vorgangs dieselben Beobachtungen, als wenn er außerhalb des Schwerefeldes mit einer der Intensität desselben in P entsprechenden Beschleunigung in entgegengesetzter Richtung sich bewegte. b) Statt dessen kann er annehmen, er ruhe, und ihm gegenüber habe dV eine entgegengesetzte gleich große Beschleunigung. c) Diese Beschleunigung von dV kann er wiederum ersetzen durch ein dort wirkendes Zusatzschwerefeld. Der Beobachter in P gewinnt also „dieselben Meßresultate bezüglich eines Vorganges im Schwerefeld, als ob er außerhalb des Feldes ruhte und der Vorgang in einem berechenbar abgeänderten Schwerefeld vor sich ginge. Aus diesen Überlegungen geht

1) A. H. Bucherer, Die Planetenbewegung usw. Bonn 1923.

zur Evidenz hervor, daß die besprochene äquivalente Änderung des Schwerefeldes durch die Parameter des Standortes bestimmt ist ... Das Schwerefeld ... ist relativ, d. h. durch den Standort des Beobachters mitbestimmt. Deshalb enthalten die Bewegungsgesetze die Parameter des Standortes. Die von Einstein postulierte Invarianz des Gravitationsgesetzes besteht nicht".[1])

Der Fehler des Schlusses liegt in der These a), welche das Äquivalenzprinzip unzulässig anwendet. Ein Beobachter, der in Punkt P eines Gravitationsfeldes ruht, dessen Intensität einer Schwerebeschleunigung g_P entspricht, beobachtet allerdings Vorgänge in seiner unmittelbaren Nachbarschaft so, als ob er außerhalb eines Schwerefeldes wäre, dafür aber mit einer Beschleunigung $-g_P$ sich samt seiner Umgebung bewegen würde; entfernte in anderen Teilen des *nicht*homogenen Gravitationsfeldes sich abspielende Vorgänge aber beobachtet er keineswegs so, als ob er mit der Beschleunigung $-g_P$ sich bewegte, sondern als ob er mit der Beschleunigung g'_{dV}, die der Intensität des Schwerefeldes in dV entspricht, in entgegengesetzter Richtung sich bewegte. Statt dessen kann er nun annehmen, er befände sich in Ruhe, während dV die Beschleunigung g'_{dV} habe, und diese Beschleunigung wiederum kann er ersetzen durch ein Schwerefeld, nämlich eben jenes, welches in dem Raumteil dV herrscht. Damit aber ist der Zirkel vollendet. Das Äquivalenzprinzip ist eben nur anwendbar auf unmittelbare Nachbarschaft oder im Endlichen auf homogene Gravitationsfelder.

Entsprechend diesem Grundirrtum ist auch die rechnerische Durchführung, die eine falsche Berechnung des Einsteinschen Periheleffektes erweisen will, unhaltbar. Bucherer findet (als Gleichung 29) für die Frequenz n_0 einer Schwingung, die im Abstand r von der Zentralmasse μ emittiert wird, im Abstand ϱ von derselben beobachtet wird,

$$n = n_0 \left(1 - \frac{\mu}{r c^2} + \frac{\mu}{\varrho c^2}\right),$$

wo n_0 die Schwingungszahl bei Emission im gravitationsfreien Feld bedeutet. Das ist aber durchaus keine neue Beziehung,

1) A. a. O., S. IX.

sondern sie ergibt sich ebenso aus der Relativitätstheorie Einsteins.[1])

Wenn nun aber Bucherer den Klammerausdruck in die Bewegungsgleichung eines um den Zentralkörper rotierenden Planeten einsetzt, so ist das eine unzulässige Übertragung. Das Korrektionsglied $\frac{\mu}{\varrho c^2}$ bedeutet, daß das Potential an der Stelle der Emission in der Entfernung ϱ vom Zentralkörper von dem Potential an der Oberfläche des Zentralkörpers abzuziehen ist. Es ist also durchaus *objektiv*, nicht *subjektiv* aufzufassen. Für die Merkurbewegung aber z. B. hat es gar keinen Sinn, das Potential der Sonne in Erdentfernung zu berücksichtigen, die Planetenbewegung erfolgt ja nicht unter dem Einfluß dieses Potentials, ganz abgesehen davon, daß, wenn schon die Störung durch die Erdmasse in Betracht gezogen werden sollte, dann das Potential, das der Erdmasse zuzuschreiben ist, eingesetzt werden müßte; diese Störung aber ist zu vernachlässigen. Der Verfasser wurde zu der falschen Einsetzung offenbar durch die oben kritisierte grundsätzlich falsche Methode veranlaßt.

Wenn nun der Verfasser das System Sonne-Merkur als Uhr betrachtet, so liegt das allerdings im Rahmen einer relativistischen Betrachtungsweise. Das ist aber nicht der Fall, wenn er fortfährt: diese Uhr müsse schneller oder langsamer gehen je nach dem Standort, von dem aus sie beobachtet wird. Es ist zwar unbestritten, daß sie im Sinne der speziellen Relativitätstheorie von der relativen Geschwindigkeit des Beobachters abhängt, aber im Sinne der allgemeinen Theorie hängt der Gang der Uhr weiter nur ab von dem Gravitationsfeld, in dem sie sich befindet. Dieses Feld ist hier das eigene

---

1) Vgl. W. Pauli, Enz., Relativitätstheorie, S. 714:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Phi_s - \Phi_e}{c^2} = 2{,}12 \cdot 10^{-6}.$$

Allerdings geht aus der numerischen Ausrechnung Paulis nicht hervor, mit welchem Wert für die Gravitationskonstante er gearbeitet hat; es scheint in Φ_s das Gravitationspotential der Sonne in Erdentfernung nicht enthalten zu sein; für die Beobachtung käme diese erst in der letzten Dezimale sich äußernde Wirkung natürlich nicht in Frage, wohl aber wäre sie theoretisch gegenüber einem der Erdmasse zu verdankenden Potential nicht zu vernachlässigen.

Feld des Systems Sonne-Merkur, nicht ein fremdes, unter dessen Einfluß es steht. Das ganze Modell Sonne-Merkur ist aber überhaupt mit dem eines Atommodelles nicht vergleichbar, denn es entsendet keine Wellen, welche die Eigenfrequenz an dem Ort der Emission einem Beobachter in einem anderen Gravitationsfelde mitteilen könnten, wie es durch emittierte Lichtstrahlen der Fall ist.

Die Parameter des Standortes gehen also nicht in die Bewegungsgleichung ein, sondern je nach dem Bezugssystem muß ich verschiedene Koordinaten einführen, die naturgemäß auch verschiedene Werte für die beobachtete Perihelbewegung ergeben. In der Einsteinschen Theorie sind für die Merkurbahn eingeführt der Fahrstrahl Sonne-Merkur und das Azimut, ebenso wie in den astronomischen Berechnungen, daher die Vergleichsmöglichkeit. Eine Frage, die theoretisch zu untersuchen wäre, — das Resultat läge sicher unter der Beobachtungsgrenze — wäre höchstens die, ob die in der Astronomie erfolgte Umrechnung von der Erdbeobachtung auf das Sonnensystem im relativistischen Sinne nicht zu modifizieren wäre.

(Eingegangen 7. Juli 1923.)

3. *Elektrizitätsdurchgang durch Kristalle; von A. Joffé.*

Zum Teil in Gemeinschaft mit W. C. Röntgen.[1])

Der Durchgang elektrischer Ströme durch isolierende Kristalle zeigt gewisse Eigentümlichkeiten, die bis jetzt nicht aufgeklärt worden sind. Von Schweidler werden sogar diese

1) Die Untersuchung wurde 1904 im Anschluß an meine Dissertation (A. Joffé, Münchener Dissertation 1905; abgekürzt in Ann. d. Phys. 20. S. 919. 1906) auf Anregung von W. C. Röntgen angefangen. Ein Teil davon ist in München als gemeinschaftliche Arbeit ausgeführt; über die dabei verwendete Versuchsanordnung vergleiche:

Über die Elektrizitätsleitung in einigen Kristallen und über den Einfluß einer Bestrahlung darauf von W. C. Röntgen zum Teil in Gemeinschaft mit A. Joffé, I. Teil. Ann. d. Phys. 41. S. 449. 1913. Von Röntgen allein wurde die Neubestimmung der piezoelektrischen Konstante des Quarzes vorgenommen. Vgl. Ann. d. Phys. 41. S. 474. 1913. Einen kurzen Bericht über die damals noch nicht abgeschlossene Untersuchung des Kalkspats findet man in den Sitzungsberichten der Münchener Akademie 37. S. 113. 1907. Die beabsichtigte, zum Teil auch fertiggestellte, ausführliche Veröffentlichung über viele an Kalkspat gemachte Beobachtungen, die in folgendem nicht besprochen werden, wird vorläufig unterbleiben. Der weitaus größte Teil der Versuche an Steinsalz wurde von Röntgen ausgeführt und beschrieben, vergleiche: Über die Elektrizitätsleitung in einigen Kristallen und über den Einfluß einer Bestrahlung darauf. Von W. C. Röntgen zum Teil in Gemeinschaft mit A. Joffé, II. Teil, Ann. d. Phys. 64. S. 1. 1921. Im folgenden gebe ich von den gemeinsamen Kalkspat- und Quarzversuchen, sowie von den Ergebnissen, die ich und meine Schüler später in Petrograd erhielten, eine kurze Darstellung. Vgl. A. Joffé: Berichte des polytechnischen Instituts in Petrograd 24. S. 62. 1915. A. Schaposchnikow, Elektrische Leitfähigkeit des Quarzes und die Abweichungen vom Ohmschen Gesetz, Journ. d. russ. phys.-chem. Gesellschaft 42. S. 876. 1910. Derselbe, Ionisation des Quarzes, Journ. d. russ. phys.-chem. Gesellschaft 43. S. 428. 1910. Derselbe, Temperatureinfluß auf die Leitung des Quarzes, Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 46. S. 265. 1914. A. Joffé und M. Kirpitschewa, Elektrizitätsleitung in reinen Kristallen, Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 48. S. 261. 1916.

Erscheinungen nicht als Leitung, sondern als „dielektrische Anomalien" gedeutet. Legt man an ein beiderseits metallisch belegte Kristallplatte eine konstante Potentialdifferenz an, so bekommt man einen Strom, der mit der Zeit abnimmt, zuweilen ohne sich einer endlichen Grenze zu nähern. Entfernt man jetzt die Spannung und schließt die beiden Belegungen durch ein Galvanometer kurz, so erhält man einen entgegengesetzt gerichteten Rückstrom, der allmählich schwächer wird und 0 zustrebt.

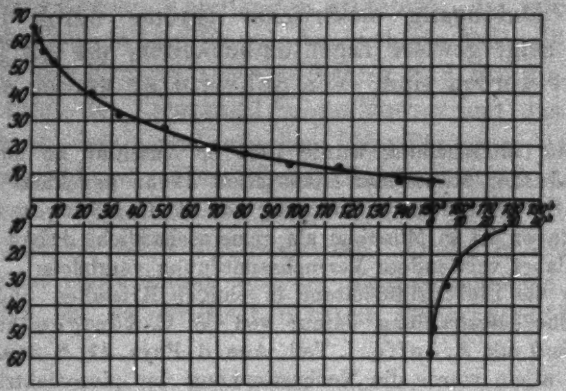


Fig. 1.

In der Fig. 1 ist der Gang der Stromstärke als Funktion der Zeit für einen typischen Kalkspatkristall aufgetragen. Die nächstliegende Vorstellung von einer durch den Stromdurchgang gebildeten Polarisation wurde von E. Warburg verworfen, als er zeigen konnte, daß die Richtung des Rückstromes bei Gegenschaltung von selbst 300 Volt sich nicht änderte. Curie glaubte eine Erklärung der ungewöhnlichen hier auftretenden elektromotorischen Kraft in der Vorstellung zu finden, daß im Kristall eine Reihe hintereinander geschalteter Wasserelemente geladen werden. Eine andere Erklärung ging von der Annahme einer elektrischen Rückstandsbildung aus (die übrigens nach dem Befund von H. A. Rowland und E. L. Nichols gerade in Kristallen klein ist), einer Inhomogenität nach Maxwell oder einer inneren Reibung bei dielektrischen Verschiebungen. Dazu kamen noch die Untersuchungen über die Säuberung der Kristalle durch den Strom von fremden Ionen.

Wie aus den weiter unten beschriebenen Versuchen hervorgeht, trifft die einfachste Vorstellung von der Bildung einer Gegenpolarisation das Wesentliche der Erscheinung. Es zeigte sich, daß diese Polarisation eine Höhe von vielen Tausenden Volt erreichen kann.

Ein anderer Umstand, der die Untersuchung der Kristalle erschwerte, war die quantitative Unstimmigkeit der Resultate an verschiedenen Exemplaren desselben Materials, die oft um das Hundertfache sich voneinander unterschieden.

Nachfolgend wird gezeigt, daß diese Unterschiede teils von Beimengungen, teils von der Vorbehandlung der Präparate abhängen. Es gelingt, künstliche Kristalle herzustellen, deren Leitfähigkeit keine individuellen Verschiedenheiten mehr aufweisen und für welche die Leitfähigkeit eine leicht zu messende Materialkonstante wird.

Eine sehr bequeme Einrichtung, die bei den in Petrograd gemachten Versuchen verwendet wurde, ist die in Fig. 2 skizzierte: Der Kristall K wird metallisch nach der Art eines Kelvinschen Kondensators belegt; der Schutzring S liegt an der Erde, die Fläche L wird in einem bestimmten Zeitpunkt durch die Wippe U_1 mit einer Akkumulatorenbatterie verbunden und kurz nachher verbindet die an derselben Achse sitzende Wippe U_2 die andere Belegung G mit einem Fadenelektrometer E, welches durch einen ersetzbaren Widerstand W zur Erde geleitet ist. Die Anzeigen des Fadenelektrometers in Volt, die photographisch registriert oder direkt an einer Mattscheibe abgelesen werden, geben die Stromstärke J an, sobald der Widerstand W bekannt ist: $J = \frac{V}{W}$. Zur Messung schwächerer Ströme wurde an die Stelle von W ein Kondensator angeschaltet oder auch die Kapazität des Elektrometers allein benutzt. Bei einer Kapazität C wird die Stromstärke aus der

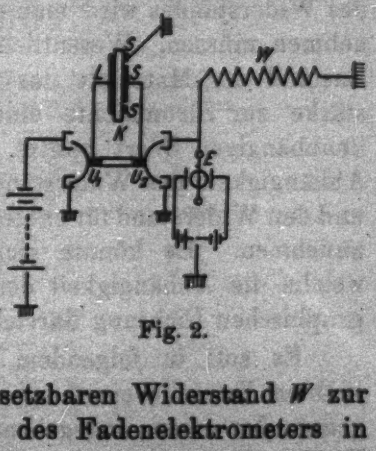


Fig. 2.

Aufladung des Elektrometers in der Zeit Δt; $J = \frac{C \Delta V}{\Delta t}$ bestimmt.

Das Ohmsche Gesetz.

Solange die Ursachen der Stromverminderung mit der Zeit und des Rückstroms unaufgeklärt bleiben, ist es auch fraglich, ob man bei den isolierenden Kristallen von einer Leitfähigkeit sprechen darf und ob diese Erscheinungen quantitativ durch einen Ohmschen Widerstand dargestellt werden können. Die zeitliche Änderung des Stromes, auch wenn sie durch den Strom selbst hervorgebracht wäre, schließt noch die Existenz eines spezifischen Widerstandes nicht aus. Es genügt, an die Stromverminderung in einem Metall, bei Erwärmung durch Joulesche Wärme zu denken, um dies einzusehen. Noch verwickelter sind die Stromveränderungen, die in einem Elektrolyten durch fortdauernde Konzentrationsänderungen und Temperatureinfluß vor sich gehen. In diesen klar zu übersehenden Fällen werden wir von Widerstandsänderungen durch sekundäre Einflüsse sprechen. Zur Definition des Widerstandes wird man entsprechend kürzere Zeitintervalle nehmen müssen. Wesentlich ist nur, daß bei einem gegebenen Zustand des Materials das Verhältnis der elektrischen Feldstärke zur Stromdichte einen von der angelegten Spannung unabhängigen Wert besitzt. (Eventuell kann man noch eine Abhängigkeit des Widerstandes von der Stromrichtung zulassen und den Widerstand für entgegengesetzte Richtungen verschieden annehmen. Es könnte sich herausstellen, daß die Fläche, welche die Abhängigkeit des Widerstandes von der kristallographischen Richtung darstellt, kein Symmetriezentrum besitzt.)

Es soll in folgendem gezeigt werden, daß alle untersuchten Kristalle einen spezifischen Widerstand besitzen, der genau der oben angegebenen üblichen Definition entspricht. Dieses gilt auch in den Fällen, wo augenscheinliche Abweichungen vom Ohmschen Gesetz vorliegen, so bei der Erscheinung des Sättigungsstroms. Auch da wird das Ohmsche Gesetz für entsprechend kurze Zeitintervalle seine Gültigkeit bewahren, wie weiter unten ausgeführt wird (vgl. S. 487).

Schließen wir vorläufig dieses Gebiet des Sättigungsstroms aus, so ergibt sich zunächst, *daß, wie auch der Strom sich*

Tabelle 1.

Kalkspat ⊥ z. Achse VI.

Graphitbelegung, Stromquerschnitt 825 qmm Dicke 1, 953 mm. Kapazität 250 cm.
Empfindlichkeit des *Quad. El.* 167 Skt. *pro 1 Volt.* $t = 19{,}05^0$ C.

Zeitintervalle nach Anleg. der Spann.	± 10,4 Volt			± 52 Volt			± 104 Volt			± 208 Volt	± 415,5 Volt			± 830,5 Volt		
	beob.	ber.	Diff.	beob.	ber.	Diff.	beob.	ber.	Diff.	beob.	beob.	ber.	Diff.	beob.	ber.	Diff.
2″—17″	1,65	1,66	+0,01	8,2	8,3	+0,1	16,65	16,62	−0,03	33,25	66,8	66,9	+0,1	136	136	−0,0
30″—45″	1,55	1,56	+0,01	7,75	7,77	+0,02	15,5	15,55	+0,05	31,1	62,2	62,2	+0,0	125	124,3	−0,6
1′—1′15″	1,53	1,54	+0,01	7,65	7,7	+0,05	15,4	15,4	+0,00	30,75	61,7	61,9	+0,2	124,5	124,5	+0,0
2′—2′15″	1,53	1,53	+0,00	7,68	7,63	+0,05	15,27	15,26	−0,01	30,52	61,5	61,45	−0,05	123,5	123,5	+0,0
Entladestrom																
2″—17″				0,65	0,65	+0,00	1,35	1,30	−0,05	2,6	5,2	5,2	+0,0	16,0	16,2	+0,2
30″—45″				0,1	0,15	+0,05	0,25	0,30	+0,05	0,60	1,3	1,2	+0,1	2,45	2,4	−0,05
1′—1′15″							0,15	0,15	0,00	0,3	0,6	0,6	+0,0	1,35	1,2	−0,15

mit der Zeit ändern mag, für die erste kurze Zeit nach Anlegen einer Spannung die Stromstärken für gleiche Zeiten nach Anlegen der Spannung dieser proportional sind.

So bekamen wir bei der Kalkspatplatte VI bei 19,65° C für eine angelegte Spannung von 1,019 Volt 3,05 Skt. in 5 Min.; für eine Spannung von 826,5 Volt 142,2 Skt. in 15 Sek. Rechnet man aus beiden Versuchen die Stromstärke für 1 Volt (in Skt. pro 15 Sek.), so erhält man die *bis auf 0,5 Proz.* übereinstimmende Zahl 0,150 Skt. In Tab. 1 (S. 465) sind Stromstärken für verschiedene Zeitintervalle nach Anbringung einer gegebenen Potentialdifferenz von 10—800 Volt oder nach Kurzschluß den aus dem Proportionalitätsgesetz berechneten gegenübergestellt. Auch hier übersteigen die Abweichungen nirgends die zulässigen Fehlergrenzen (0,5 Proz. bei stärkeren Strömen und ca. 1 Proz. bei schwächeren). Die Zahlen der Tabelle geben das Mittel aus je 4 Beobachtungen.

Dasselbe Verhalten zeigt auch eine Quarzplatte, wie aus nachfolgender Tabelle zu ersehen ist.

Tabelle 2.

Quarz ⊥ Achse.

Belegung 640 qmm, Dicke 7,45 mm. Kapazität ca. 200 cm. $t = 18°,7 \pm 0,1$.

Zeit	26 Volt			52 Volt			104 V.	208 Volt		
	beob.	ber.	Diff.	beob.	ber.	Diff.	beob.	beob.	ber.	Diff.
5″—20″	15,0	15,6	+0,6	32,0	31,3	−0,7	62,5	125	125	0
30″—45″	10,1	10,2	−0,3	21,0	20,5	−0,5	41	78	82	+4
1′—1′15″	9,0	9,2	+0,2	18,0	18,5	+0,5	37	70	74	+4
2′—2′15″	7,5	7,5	0,0	16,0	15,0	+1,0	30	62	60	−2
0 Volt										
5″—20″	8	7,2	−0,8	15	14,5	−0,5	29	50	58	+8
30″—45″	4	3,2	−0,8	7	6,5	−0,5	13	27	26	−1

Auch die Abhängigkeit der Stromstärke von der Dicke D der Platte und vom Stromquerschnitt S stimmt mit dem Ohmschen Gesetz überein, insofern die Kristallplatte homogen ist, was allerdings nicht immer der Fall zu sein braucht. Zur Prüfung dieser Abhängigkeit genügt es die Proportionalität der Stromstärke und der an derselben Belegung influenzierten Elektrizitätsmenge bei verschiedenen S und D nachzuweisen,

da bekanntlich die für die Influenz maßgebende Dielektrizitätskonstante als eine richtige Materialkonstante anzusehen ist; Querschnitt und Dicke kommen aber im Ausdruck der Influenzelektrizität in derselben Weise, wie für die Stromstärke vor. In der Tat hat sich auch in vielen Fällen (wo keine Inhomogenitäten vermutet wurden) diese Forderung bis auf 1—2 Proz. bestätigt gefunden.

Wenn auch diese Tatsachen die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes für die *erste* Zeit nach Anlegung einer Spannung bestätigen, so lassen sie die praktisch wichtigste Frage offen, inwiefern man während des ganzen Stromdurchganges von einem bestimmten Widerstand sprechen darf. Zu verschiedenen Zeitpunkten wurde die angelegte Potentialdifferenz V um eine Größe ΔV geändert und die entsprechende Stromänderung ΔJ bestimmt. Die *Messung* ergab, daß in jedem Moment das Verhältnis $\frac{\Delta V}{\Delta J} = R$ einen von ΔV unabhängigen Wert besitzt. Es hat sich aber außerdem gezeigt, daß *der so definierte* Widerstand R trotz der *zeitlichen* Abnahme der Stromstärke denselben Wert behält, und daß die Ursache der Stromabnahme nicht in einer Widerstandsänderung, sondern in einer sich allmählich ausbildenden gegenelektromotorischen Kraft der Polarisation zu suchen ist. Zum Zwecke einer quantitativen Prüfung dieser Behauptung mußten wir die Polarisation P direkt messen, um das Ohmsche Gesetz in der richtigen Form: $J = \frac{V - P}{R}$ zu verifizieren. Mißt man die Polarisationsspannung in einem Zeitpunkt direkt durch die Aufladung eines Elektrometers, so hat man die Schwierigkeit, daß schon durch den Ladestrom des Elektrometers die Polarisation verändert wird und daß in der langen Aufladezeit die Polarisation möglicherweise teilweise verschwindet. Beide Fehlerquellen wurden durch Benutzung eines Elektrometers von möglichst kleiner Kapazität (Hankelscher Elektrometer) vermindert, Die eine Belegung wurde dauernd auf demselben Potential gehalten (100 bzw. 0 Volt), während die andere mit dem Hankelschen Elektrometer verbunden wurde, bis sich dasselbe auf eine bestimmte Spannung einstellte. Ein Schutzring, der die Potentialverteilung ganz entstellen würde, durfte nicht benutzt werden. Eine Vorladung des Elektrometers auf eine angenähert richtige Spannung

beschleunigt die definitive Einstellung bedeutend. Ist an die eine Belegung eine Spannung V angelegt, *so mißt das Hankelsche Elektrometer an der anderen diese Spannung (V), vermindert um den Betrag der elektromotorischen Kraft der Polarisation (P).* Zur Messung der Stromstärke verbanden wir die Belegung mit einem Thomsonschen Elektrometer, an den eine entsprechend große Kapazität angehängt wurde und beobachteten den Ausschlag in einer bestimmten Zeit (3 oder 10 Sek.). Gleich danach wurde $V - P$ wieder mit dem Hankelschen Elektrometer gemessen. Das Mittel beider Ablesungen des Hankelschen Elektrometers gibt die wirksame Potentialdifferenz zu der Zeit, in der die Stromstärke i mit dem Thomsonschen Elektrometer gemessen worden ist. Diese wirksame Potentialdifferenz $V - P$ sank während des Stromdurchganges *bei den in der Tab. 3 dargestellten Versuchen* (vgl. Tabelle unten) von 99 auf 25 Volt. Während des Entladestroms maß das Elektrometer die allein vorhandene Potentialdifferenz der Polarisation P, die von 74,8 auf 11,5 Volt herunterging. Bei der zweiten Polarisationsbildung ging das Potential $(V - P)$ von 81,7 auf 7,0 zurück und am Anfang des folgenden Entladungsversuches hatte die Polarisation wieder 82 Volt erreicht. Die letzte Kolonne der Tabelle gibt das Verhältnis der gemessenen Stromstärke i zu der an der Platte gemessenen Potentialdifferenz. Wie man sieht, bleibt dieses Verhältnis bis auf 2 Proz. konstant und unabhängig von der Stromrichtung.

Derselbe Versuch wurde mehrmals wiederholt mit verschiedenen Kalkspatplatten mit normaler oder künstlich erhöhter Leitfähigkeit; der Erfolg blieb immer derselbe.

Wir haben uns überzeugt, daß dieselben Verhältnisse auch für die Leitung bei Zimmertemperatur gelten. Eine Kalkspatplatte wurde bei 18° C mit +100 Volt etwa 100 Stdn. geladen, bis die Stromstärke von 79 auf 20,5 Skt. zurückging. Das entspricht einer wirksamen Spannung $(V - P)$ von $\frac{20{,}5}{79}\,100 =$ 26 Volt und einer Polarisation von 74 Volt. Als dann eine Belegung der Platte an die Erde gelegt wurde, zeigte an der anderen Belegung das Hankelsche Elektrometer in der Tat nach etwa 20 Min. schon eine Spannung von 70 Volt. Nach 20 Stdn. Kurzschluß zeigte das Elektrometer 23 Volt, während

Tabelle 8.

Kalkspat ⊥ zur Achse VI.

Ladestrom 100 Volt. *Zusatz*-Kapasität *z. Quadr. Elektrom.* 0,5 MF
Empfindl. *d. Quadr. Elektr.* 166 Skt. für 1 Volt Graphitbelegung etwa 800 qmm; Dicke 0,893 mm *t°* ca. 98° C.

Zeit	Hankel-Elektrometer v. d. Strom-mess.	Hankel-Elektrometer n. d. Strom-mess.	Hankel-Elektrometer Mittel	Potent.-Diff. in Volt *v*	Stand d. Thomson-El. nach 10 Sek.	Strom-stärke in Skt. *i*	*i/V*
6. 7. 1906	Nullpunkt 50,0				Nullp. 38,7—39,0		
10h 42′	98,7	97,0	97,8	+99	92,5	+53,8	0,543
43′	98,0	96,5	97,3	+98,4	92,0	+53,3	0,543
44′	98,0	96,5	97,3	+98,4	92,5	+53,6	0,545
47′	93,0	91,5	92,5	+89,8	87,2	+48,5	0,542
48′	93,5	92,0	92,7	+90,5	88,2	+49,5	0,547
49′	93,5	91,5	92,5	+90,0	88,0	+49,2	0,546
53′	85,0	83,5	84,3	+75,2	79,2	+40,4	0,540
54′	85,5	84,0	84,7	+76,0	80,0	+41,2	0,542
56′	80,0	79,0	79,5	+66,0	74,5	+35,6	0,541
57′	80,5	79,5	80,0	+67,0	75,0	+36,1	0,541
11h 00′	75,0	74,0	74,5	+55,5	69,0	+30,1	0,542
1′	75,5	74,5	75,0	+56,7	70,0	+31,0	0,547
4′	72,0	71,2	71,6	+49,0	65,2	+26,8	0,538
5′	73,0	72,0	72,5	+51,2	66,8	+27,9	0,543
9′	77,0	75,5	76,3	+59,1	70,8	+31,9	0,540
13′	69,0	68,5	68,7	+42,7	62,1	+23,2	0,541
	70,0	69,2	69,6	+45,2	63,6	+24,7	0,547
17′	67,0	66,2	66,6	+38,1	59,7	+20,8	0,546
18′	68,0	67,2	67,6	+40,5	61,0	+22,1	0,547
30′	69,0	67,5	68,2	+41,9	61,7	+22,8	0,545
31′	69,0	67,7	68,3	+42,0	61,7	+22,8	0,544
35′	64,0	63,5	63,7	+31,7	56	+17,1	0,541
36′	64,5	63,8	64,1	+32,6	56,6	+17,7	0,542
40′	60,0	59,5	59,7	+22,7	51,0	+12,2	0,537
41′	61,0	60,5	60,7	+25,0	52,3	+13,4	0,538
	Entladestrom 0 Volt.						
12h 53′5	13,0	19,0	16,0	−74,8	−1,5	−40,3	0,541
55′	17,8	22,8	20,3	−66	+3,0	−35,7	0,542
	21,0	25,0	23,0	−60,5	+5,3	−33,4	0,550
58′	25,0	28,5	26,7	−52,7	10,3	−28,5	0,542
1h 0′	26,5	29,5	28,0	−50,0	12	−26,8	0,536
	31,0	32,8	31,9	−41,7	15,8	−23,0	0,550
	31,0	33,0	32,0	−41,3	16,0	−22,8	0,550
	35,0	36,0	35,5	−33,6	20,7	−18,0	0,537
4′	34,0	36,0	35,0	−34,8	19,6	−18,9	0,542
	34,0	36,0	35,0	−34,8	20,0	−18,7	0,538
7′	39,0	39,8	39,4	−24,7	25,2	−13,5	0,547
10′	38,0	39,2	38,6	−26,3	24,5	−14,1	0,538
	43,0	43,5	43,25	−15,5	30,5	− 8,2	0,532
	45,0	45,0	45,0	−11,5	32,5	− 6,2	0,539

Tabelle 8 (Fortsetzung).

Zeit	Hankel-Elektrometer v.d.Strom-mess.	Hankel-Elektrometer n.d.Strom-mess.	Hankel-Elektrometer Mittel	Potent.-Diff. in Volt v	Stand d. Thomson-El. nach 10 Sek.	Strom-stärke in Skt. i	i/V
			Ladestrom +100 Volt.				
	90,8	85,0	87,9	+81,7	82,8	+43,4	0,533
5h 27′	71,0	68,0	69,5	+44,7	63,2	+24,2	0,540
	70,0	67,5	68,7	+42,6	62,5	+23,5	0,540
	69,0	66,7	67,8	+40,2	61,0	+22,0	0,543
	62,0	60,7	61,3	+26,8	53,8	+14,7	0,550
33′	64,0	62,0	63,0	+30,0	55,7	+16,6	0,553
52′	54,0	53,8	53,9	+ 9,3	44,1	+ 5,0	0,539
	56,0	55,3	55,7	+13,6	46,3	+ 7,2	0,545
	53,0	52,9	52,95	+ 7,0	42,7	+ 3,7	0,530
	53,0	52,9	52,95	+ 7,0	42,8	+ 3,8	0,543
			Entladestrom 0 Volt.				
	8,0	16,5	12,3	−82	−5,7	−44,5	0,542
	14,0	21,0	17,5	−71,8	−0,5	−39,2	0,546
	30,0	31,0	30,5	−44,5	14,4	−24,2	0,543
	26,0	30,0	28,0	−50,0	11,0	−27,5	0,550
	35,0	36,0	35,5	−38,6	20,3	−18,3	0,543

die Stromstärke für den Polarisationsstrom 19 Skt. betrug, was einer Polarisation von $\frac{19}{80}\ 100 = 24$ Volt entsprach. Die Übereinstimmung ist also hier so gut, wie es die vorhandenen Fehlerquellen zulassen.

Endlich sei noch eine Tab. 4 angeführt, die sich auf Quarz bezieht. Wie man sieht, bleibt auch hier die Leitfähigkeit $i/V - P$ für den Ladeversuch konstant. Später werden wir sehen, daß bei dem Entladevorgang noch andere Erscheinungen im Spiele sind; da wird auch der entsprechende Entladeversuch angeführt.

Es ist somit bewiesen, daß während des Stromdurchgangs eine Polarisation gebildet wird, die in den angeführten Versuchen auch die alleinige Ursache für die Stromabnahme war. Dieser Vorgang hatte keinen Einfluß auf den eigentlichen Widerstand des Materials, welcher unverändert blieb. Es gibt, wie wir sehen, zwei Wege diesen Widerstand jederzeit zu messen. Entweder, wie es in oben angeführten Tabellen geschehen, durch direkte Messung der Polarisationsspannung, oder durch

Tabelle 4.

Quarz ⊥ Achse.

Graphitbelegung: 28,5 × 28,5 mm; Dicke: 7,45 mm Zusatzkapazität 0,15 MF. Ladestrom +100 Volt. $t = 87{,}8°$.

Hankelsches Elektrometer I	II	Mittel	Pot.-Diff. in Volt $V-P$	Stromstärke i	$i/V-P$
98	95	96,5	+97	+77	0,80
97	94,5	95,7	+96	+75	0,78
94	92	93	+93	+71	0,76
90	89	89,5	+87	+69	0,79
93	91	92	+91	+75,5	0,83
94	92	93	+93	+76	0,80
90	89	89,5	+87	+71	0,80
97	85,5	86,3	+83	+69,5	0,83
88,5	86,5	87,5	+84	+69,5	0,82
85	83,5	84,3	+79	+64	0,81
80	79	79,5	+71	+58,5	0,82
78	77	77,5	+66,5	+54	0,81
75	74	74,5	+60,5	+51	0,84
72	72	72	+55	+45	0,82
72	72	72	+55	+44	0,80

Messen der Stromzunahme Δi, die eine Potentialänderung ΔV hervorruft. Das Verhältnis $\Delta i/\Delta V$ mißt die Leitfähigkeit unabhängig von der vorhandenen Polarisation.

Temperaturkoeffizient.

Die Leitfähigkeit aller untersuchten Kristalle hat einen sehr hohen Temperaturkoeffizienten: bei 100° C ist die Leitfähigkeit schon etwa $3 \cdot 10^4$ größer als bei 0° C. Durch Wahl der Temperatur haben wir es in der Hand, die Leitung in weitesten Grenzen zu beschleunigen oder zu verlangsamen. Die Leitung ist, wie weiter nachgewiesen wird, elektrolytisch. Der Temperatureinfluß ist daher auf zwei Ursachen zurückzuführen: 1. Auf eine Dissoziation der Bestandteile des Kristalls durch Temperaturbewegung — d. h. auf eine Erhöhung der Zahl solcher Ionen, die nicht im Kristall gebunden sind, sondern frei der äußeren elektrischen Kraft folgen, und 2. auf eine Vergrößerung der Beweglichkeit der Ionen, die auch ihrerseits vielleicht mit der Anzahl der gelockerten Gitterpunkte verknüpft ist.

Von dieser Vorstellung ausgehend kann man versuchen, die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit σ durch die

Formel für die Dissoziationskonstante der Gase — die van't Hoffsche Isochorengleichung darzustellen:

$$\log \sigma = \frac{A}{T} + B.$$

Diese Formel ist jedenfalls eine gute Interpolationsformel, wie folgende Fig. 3 zeigt, wo $1/T$ als Abszisse, $\log \sigma$ als Ordinate aufgetragen sind. Verschiedene Kristalle (Kalkspat, Quarz, Alaune, Kupfervitriol) und verschiedene kristallographische Richtungen geben immer in diesem Diagramm gerade Linien und zwar merkwürdigerweise mit wenig verschiedener Neigung. Die Konstante A, die in der Dissoziationsgleichung die Dissoziationswärme darstellt, ist hier etwa $-1{,}1 \times 10^4$. In der Fig. 3 stellen die Geraden I, II, III die Leitfähigkeit von Quarz $\perp$ zur Achse dar; die Gerade IV gilt für Quarz $\parallel$ zur Achse; V für Kalkspat und VI für Ammoniumalaun.

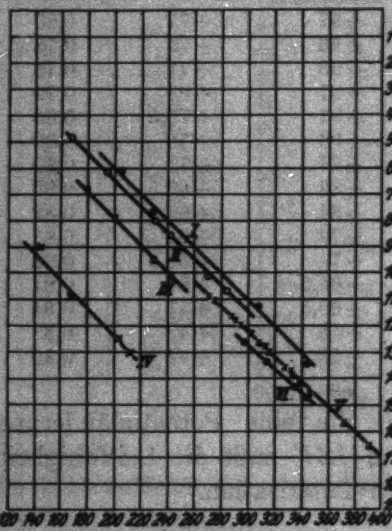


Fig. 3.

Eine Ausnahme mit viel kleinerem, aber meist positivem Temperaturkoeffizient bilden Kristalle, in welchen Elektronenleitung vermutet und auch durch die Anwesenheit des Hallschen Effekts nachgewiesen ist (belichtetes Steinsalz, wahrscheinlich auch Schwefel). Nähere Angaben über den Mechanismus des Temperatureinflusses sind in dem Abschnitt über Quarz und über Bestrahlungseinfluß enthalten.

Polarisation.

Der hohe Betrag von einigen tausend Volt, welchen die bei Stromdurchgang in Kristallen entstehende elektromotorische Gegenspannung erreicht, schien auszuschließen, sie für eine galvanische Polarisation zu halten. Um Aufklärung über das Wesen der Polarisation zu erlangen, war es vor allem wichtig,

den Sitz dieser Polarisation im Kristall festzustellen. Es hat sich dabei gezeigt, daß man in dieser Beziehung mit zwei verschiedenen Typen zu tun hat, deren beste Repräsentanten Kalkspat für den ersten und Quarz für den anderen sind. Es empfiehlt sich deshalb, sie auch gesondert zu behandeln.

I. Kalkspat.

Die erste Methode (nach Warburg), welche klare Resultate lieferte, bestand in der Entfernung durch Abschleifen oder Auflösung einer dünnen Schicht, die an die Elektroden grenzte. Eine Kalkspatplatte wurde so lange geladen, bis eine Polarisation von etwa 100 Volt entstand. Schleift man dann eine Schicht von der Anodenseite des Stromes ab, so ändert sich der Betrag der Polarisation nicht im geringsten. Dagegen genügt es, eine Kathodenschicht von etwa 0,01 mm Dicke zu entfernen, um die ganze Polarisation wegzubringen. Wir haben uns durch systematische Versuche überzeugt, daß weder die Art der Belegung, noch die Reihenfolge der Abschleifversuche eine Bedeutung hatten; ebensowenig Einfluß hatte eine Entfernung der Belegung, Reinigung und Abspülen der Platte. Es ist somit festgestellt, daß beim Stromdurchgang die ganze Polarisation in einer dünnen ($< 0{,}01$ mm) Schicht an der Kathode sitzt.

Läßt man auch den Polarisationsstrom, der ja entgegengesetzt gerichtet ist, eine Zeit lang fließen, so vermindert sich allmählich die Polarisationsspannung. Gleichzeitig wird aber eine neue Polarisation gebildet an der Seite, die jetzt Kathode, d. h. bei dem Ladestrom Anode war. Das geht so lange, bis der Rest der alten Polarisation an der früheren Kathode und die neu gebildete Polarisation an der früheren Anode die gleiche Spannung besitzen. Dann fließt kein Polarisationsstrom mehr durch die Platte; aber nicht deshalb, weil die Polarisation verschwunden ist, sondern weil an den Enden der Platten zwei entgegengesetzt gleiche Polarisationsspannungen anliegen. In der Tat: wurde jetzt die eine Seite abgeschliffen, so erhielt man einen Polarisationsstrom in der einen Richtung; beim Abschleifen der anderen Seite — in entgegengesetzter Richtung. Als wir bei einer solchen durch Ladung und Entladung mit Polarisation an beiden Seiten behafteten Platte auf die

Seitenflächen zwischen Anode und Kathode eine Zwischenelektrode anbrachten und diese mit einem Hankelschen Elektrometer verbanden, so erhielten wir in der Mitte eine Spannung von 19 Volt, während beide Elektroden an der Erde lagen.

Anschließend an diese Abschleifversuche haben wir auch eine direkte Messung der Potentialverteilung im Inneren bei Stromdurchgang vorgenommen. Wir schickten dabei den Strom in der Längsrichtung der Platte durch. Senkrecht zur Stromrichtung zeichneten wir auf der Platte Graphitstreifen von etwa 0,5 mm Breite auf, die als Zwischenelektrode dienten und mit Elektrometern verbunden waren. Wurden darauf an die Platte 100 Volt angelegt, so zeigte sich, daß im ersten Moment die durch diese Sonden angezeigte Potentialverteilung eine von 0 auf 100 Volt ansteigende Gerade war, wie es im statischen elektrischen Feld zu erwarten war. Diese Übereinstimmung beweist, daß die Sonden keine Störung in die Potentialverteilung hineinbringen und daß die Platte durch die ganze Länge dieselbe Leitfähigkeit besitzt.

Mit der Zeit änderten sich die Angaben der Elektrometer, und zwar so, daß zu jeder Zeit die Potentialverteilung eine Gerade blieb; nur hat sich ein Potentialsprung an der Seite ausgebildet, welche als Kathode diente. Wurde also mit + 100 Volt aufgeladen, so stiegen alle Elektrometerangaben, bis sie alle nahezu 100 Volt erreichten und fast der gesamte Potentialbfall von 0 auf 100 Volt zwischen der Kathode und der ersten Sonde (etwa 1,8 mm) blieb. Wurde statt dessen mit — 100 Volt geladen, so gingen alle Elektrometer fast auf 0 Volt zurück und der ganze Potentialsprung war jetzt auf der anderen Seite, die nun Kathode war. In der Fig. 4 ist links für diesen letzten Fall die Potentialverteilung zu verschiedenen Zeitpunkten aufgezeichnet. Die Temperatur betrug ungefähr 150° C. Dieselben Messungen bei Entladestrom bestätigten die Bildung zweier Potentialsprünge in beiden Elektroden. Schließlich hat man im ganzen Inneren der Platte einen immer kleineren Potentialabfall; an den Elektroden bleiben aber zwei entgegengesetzte Potentialsprünge. In der Fig. 4 sind die Messungen zu bestimmten Zeitpunkten nach Anlegung einer Spannung von — 100 Volt (links oben), darauf 0 Volt (links unten), dann + 100 Volt (rechter Teil oben) und wieder 0 Volt (rechts

unten) aufgetragen. Links oben ist in der Figur die Verteilung der Sonden angegeben. Durch dicke Striche an den Enden sind die Potentialsprünge zum Schluß jedes Versuchs bezeichnet.

Eine Folgerung können wir sofort aus dieser Art der Polarisationsbildung ziehen: von Curie wurde für die Kristallleitung das Superpositionsprinzip aufgestellt. Nach diesem

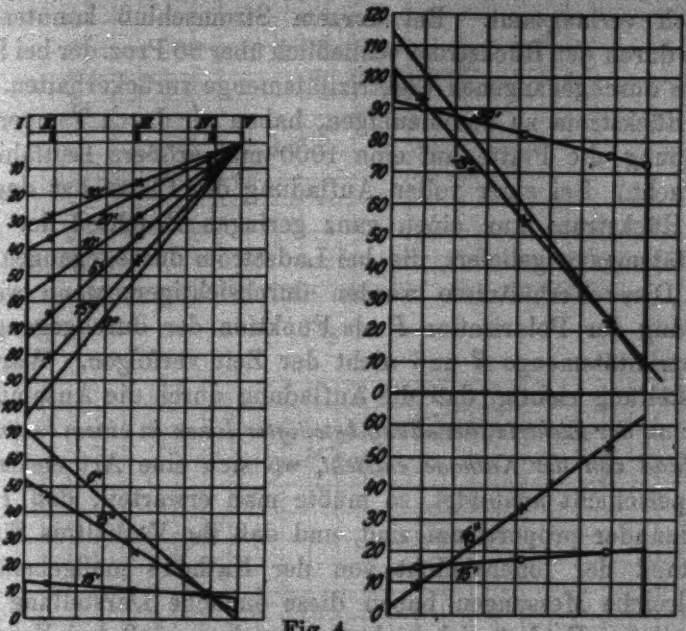


Fig. 4.

Prinzip kann man den Stromverlauf nach jeder Potentialänderung konstruieren, indem man der Fortsetzung der ersten Stromkurve diejenige superponiert, die die Potentialänderung allein hervorbringen sollte. Für nicht zu große Ladungszeiten hat sich das Prinzip mit großer Präzision bewährt. Doch sieht man, daß es nicht allgemein gelten kann. Es müßte nämlich nach diesem Prinzip bei vollausgebildeter Polarisation, wo der Ladestrom Null geworden ist, der Polarisationsstrom die Umkehrung des Ladestroms sein. Da bei Ladestrom allein eine Bildung der Polarisation an der Kathode, bei Rückstrom aber ein Verschwinden auf der einen und eine gleichzeitige Bildung auf der anderen Seite vor sich geht, können die Geschwindigkeiten, mit welchen die Stromstärken in beiden so verschiedenen Fällen abnehmen, nicht gleich sein. Wie zu erwarten war,

hat sich auch gezeigt, daß bei stark ausgebildeter Polarisation der Polarisationsstrom viel rascher abnimmt, als der Ladestrom.

Eine andere Folge des Superpositionsprinzips wäre die, daß durch den Polarisationsstrom ebensoviel Elektrizität aus dem Kristall auswandert, wie bei Ladestrom eingewandert ist — allerdings bei kleinerer Potentialdifferenz und deshalb asymptotisch verlangsamt. Bei kurzem Stromschluß konnten wir auch durch den Rückstrom schließlich über 80 Proz. der bei Ladestrom durchgegangenen Elektrizitätsmenge zurückerhalten. (Um den Rückstrom zu beschleunigen, haben wir durch Temperaturerhöhung die Platte auf eine 1000 mal größere Leitfähigkeit gebracht.) Bei einer vollen Aufladung der Platte hat dagegen der Rückstrom nur einen ganz geringen Bruchteil der Elektrizitätsmenge geliefert, die bei Ladestrom durchgegangen war.

Diese Verhältnisse werden durchsichtiger, wenn wir die Bildung der Polarisation P als Funktion der durchgegangenen Elektrizitätsmenge E und nicht der Zeit verfolgen. Wäre die Vorstellung richtig, daß die Aufladung durch die Ansammlung *aller an der Elektrizitätsleitung beteiligter Ionen in einem bestimmten Abstand von der Kathode entsteht*, wo sich eine Art elektrische Doppelschicht ausbildet, so müßte man erwarten, daß P und E einander proportional sind, und daß ihr Verhältnis für den Abstand der Ionenschicht von der Kathode maßgebend ist. Zahlreiche Messungen haben diese einfache Darstellung nicht bestätigt. Es hat sich vielmehr ergeben, daß bei Vergrößerung der durchgegangenen Elektrizitätsmenge, die Polarisation immer verhältnismäßig langsamer wächst, als ob ein Teil der Ionen mit der Zeit aus dem Kristall herausgeht oder durch Diffusion zurückgeht. Vergrößert man die Geschwindigkeit der Polarisationsbildung durch Vergrößerung der Spannung oder Erhöhung der Temperatur, so wird der Potentialanstieg auch steiler — es gehört weniger Elektritätsmenge dazu, um dieselbe Spannung zu erzeugen. Wie auch nicht anders zu erwarten war, ist der Polarisationsanstieg für den Rückstrom oder nach Stromumkehr steiler als für den ersten Ladestrom, weil ja dabei dieselbe Elektrizitätsmenge auf der einen Seite die Polarisation vermindert unter gleichzeitiger Bildung auf der anderen Seite. In der Fig. 5 ist eine der Kurven $P = f(E)$ bei 18° C und in Fig. 6 für 81° C dargestellt.

Für die Dicke der elektrischen Doppelschicht erhält man deshalb aus diesen Versuchen *je nach dem gewählten Zeitpunkt nach dem Anlegen der Spannung verschiedene Werte; legt man*

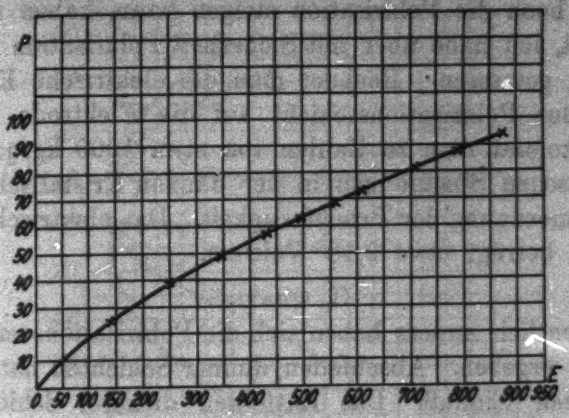


Fig. 5.

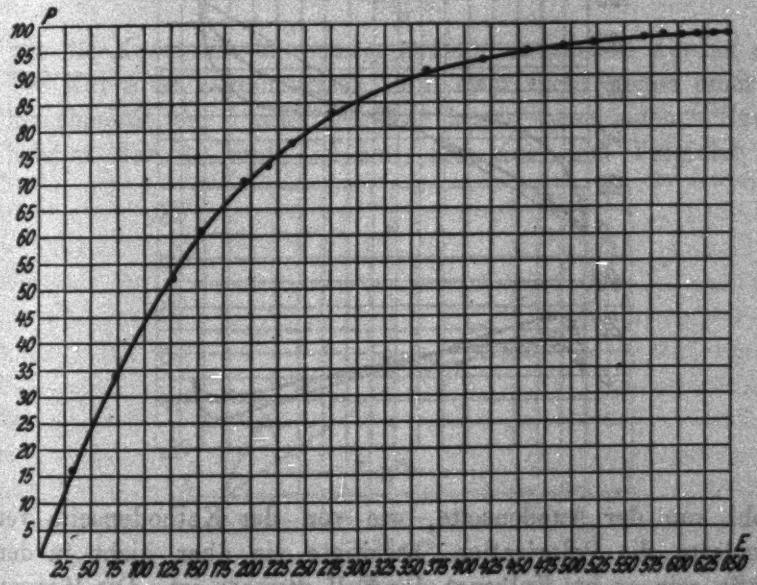


Fig. 6.

die Anfangsverhältnisse zugrunde, so ergibt eine Überschlagsrechnung für den Abstand der Ionen von den Elektroden — etwa $4 \cdot 10^{-4}$ mm — eine halbe Wellenlänge des Lichts. Es scheint, daß man an dieser Doppelschicht eine Art stehende Lichtwelle

beobachten kann. Im auffallenden Lichte sieht man an der polarisierten Kathode eine deutliche bräunliche Färbung, die an die Farbe dünner Blättchen erinnert.

Wie hoch die Polarisation steigen kann, haben wir nicht untersucht, ich habe aber mit Sicherheit Polarisation von über 7000 Volt gemessen. Rechnet man die elektrische Kraft aus, die von der Polarisationsschicht auf die Elektrode ausgeübt wird, so kommt man zu Zahlen von etwa 1000 kg/qcm, d. h. zu elektrischen Spannungen in der dünnen Kristallschicht von der Größenordnung der Bruchfestigkeit. Das elektrische Potentialgefälle beträgt etwa $2{,}10^8$ Volt/cm.

II. Quarz.

Wesentlich anders haben sich die Polarisationsverhältnisse bei Quarz ergeben. Abschleifen dünner Schichten hatte keinen wesentlichen Einfluß. Das Entfernen dickerer Schichten so-

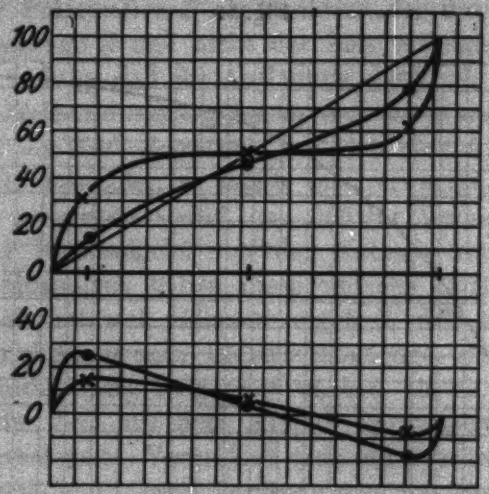


Fig. 7.

wohl von der Anodenseite, wie von der Kathodenseite verminderte die Polarisation, beseitigte sie aber nicht in dem Maße, wie es bei Kalkspat der Fall gewesen ist. Die Messung der Potentialverteilung im Inneren, die auch hier gelingt, wenn man sehr dünne (0,2—0,5 mm) Quarzplatten nimmt, hat auch ergeben, daß die Polarisationsspannung in recht dicken Schichten in der Nähe der Elektroden räumlich verteilt ist. Vorstehende Fig. 7 zeigt die allmähliche Ausbildung der Polarisation. Die

gekrümmten Teile der Kurven geben die Stellen an, wo räumliche Ladung angehäuft ist. In der ersten Zeit nach Stromschluß erhalten wir die geradlinige statische Potentialverteilung,

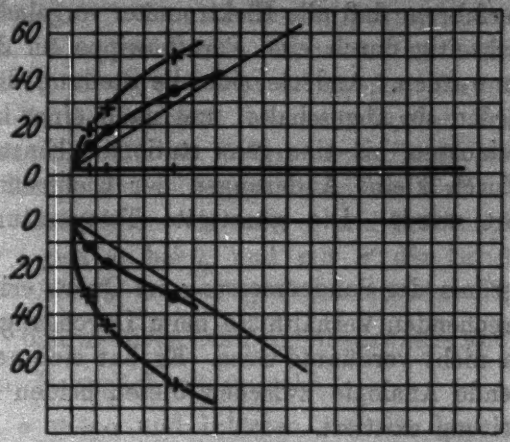


Fig. 8.

was als Kontrolle der Sondenmethode angesehen werden darf. Die Kurve ist asymmetrisch, und zwar nicht wegen einer Inhomogenität der Platte, sondern wegen verschiedener Beweglichkeit der +- und —-Ionen, was aus dem Vergleich der

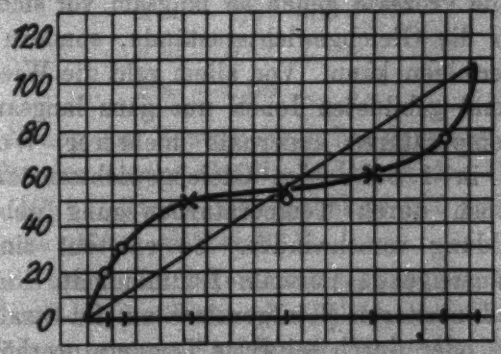


Fig. 9.

Polarisation an derselben Stelle für entgegengesetzte Stromrichtungen (Fig. 8) zu ersehen ist.

Die Potentialverteilung während des Polarisationsstromes gibt die untere Kurve der Fig. 7 wieder. In der Fig. 9 sind die Messungen mit mehr Sonden an einer Platte aufgetragen. Die Sondenmessung ist bei Quarz recht schwierig wegen zu

rascher Polarisationsbildung in der Richtung senkrecht zur Hauptachse, wo die Sonden angelegt sind. Schon der schwache Ladestrom des Elektrometers verzerrt das Bild. Es wurde deshalb so verfahren, daß alle Elektrometer vorgeladen wurden und alle gleichzeitig durch eine Paraffinwippe an die Sonden angeschlossen wurden. Änderte sich die Stellung der Elektrometer, so wurden sie abgeschaltet und nach einer kurzen Zeit wieder angeschlossen, bis eine ganz stationäre Einstellung sich ergab, die durch kleine Änderungen der Elektrometerladung nicht geändert wurde. Die günstigste Temperatur war um 150° C.

Das Ergebnis der Sondenmessung im Quarz erinnert sehr an die entsprechenden Verhältnisse beim Durchgang der Elektrizität durch nicht verdünnte Gase. Es hat sich gezeigt, daß eine weitgehende Analogie zwischen diesen beiden Fällen der Elektrizitätsleitung existiert.

Ionengleichgewicht im Quarz.

Die Untersuchung der Leitung im Quarz ist von großem Interesse, weil an diesem Material die Erscheinung der elektrolytischen Dissoziation der Kristalle besonders bequem zu studieren ist. Alle Prozesse gehen so langsam vor sich, daß man hier nicht nur die Gleichgewichtszustände, sondern auch ihre Entstehung verfolgen kann. Vor allem geht die Wiedervereinigung der einmal gebildeten Ionen nur ganz langsam vor sich (bei Zimmertemperaturen innerhalb mehrerer Wochen, bei 100° C etwa in 1 Std.). Im Gleichgewichtszustand werden ebensoviel Ionen durch Temperaturbewegung gebildet, wie durch Rückbildung verschwinden. So entsteht eine mit der Temperatur ansteigende normale Leitfähigkeit. Sobald aber durch äußere Ionisatoren (Röntgenstrahlen, Ra-Strahlen, ultraviolettes Licht) oder durch zeitweise Temperaturerhöhung überschüssige Ionen gebildet werden, erscheint die Leitfähigkeit auch nachträglich erhöht und geht nur ganz langsam auf den Normalwert zurück. Hr. A. Schaposchnikoff konnte zeigen, daß die Gesetze, nach denen die Rückkehr in den Normalzustand fortschreitet, für alle verschiedenen Einflüsse dieselben sind.

Diese Eigenschaft des Quarzes erlaubt es, die Änderung

der Dissoziation von der Änderung der Beweglichkeit zu trennen. Durch rasche Abkühlung eines Kristalles von 100° C auf 0° C kann man einen Quarz erhalten, dessen Dissoziation noch 100° C entspricht, in dem die Beweglichkeit aber dieselbe wie bei 0° C ist. Vergleicht man damit den normalen Quarz bei 100° C und bei 0° C, so ist es leicht, den Einfluß der Dissoziation auf die Leitfähigkeit von dem Einfluß der Beweglichkeit zu trennen. Hr. A. Schaposchnikoff hat auf diese Weise die Temperaturabhängigkeit beider Einflüsse gesondert untersucht. Bezeichnen wir mit σ_1 die Leitfähigkeit bei der Temperatur t, mit σ_2 bei t_2 und mit σ' die Leitfähigkeit der durch rasche Abkühlung auf t_2 abgeschreckten Platte, so gibt $\alpha = \frac{\sigma' - \sigma_2}{\sigma_2}$ den relativen Dissoziationszuwachs und $\lambda = \frac{\sigma_1 - \sigma'}{\sigma'}$ den relativen Beweglichkeitszuwachs.

Sowohl σ wie α und λ lassen sich in dem untersuchten Intervall 0—100° C durch die Formel

$$\log f = \frac{A}{T} + B$$

darstellen. Die Konstante A hat dann für die drei Größen folgende Werte:

$$A = -1{,}07 \text{ für } \sigma,$$
$$A = -0{,}42 \text{ „ } \alpha,$$
$$A = -0{,}58 \text{ „ } \lambda.$$

Die Änderung der Beweglichkeit hat demnach eine größere Bedeutung für den Quarz als die Änderung des Dissoziationsgrades. Bei 100° C ist die Beweglichkeit 200 mal, die Dissoziation 100 mal größer als bei 0° C.

Aus den Kurven der Potentialverteilung (Fig. 7) sieht man, daß der Strom in der Nähe der Elektroden Ionenladungen eines Vorzeichens ansammelt. Diesen Ionen ist jede Möglichkeit genommen, sich wieder zu vereinigen, da beide Arten der Ionen in räumlich getrennten Stellen festgehalten werden. Diese Ionen kommen als Überschuß zu den durch Temperaturgleichgewicht bedingten hinzu. Auf die Stromstärke haben sie zunächst keinen großen Einfluß, weil sie schon in die Nähe der entsprechenden Elektroden angekommen sind und sich nicht wesentlich an dem Strom beteiligen. Kehrt man aber die

Stromrichtung um, so sind sie sofort für den elektrischen Strom frei, indem sie durch den ganzen Kristall auf die andere Seite wandern. In dieser Zeit ist die Leitfähigkeit vergrößert. Dies folgt auch ganz überzeugend aus folgender Tabelle der Polarisationsmessung, die eine Fortsetzung der Tabelle S. 471 darstellt; die Leitfähigkeit ist in der letzten Kolumne angegeben.

Tabelle 5.

Rauchquarz.

Zusatzkapazität zum Elektrometer 0,05 MF.

100 Volt. — $t = 22{,}5°$ C.

Hankelsches Elektrometer			Potentialdifferenz	Stromstärke	
I	II	Mittel	$V - P$	i	$i/V - P$
26	23	24,5	+ 68	+ 43	0,63
23,2	21	22,1	+ 59	+ 39	0,66
21,5	18	19,7	+ 51	+ 35	0,68
20	17	18,5	+ 46	+ 30	0,63
18,5	15	16,7	+ 41	+ 28	0,68
16,8	13	14,9	+ 36	+ 24	0,67
15,5	12	13,7	+ 33	+ 22,5	0,68
14	11	12,5	+ 29	+ 19,5	0,67
12,7	9,5	11,2	+ 26,5	+ 18,0	0,68
11,7	9,0	10,3	+ 24	+ 16	0,67
11,0	8,0	9,5	+ 22	+ 14	0,64
9,8	7,5	8,7	+ 20	+ 13	0,65
9,0	7,0	8,0	+ 18,5	+ 11,5	0,62
8,0	6,5	7,3	+ 17	+ 10,5	0,62
7,0	5,5	6,3	+ 15	+ 9,3	0,62
6,5	5,2	5,9	+ 14,0	+ 9,3	0,69
5,5	4,3	4,9	+ 11,0	+ 7,4	0,67
7,0	5,5	6,3	+ 15	+ 9,4	0,63
7,2	5,5	6,4	+ 15	+ 9,5	0,63
5,0	4,0	4,5	+ 10,2	+ 6,5	0,64
Zur Erde O	V		P	i	i/P
− 21	− 17	− 19	− 47	− 46	0,98
− 17	− 13,5	− 15,3	− 38	− 32	0,85
− 14	− 11,5	− 12,7	− 29	− 23,5	0,81
− 11,8	− 9,7	− 10,7	− 24	− 19	0,80
− 10	− 8	− 9,0	− 20	− 15,5	0,77
− 8,8	− 7,2	− 8,0	− 17,5	− 13,0	0,74
− 7,7	− 6,2	− 7,0	− 15,0	− 10,8	0,72
5,5	4,5	5,0	− 10,7	− 7,8	0,72
− 4,5	− 3,5	− 4,0	− 8,5	− 6,0	0,70
− 4,0	− 2,2	− 3,6	− 7,0	− 5,2	0,74

Tabelle 5 (Fortsetzung).

Hankelsches Elektrometer I	II	Mittel	Potentialdifferenz $V-P$	Stromstärke i	$i/V-P$
	+ 100 V				
24,2	21,5	22,8	+ 62	+ 49,5	0,80
20	16	18,0	+ 44,4	+ 34	0,76
17,2	14	15,6	+ 38	+ 25	0,66
15	12	13,5	+ 32	+ 21	0,66
13	10,3	11,7	+ 26,5	+ 17,5	0,95
12	9,5	10,7	+ 24,5	+ 16	0,65
9	7	8,0	+ 18,0	+ 10,6	0,60
6	5	5,5	+ 13,0	+ 7,5	0,60
7,5	6	6,8	+ 16	+ 9,7	0,61
7,0	5,2	6,1	+ 14,5	+ 8,8	0,61
Zur Erde $0\,V$			P	i	i/P
− 20	− 16,5	− 18,2	− 45	− 38	0,85
− 15	− 12	− 13,5	− 31	− 24	0,78
	+ 100 V		$V-P$	i	$i/V-P$
+ 19	+ 15,5	+ 17,3	+ 42	+ 31,5	0,75

Durch langdauernden Strom kann die Leitfähigkeit um das Vielfache vergrößert werden. Sind dann die überschüssigen Ionen wieder durch den ganzen Kristall gleichmäßig verteilt, so beginnt die Wiedervereinigung, die mit einer Leitfähigkeitsverminderung Hand in Hand geht. In folgender Tab. 6 ist die Erhöhung der Leitfähigkeit durch den Strom und der Rückkehr zum Normalzustand für einen Fall dargestellt. I bedeutet den Ausschlag des Elektrometers in 15″; τ Zeit nach Anlegung der Spannung.

Die hohe Leitfähigkeit, die durch Bestrahlung, Temperaturnachwirkung oder Stromdurchgang im Quarz erzeugt werden kann, beruht auf einem Überschuß von Ionen, die durch den Strom verbraucht werden. Es ist aus diesem Grunde verständlich, daß in diesen Fällen die Stromabnahme mit der Zeit rascher vor sich geht, als in den Fällen, wo dieselbe große Leitfähigkeit durch Temperaturerhöhung erreicht wird. Bei künstlicher Leitfähigkeitserhöhung haben wir nämlich zwei Ursachen der Stromabnahme mit der Zeit: eine Polarisationsbildung und eine Abnahme der Ionenzahl auf die Normalzahl,

Tabelle 6.

Quarz V ⊥ zur Achse.

Belegung 270 qmm, Dicke etwa 2 mm.

Kapazität von Platte und Elektrometer 200 cm.

− 100 V.		τ	I	t°
17. II.	5h 30′	5″	−133	18,5
		30″	− 90	
		1′	− 80	
		2′	− 84	
		3′	− 82	
		5′	− 80	18,5
		15′	− 80	18,5
		30′	− 80	18,5
	7h	1h 30′	− 80	18,9
	8h 30′	3h	− 75	18,5
	11h 30′	6h	− 77	18,6
18. II.	10h 50′	17h	− 87	18,6
	12h 30′	19h	− 83	18,4
	4h 30′	23h	− 86	18,7
0 V.		τ	I	
18. II.	4h	5″	+ 245	18,6
		30″	+ 140	
		1′	+ 110	
		2′	+ 90	
		3′	+ 80	
		5′	+ 70	
		15′	+ 40	18,6
	5h 10′	30′	+ 27	18,7
		1h	+ 17	18,8
	6h 40′	2h	+ 10	18,6
− 100 V.		τ	I	
18. II.	6h 45′	5″	− 300	18,6
		30″	− 200	
		1′	− 160	
		2′	− 140	
		3′	− 130	
		5′	− 127	
18. II.	7h 30′	45′	− 95	18,6
23. II.	12h	118h	− 62	17,8
			− 67	18,4
			− 105	21,5
	5h 15′	118h	− 87	20,2
24. II.		136h	− 65	18,0
	11h 50′		− 69	18,4
24. II.	11h 51′	5″	+ 300	18,4
		30″	+ 180	18,4
		20′	+ 38	18,8
	12h 31′	40′	+ 25	19,0

Tabelle 6 (Fortsetzung).

− 100 V.		τ	I	
24. II.	$12^h\,32'$	5″	− 500	19,0
		30″	− 250	
0 V.		τ	I	
	$12^h\,33'$	5″	+ 170	19,0
		1′	+ 55	
		2′	+ 41	
		5′	+ 30	
+ 100 V.		τ	I	
	$12^h\,40'$	5″	+ 450	19,0
		30′	+ 300	
		1′	+ 280	
− 0 V.		τ	I	
	$4^h\,00'$	3^h	+ 9	20,0
− 100 V.		τ	I	
	$4^h\,00'$	5″	- 400	
		30″	− 270	
0 V.		τ	I	
	$4^h\,02'$	5′	+ 15	
+ 100 V.		τ	I	
	$4^h\,08'$	5″	+ 350	
		30″	+ 270	

während in normalen Platten die Polarisation die alleinige Ursache der Stromabnahme ist. In den Fällen, wo im Kristall ein Überschuß an freien Ionen gegen Normalzustand vorhanden ist, wird für diese Ionen leicht der Sättigungsstrom erreicht, während die sich normal bildenden Ionen noch imstande sind, die durch den Strom weggeführten zu ersetzen, und so die Proportionalität zwischen Stromstärke und angelegter Spannung zu erhalten. In diesem Fall hat man für die erste Zeit nach Stromschluß eine Art Sättigungsstrom, während für die spätere Zeit, wo die zufälligen Ionen entfernt sind — das Ohmsche Gesetz gilt. Für hohe Spannungen wächst sogar die Stromstärke mit der Zeit, weil die +- und —-Ionen durch den Strom in großer Anzahl in den Polarisationsschichten getrennt an-

gesammelt, den Strom vergrößern. In nachfolgender Tabelle ist ein entsprechender Versuch mit dem vorher mit ultraviolettem Licht bestrahlten Quarz V angeführt.

Tabelle 7.

Quarz V ⊥ Achse (vgl. oben).

	100 Volt 20,6°	300 Volt 20,6°	1000 Volt 21,0°	1900 Volt 21,0°
2″—17″	150	205	270	310
30″—45″	61	97	205	270
1″—1′15″	40	61	175	260
1′30″	28	41	143	250
2′	19	32	115	235
3′	12	27	90	215
4′	9,7	25	88	210
5′	8,5	24	88	220
7′	—	—	—	240

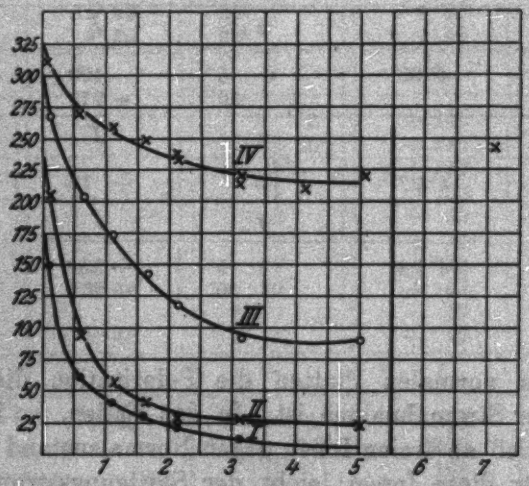


Fig. 10.

In den Kurven I—IV, Fig. 10, ist der Stromverlauf wiedergegeben und in Fig. 11 die Stromspannungskurve für 10″ und 5′ nach Stromschluß.

Die Vorstellung, die wir uns über Quarz gebildet haben, läßt die Erscheinung des Sättigungsstroms erwarten. Durch Temperaturbewegung wird pro Zeiteinheit eine bestimmte Anzahl Ionen frei. Ist die Spannung so hoch, daß die meisten Ionen weggeführt werden, bevor sie sich wieder-

vereinigt haben, so darf eine weitere Steigerung der Spannung die Stromstärke nicht mehr vergrößern können. In der Tat hat Hr. A. Schaposchnikoff die Annäherung an den Sättigungs-

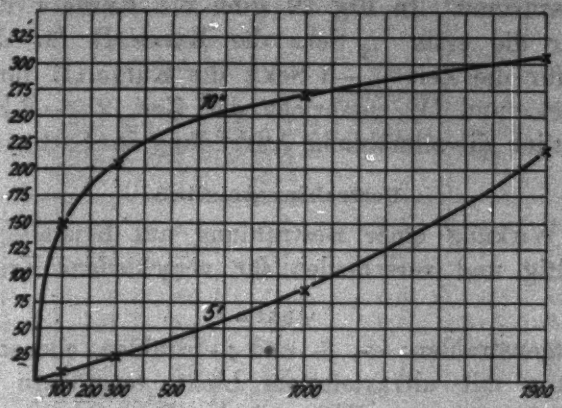


Fig. 11.

strom im Quarz bei Feldstärken von 10000—50000 $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ beobachtet. Während nun im Gas der stationäre Zustand, der dem Sättigungsstrom entspricht, sich innerhalb Bruchteile einer

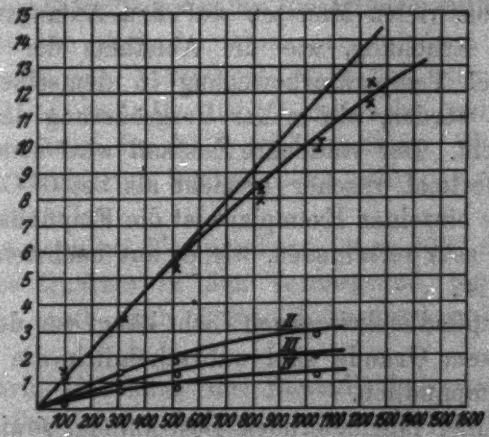


Fig. 12.

Sekunde einstellt, dauert dieser Vorgang im Quarz einige Sekunden. Sofort nach Stromschluß ist die Anzahl der freien Ionen im Quarz immer dieselbe, ihre Geschwindigkeit ist aber der angelegten Potentialdifferenz direkt proportional, so daß für die allererste Zeit ($^1/_2$ Sek.) das Ohmsche Gesetz noch

gilt. Erst allmählich werden die Ionen an die Elektroden geführt; da die Anzahl der neugebildeten Ionen unabhängig von der Spannung ist, so erreicht man schon nach 3 Sek. den Sättigungszustand. In Fig. 12 gibt die Kurve I die Stromstärke für die erste $^1/_2$ Sek., die Kurve II für die zweite $^1/_2$ Sek. (für die Zeit $^1/_2$—1 Sek.), die Kurve III für die Zeit $1^1/_2$—2 Sek. und IV entspricht der Zeit $2^1/_2$—3 Sek. Man sieht deutlich die allmähliche Ausbildung des Sättigungsstroms.

Bestrahlungseinfluß.

Die Wirkung einer Bestrahlung auf Kristalle ist recht mannigfaltig und verschieden für verschiedene Kristalltypen.

Quarz.

Röntgenstrahlen; α-, β- und γ-Strahlen ebenso wie eine Bestrahlung mit ultraviolettem Licht vergrößern die Leitfähigkeit der Quarze. Während der Bestrahlung wächst die Leitfähigkeit zunächst rasch, dann immer langsamer, indem sie einem stationären, der Intensivität der Strahlung entsprechendem Wert zustrebt. Nach Aufhören einer Bestrahlung beginnt auch die Leitfähigkeit zu sinken und geht asymptotisch im Laufe von vielen Monaten auf den Anfangswert zurück. Sowohl die Erhöhung, wie die Abnahme der Leitfähigkeit können durch Temperaturbewegung in demselben Verhältnis beschleunigt werden, wie es der Vergrößerung der Beweglichkeit entspricht. Der stationäre Zustand wird somit bei 100° C einige hundertmal rascher erreicht als bei 0° C (vgl. S. 481).

Für die einzelnen Exemplare ist die Empfindlichkeit gegen Bestrahlung sehr verschieden, wie es aus nachstehender Tab. 8 zu ersehen ist.

Die Empfindlichkeit gegen Licht hängt von der Absorption ab; aus diesem Grunde sind wahrscheinlich die Rauchquarze besonders empfindlich.

Nach einer langdauernden Bestrahlung, sowie nach einer starken Erhitzung kehrt der Quarz nicht mehr ganz in den Anfangszustand zurück. Meistens bewirkt jede starke Erhitzung eine irreversible Leitfähigkeitsverminderung. Eine lange Bestrahlung macht den Quarz immer weniger empfindlich gegen neue Bestrahlungen. Diese Erscheinungen lassen schließen, daß die Leitfähigkeit zum Teil durch Ionen einer dem Quarz

Tabelle 8.

106 Volt. Zusatzkapazität z. Quadr. Elektrom. 0,015 MF.

	1	2	3	4	5	6	
	Stromstärke in den ersten 5 Sek.			Vergrößerung bei Bestrahlung	Elektriz. durch Influenz	4/5	Verminderung bei Dunkelheit % zu 4
	Vor der Bestrahlung	Nach 5 Min. Bestrahlung	Nach 5 Min. in Dunkelheit				
Quarz I	8,0	9,5	9,2	1,5	7	0,2	20
„ II	3,0	4,5	4,4	1,5	7	0,2	7
„ V	6,8	17	15,5	10	10	1,0	15
„ VI	1,4	2,0	1,8	0,6	1,7	0,35	30
„ VII	9,0	9,3	9,0	0,3	11,5	0,03	—
„ VIII	0,9	28	24	27	6,0	4,5	15
„ IX	0,8	2,2	2,0	1,4	2,5	0,56	15
Rauchquarz I	12,5	108	90	95	5	19	15
„ „ II	0,03	16	9,5	16	4,5	3,5	40

fremden Beimengung erzeugt wird. Nach starker Ionisation vereinigen sie sich zu neuen Komplexen oder gehen gar aus dem Kristall heraus. Man kann voraussehen, daß stärkere Ströme bei erhöhter Temperatur diese Ionen entfernen können und so imstande sind, den Quarz zu reinigen. In der Tat zeigte sich, daß der Widerstand durch den Strom bei 220° C von $1{,}3 \cdot 10^6$ Ω auf $10 \cdot 10^6$ Ω gebracht werden konnte. Ein längerer Strom bei 315° erhöhte diesen Widerstand auf $76 \cdot 10^6$. Ein Rückstrom konnte nicht mehr den Anfangswiderstand voll herstellen.

Dagegen tritt bei Temperaturen über 800° die Eigenleitfähigkeit des Quarzes in den Vordergrund, und bei diesen Temperaturen tritt auch keine Widerstandserhöhung durch Strom auf.

Die starke Erhöhung der Beweglichkeit und der Dissoziation mit Temperatur bringt es mit sich, daß bei hohen Temperaturen alle Verhältnisse sich quantitativ anders gestalten. Während bei tiefen Temperaturen die Polarisation fast auf den Wert der angelegten Spannung anwächst und nur einen kleinen Reststrom übrig läßt, wird der Reststrom mit steigender Temperatur immer größer, so daß bei Temperaturen von 300° C und höher die Polarisation im stationären Zustand kaum einige

Prozente erreicht und den Strom nur ganz unwesentlich vermindert.

Diese quantitativen Unterschiede verändern die Erscheinung so wesentlich, daß man an einen Übergang zur Elektronenleitung gedacht hat (J. Königsberger). Doch scheinen alle Tatsachen für eine elektrolytische Leitung im Quarz zu sprechen bei hohen wie bei tiefen Temperaturen.

Sehr verschieden vom Quarz ist die Wirkung einer Bestrahlung auf Kalkspat. Zwar wird auch im Kalkspat die Leitfähigkeit um das Hundertfache erhöht, doch ist hier dieser Vorgang auf das Innigste mit der Phosphoreszenz des Kristalls verknüpft. Nach unterbrochener Bestrahlung steigt die Leitfähigkeit bei Zimmertemperatur nach etwa 10 Tagen an, bis das Phosphoreszenzlicht erloschen ist. Dann erreicht die Leitfähigkeit ihr Maximum, das erst nach einigen Monaten merklich vermindert wird; mit der Zeit strebt die Leitfähigkeit doch schließlich dem Anfangswert zu. Durch Temperatur wird der ganze Vorgang beschleunigt und zwar in einem Verhältnis, das dem Temperaturkoeffizienten der Leitfähigkeit entspricht. Ich sehe darin eine Bestätigung der Ansicht, daß der Temperaturkoeffizient der Leitfähigkeit im Kalkspat im wesentlichen auf einer Vergrößerung der Beweglichkeit und nicht des Dissoziationsgrades beruht, im Gegensatz zum Quarz. Die Rückkehr in den Normalzustand wird im Quarz, wie schon hervorgehoben, nur in dem Maße durch Temperaturerhöhung beschleunigt, als es der Vergrößerung der Beweglichkeit und nicht der Leitfähigkeit entspricht. Bei Temperaturerhöhung von 0 auf 100° C steigt die Leitfähigkeit im Quarz wie auch im Kalkspat um das 20000fache, während die Beweglichkeitserhöhung im Quarz nur das 200fache beträgt. Die Wiedervereinigung wird im Quarz um das 200fache, im Kalkspat um das 20000fache beschleunigt.

Ist die Ansicht richtig, daß der Temperaturkoeffizient der Leitfähigkeit im Kalkspat auf der Beweglichkeitszunahme allein beruht, so muß man erwarten, daß die Temperaturkoeffizienten des bestrahlten und des unbestrahlten Kalkspats gleich sind, was sich auch weitgehend bei allen acht untersuchten Platten bestätigte. Wir können annehmen, daß die während der

Phosphoreszenz gebildete neue Anzahl freier Ionen durch Temperatur ebensowenig geändert wird, wie die Anzahl der ursprünglichen, und daß eine Rückbildung im Normalzustand mit einer Geschwindigkeit erfolgt, welche durch Beweglichkeit bestimmt wird.

Den Unterschied im Verhalten von Quarz und Kalkspat bei Polarisationsbildung wie bei Bestrahlung können wir vielleicht verstehen, wenn wir voraussetzen, daß im Kalkspat nur eine Ionenart in großer Anzahl, aber mit sehr kleiner Beweglichkeit frei ist, während im Quarz sehr wenig Ionen beiderlei Vorzeichens mit verhältnismäßig großer Beweglichkeit behaftet sind.

Reine Kristalle.

Die Erfahrungen, die man bis jetzt gemacht hat, beziehen sich fast ausschließlich auf natürliche Kristalle oder gepreßte Pulver, d. h. auf ein Material, welches chemisch oder physikalisch schlecht definiert war. Die starken quantitativen Unterschiede bei verschiedenen Exemplaren ließen vermuten, daß zufällige Verunreinigungen, welche in natürlichen Kristallen immer vorkommen, die Hauptrolle bei der Leitung übernehmen. Wurde auch in einigen Fällen (so z. B. von E. Warburg) festgestellt, daß man mit elektrolytischer Leitung zu tun hat, so blieb es immerhin unentschieden, ob die Ionen des Kristallgitters selbst an der Leitung teilnehmen können. Von vornherein konnten über das Verhalten chemisch reiner Kristalle 4 Annahmen gemacht werden:

I. Alle Ionen des Kristallgitters beteiligen sich an der Leitung (in Analogie zu einigen geschmolzenen Salzen).

II. Der Kristall ist durch Temperaturbewegung teilweise in freie Ionen dissoziert, so daß bei Entfernung fremder Ionen die Eigendissoziation eintrifft (in Analogie mit reinem Wasser).

III. Die Dissoziation wird nur durch äußere Ionisation und nicht durch Temperatur bewirkt (in Analogie zu Gasen).

IV. Die ganz reinen Kristalle haben nur elastisch gebundene Ionen, die durch elektrische Kräfte keinen Strom liefern können (vollkommene Isolatoren).

Ich und Frau M. Kirpitschewa haben versucht, diese Frage zu entscheiden durch Herstellung „elektrisch“ reiner Kristalle. Vor allem war zu fordern, daß ihre Leitfähigkeit

eine Materialkonstante werden muß. Zur Untersuchung wählten wir Alaune, als Repräsentanten der wasserhaltigen Kristalle und Nitrate — als wasserfreie. Die im Handel als „purissimum" bezeichneten Kristalle genügten dieser Forderung nicht. So erhielten wir für vier sorgfältig ausgesuchte Ammoniumalaune die folgenden spezifischen Leitfähigkeiten in 10^{-16} reziproken Ohm: 6000, 4200, 360000, 108000. Durch langen Stromdurchgang und Entfernung der Schichten, wo sich in der Nähe der Elektroden die fremden Ionen ansammelten, konnte die Leitfähigkeit von 6000 auf 900 und von 108000 zunächst auf 9600 und dann auf 2200 gebracht werden. Doch hat sich dieses Verfahren als nicht ausreichend erwiesen.

Die Aufgabe wurde darauf vermittelst fraktionierter Kristallisation gelöst. Die Kristallisation geschah durch Abkühlung der überhitzten Lösung, die in starker Strömung gehalten wurde und sich an fertigen Kristallkeimen niedersetzte. Es wurde viel Sorgfalt verwendet, um die Bildung von zufälligen Keimen zu vermeiden; zu diesem Zweck wurde jede Verdampfung durch Einbringen in den Thermostat von weniger konzentrierter Lösung vermieden. Die so gebildeten Kristalle zeigten noch den Keim und oft mehrere Spalten und Einschlüsse. Jeder Kristall wurde im konzentrierten Bogenlicht untersucht und nur die tadellosen Bruchstücke für die Versuche und weitere Kristallisation benutzt. Bei Untersuchung war der Kristall in gesättigte Lösung eingetaucht, wobei die inneren Inhomogenitäten besser hervortraten. Um die Fehler in der Messung der geometrischen Größen (Querschnitt und Dicke) zu vermeiden, wurde immer der Leitungsstrom mit der influenzierten Ladung verglichen. Bezeichnet V die angelegte Spannung, S den Querschnitt, D die Dicke der Kristallplatte, v die Aufladung des Elektrometers durch den Strom in t Sek., J die Aufladung durch Influenz, C die Kapazität des Elektrometers und der Platte, ε die Dielektrizitätskonstante und σ die spezifische Leitfähigkeit, so haben wir

$$\sigma = \frac{v}{t} \cdot \frac{C}{V} \cdot \frac{d}{s},$$

$$J = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{V}{C} \frac{s}{d},$$

woraus

$$\sigma = \frac{s}{4\pi} \cdot J \cdot \frac{v}{t} \cdot$$

Als wesentliche Fehlerquelle war folgende zu berücksichtigen. Die Belegungen der Platte wurden nach Art eines absoluten Kondensators angebracht; die zum Elektrometer führende Belegung war dabei durch einen engen Isolierstreifen von dem an der Erde liegenden Schutzring getrennt. Auf diesem Isolierstreifen wurde bei jeder Potentialänderung der gegenüberliegenden Belegung durch Influenz Ladung frei, welche dann allmählich im Laufe von 1—2 Min. (je nach der Isolationsfähigkeit des Streifens) auf die mit Elektrometer verbundene Belegung floß. Dadurch sind die in den ersten Versuchsreihen erhaltenen Zahlen gefälscht um 10 bis $100 \cdot 10^{-15}$ Ohm. Als Maß der Leitfähigkeit darf man, wie eine einfache Überschlagsrechnung und auch der Verlauf des Stroms zeigen, den Strom erst nach 2 Min. annehmen. In folgender Tabelle führen wir einige Messungen mit Ammoniumalaunen an, die einen Einfluß einer sukzessiven Kristallisation zeigen. Mit 1, 2, 3 ... sind die Präparate parallel einer Würfelfläche bezeichnet, mit *A*, *B*, *C* die parallel einer Oktaederfläche geschliffenen Präparate. Die Zahlen geben die Leitfähigkeit $\sigma \cdot 10^{16}$ in reziproken Ohm an.

Die weitere Abnahme der Stromstärke mit der Zeit war bei den letzten zwei *Versuchsreihen* nur sehr langsam, etwa 10 Proz. in 24 Stdn. Vergleicht man in den Tabellen für die 3. und 4. Kristallisation die Zahlen der letzten Kolumne, so sieht man, daß sie mit der einzigen Ausnahme (Nr. 9 in der 3. Kristallisation) mit einer Abweichung vom Mittel um weniger als 5 Proz. *die gleichen* sind. Die Übereinstimmung wird noch bedeutend besser, wenn man spätere Zeitintervalle etwa 5 Min. nach Stromschluß zum Vergleich zieht.

Tabelle 9.

Käufliche (purissimum) Kristalle.

	10″—15″	1′—1′ 15″
1	6 000	—
2	4 200	3000
A	360 000	5000
B	108 000	4200

Tabelle 10.

Nach einer ersten Kristallisation.

	10″—15″	1′—1′ 15″	2′—2′ 30″
1	138	42,6	—
2	306	156	—
3	132	27	—
4	2700	114	—
5	1620	660	—
6	7800	390	—
7	284	200	138
7	222	90	70
9	120	48	30
10	204	102	60
A	279	96	—
B	720	216	—
C	1680	210	—
	Dritte Kristallisation		
1	55,7	27	21,0
2	48	22,5	20,6
3	90	24,6	21,8
4	50	27,6	21,6
5	1020	600	—
6	96	33	21,8
7	120	25,2	22,8
8	108	25,2	22,2
9	960	660	480
10	66	22,8	22,2
	Vierte Kristallisation.		
1			22,8
2			21,6
3			20,4
4			22,8
A			21,6
B			21,0
C			21,3

Die Ausnahmen (Nr. 5 und 9 der 3. Kristallisation) sind auf schlecht sichtbare Sprünge zurückzuführen. Im Kristall 5 ist ein solcher Sprung auch bemerkt worden, doch waren die zurückgebliebenen Bruchstücke zu klein, um eine ganz genaue Messung zu erlauben. Um nun zu entscheiden, ob die noch vorhandenen Unterschiede reell sind, wurden *die stark vom Mittel* abweichenden Kristalle Nr. 2 und 10 in einem gemeinsamen Apparat bei höheren Temperaturen untersucht, wo wegen größerer Leitfähigkeit die Versuchsfehler bedeutend kleiner sind. In der nachfolgenden Tabelle sind die gemessenen Leit-

fähigkeiten in 10^{-16} reziproken Ohm nebst den aus der Formel $\log \sigma = -\frac{A}{T} + B$ berechneten angegeben. $A = 0{,}105 \cdot 10^4$, $B = 2{,}15$.

Tabelle 11.

$t°$ C	Nr. 2	Nr. 10	ber.
17	20,6	22,2	20
26	51	49	51
45	455	455	455
63	2900	2950	2900

Man sieht, daß die Unterschiede, die bei Zimmertemperatur 8 Proz. betrugen, bei höheren Temperaturen verschwinden.

Wir sind somit zu der Behauptung berechtigt, daß die gemessene Leitfähigkeit $20 \cdot 10^{-16}$ 1/Ohm bei 17° C eine für Ammoniumalaun charakteristische Konstante ist.

Die Erreichung einer konstanten Leitfähigkeit, welche nicht mehr von Stück zu Stück variiert, hat es erlaubt, einer Frage näher zu treten, die zwar mehrfach angegriffen, aber nicht entschieden war, nämlich nach der Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Orientierung. Unter den Kristallen der 3. und 4. Kristallisation befanden sich Kristalle, die parallel (100) und (111) geschliffen waren und die ganz gleiche Leitfähigkeit zeigten. Wir schließen daraus, daß für Kristalle des regulären Systems die Leitfähigkeitsfläche eine Kugel ist und folglich für die Kristalle der niedersten Symmetrie wohl ein dreiachsiges Ellipsoid. Die Messungen an anderen reinen Kristallen sind in Einklang mit dieser Behauptung.

Es wurde somit gezeigt, daß durch sukzessive Kristallisation Kristalle *einer Substanz* hergestellt werden können, die alle die gleiche Leitfähigkeit besitzen. Wir überzeugten uns, daß dieser Endwert nicht eine Eigenschaft des zur Kristallisation verwendeten destillierten Wassers war. Eine Verbesserung des Wassers (von $\sigma = 5 \cdot 10^5\ \Omega$ auf $\sigma = 2 \cdot 10^6\ \Omega$) und eine absichtliche Verunreinigung mit Spuren von $LiNO_3$, NaCl, $(NH_4)_2SO_4$ hat die nach 2 Min. gemessene Leitfähigkeit nicht wesentlich verkleinert bzw. vergrößert. Wir glauben, daß die angewandte Methode der Kristallisation an Keimen in einem Strom der durch Abkühlung übersättigten Lösung verhindert,

daß fremde Stoffe in den Kristallverband aufgenommen werden. Nur erst eine stärkere Verunreinigung mit 5 Proz. NaCl oder mit H_2SO_4 hatte einen starken Einfluß auf die Leitung.

Anders liegen die Verhältnisse bei einer Beimischung von isomorphen Stoffen zu der Lösung. Hier gehen sie nachweislich in den Kristall hinein und ändern das Verhalten des Kristalls. Wir haben einige systematische Reihen von Kristallen mit verschiedenem Gehalt an isomorpher Beimischung untersucht. Außer einer starken Vergrößerung der Anfangsleitfähigkeit bemerkt man in solchen Mischkristallen eine starke Stromabnahme mit der Zeit (vgl. Fig. 13), die bei „reinen" Kristallen

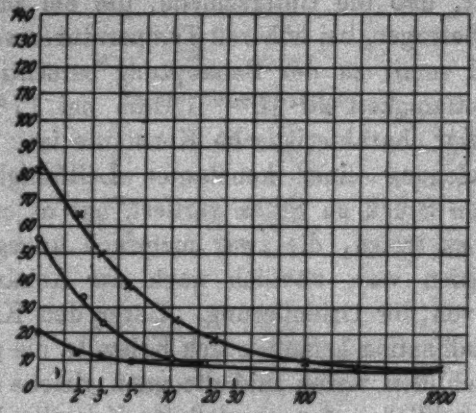


Fig. 13.

fehlt. Der Endwert des Stromes nach etwa 20 Stdn. liegt zwischen den Werten für reine Stoffe, welche in den Mischkristall eingehen. Es wäre aber falsch, anzunehmen, daß der große Anfangswert den beigemengten Ionen zuzuschreiben ist und daß nunmehr der Kristall wieder rein ist und die ganze Beimengung durch den Strom entfernt ist. Der Strom konnte in der Tat nach dem Faradayschen Gesetz in 27 Stdn. kaum 10^{-11} g ausscheiden, während die Beimengung einige Milligramm erreicht. Erst bei höheren Temperaturen konnten wir nach langem Stromschluß eine Verarmung an NH_4 an der einen Seite und eine Anreicherung an der anderen nachweisen in einem Kaliumalaune, dem etwas Ammoniumalaun beigemengt war. Wir nehmen an, daß in Mischkristallen wegen Konzentrationsschwankungen die Gitterstruktur weniger vollkommen

ist, wodurch ein Überschuß an dissoziierten Ionen entsteht. Diese Ionen werden durch den Strom entfernt, bis die normalen durch Temperaturgleichgewicht bedingten Ionen allein übrig bleiben; dann sinkt auch die Leitfähigkeit auf den Normalwert zurück. Wir überzeugten uns, daß, sobald wir in einem reinen Kristall durch Ra-Strahlen die Anzahl freier Ionen künstlich erhöhen, der Verlauf des Stromes denselben großen Anfangswert und starke Abnahme zeigt. Der von uns bei reinen Kristallen beobachtete gleichmäßige Verlauf des Stroms gibt somit noch ein Kriterium über die „Reinheit" des Kristalls zu entscheiden, das entschieden zugunsten ihrer Reinheit spricht.

Von den wasserhaltigen Kristallen wurden noch Kupfervitriolkristalle untersucht, weil hier die blaue Färbung auf eine schwache Bindung der Cu-Ionen hinweist. Man könnte glauben, daß sie auch für den Strom frei sind. Die spezifische Leitfähigkeit des Kupfervitriols war aber noch etwas kleiner als die von Ammoniumalaun, etwa $15 \cdot 10^{-16}$ 1/Ohm bei 17° C.

Von „reinen" wasserfreien Kristallen wurden $NaNO_3$, $AgNO_3$ und KNO_3 untersucht mit denselben Ergebnissen, wie sie für Alaune festgestellt wurden.

Auf Grund dieser Untersuchung dürfen wir behaupten, daß die Kristalle in elektrischer Beziehung eine weitgehende Analogie zu Wasser besitzen. Nennen wir als freie Ionen diejenigen, die aus dem Kristallgitter durch Temperaturbewegung oder durch unpassende Bindung ausgetreten sind, so stellen wir uns vor, daß die Ionen der nicht isomorphen Beimengung im Kristall vorwiegend frei sind. Reinigt man den Kristall, so gibt es auch immer unter den Ionen des Kristallgitters solche, die den elektrischen Kräften frei folgen. Auch reine Kristalle sind teilweise dissoziiert und besitzen dementsprechend eine ganz bestimmte Eigenleitfähigkeit.

Elektrolyse der Kristalle.

Der große Temperaturkoeffizient der Leitfähigkeit macht es möglich, die Erscheinungen der Elektrolyse, welche bei Zimmertemperaturen nur unmeßbare Stoffmengen liefert, bei hohen Temperaturen ganz evident zu machen. So haben wir durch stundenlangen Stromschluß bei 100° C aus $AgNO_3$

zwischen Platinelektroden eine gut leitende schwarze Silberschicht an der Kathode ausgeschieden, die bei Stromumkehr teilweise auf der anderen Seite ausgeschieden wurde. Aus dem Kristall wurden auf diese Weise fest anliegende Silberelektroden hergestellt. Bei $NaNO_3$ war der Strom schwächer; es konnte aber an der Kathode eine deutliche basische Reaktion festgestellt werden. Nimmt man noch die bereits erwähnte Wanderung von NH_4 in Mischkristallen hinzu, so darf man behaupten, daß die Wanderung der Ionen des Kristallgitters durch den Strom genügend sicher nachgewiesen ist.

Ich will damit nicht behaupten, daß in isolierenden Kristallen allein elektrolytische Leitung vorkommt. Im Gegenteil bin ich und Röntgen[1]) der Ansicht, daß z. B. belichtetes vorher X-bestrahltes oder natürlich gefärbtes Steinsalz, an welchem an den kolloidalen Natriumteilchen Photoelektronen frei werden, Elektronenleitung besitzt. Diese Ansicht wurde durch Hrn. P. Lukirsky noch besonders bestätigt, der im belichteten Steinsalz den Hallschen Effekt beobachtet und gemessen hat. Diese Tatsache kann als ein ziemlich sicheres Kriterium einer Elektronenleitung angesehen werden. Es ist ja kein Fall bekannt und auch kaum denkbar, wo ein deutlicher Hallscher Effekt bei elektrolytischer Leitung beobachtet wurde. Die in den letzten Jahren ausgeführten Untersuchungen von R. Pohl und seinen Mitarbeitern geben auch zahlreiche Beispiele einer Elektronenleitung durch Photoelektronen.

Trotzdem ist es aber richtig, daß bei allen untersuchten Kristallen im Temperaturgleichgewicht ohne äußere Ionisation eine rein elektrolytische Leitung auftritt. Die Tatsache, daß durch Polarisationsbildung der Strom auf den 10^{-4} Teil erniedrigt werden kann, zeigt, daß in diesen Fällen eine Elektronenleitung nicht in größerem Betrage anwesend ist, denn eine Elektronenleitung müßte immer als Reststrom auftreten.

Von großem Interesse war eine Untersuchung der Wanderung fremder Ionen durch reine Kristalle, welche schon im Jahre 1889 von E. Warburg und Tegetmayer an Quarz beobachtet wurde. Nimmt man an, daß diese Ionen zwischen den Ionen des Kristallgitters wandern und nicht durch Platz-

1) A. Joffé u. W. Röntgen, Ann. d. Phys. 64. S. 1. 1921.

wechsel von Zelle zu Zelle vorwärts kommen, so darf man ein Kristall als ein Sieb betrachten, durch welches die elektrischen Kräfte Ionen hindurchbringen. Jede kristallographische Richtung im Kristall läßt, wie sich zeigte, Ionen nur bis zu einer bestimmten Größe durch, so daß auf diese Weise sichere Anhaltspunkte für die Beurteilung der Größe der Ionen zu erlangen wären.

Die Schwierigkeit bei derartigen Versuchen liegt in der Art, wie man die gewünschten Ionen durch die Oberfläche des Kristalls in sein Inneres bringt. Als geeignet haben sich Elektroden aus flüssigen Metallen oder aus geschmolzenen Salzen erwiesen, dagegen gingen die Ionen aus einer wäßrigen Lösung in den Kristall nicht hinein (wohl wegen der sie umgebenden Wasseratmosphäre). Folgendes Verfahren erwies sich auch in schwierigen Fällen als erfolgreich. Ein Kristall ($NaNO_3$ z. B.) wird in ein geschmolzenes Eutektikum von $NaNO_3$ und $LiNO_3$ eingetaucht, so daß zunächst eine Schicht aus dem Kristall in der Schmelze aufgelöst wird, dann ist die Verbindung von Schmelze und Kristall eine möglichst innige. Damit die Schmelze an dem Kristall nicht aufsteigt und so die Leitung längs der Oberfläche vermittelt, wurde durch einen kleinen Zusatzofen die Schmelze etwas oberhalb ihres Schmelzpunktes gehalten, der Kristall blieb aber dabei bei einer Temperatur von etwa 10° unter der Schmelztemperatur des Eutektikums. Als andere Elektrode diente meistens Quecksilber oder flüssiges Metall.

Bei der zuletzt beschriebenen Anordnung zeigte sich, daß Li-Ionen durch den $NaNO_3$-Kristall hindurchwandern, wodurch die Leitfähigkeit auf 2,5 Betrag gebracht wird. Man kann durch Messung der Stromstärke sehr bequem verfolgen, wie die Li-Ionen immer weiter durch den Kristall wandern, bis sie nach etwa 1 Stde. an der entgegengesetzten Elektrode (etwa 1 cm) angelangt sind. Kehrt man die Stromrichtung um und läßt aus der Elektrode keine Li-Ionen ein, so sinkt die Stromstärke auf den ursprünglichen Wert für Na-Ionen zurück. Der Verlauf der Stromstärke hat die in der Fig. 14 angegebene Form, die gut mit der für diesen Fall berechneten übereinstimmt.

Das Hindurchschicken der Li-Ionen gelang somit, ohne

daß der Kristall dabei gelitten hat und ohne daß nennenswerte Mengen Li im Kristall selbst zurückgeblieben wären. Dagegen konnte ich Cu nicht durchschicken, ohne daß das Kristallgefüge auf dem ganzen Wege des eingedrungenen Kupfers

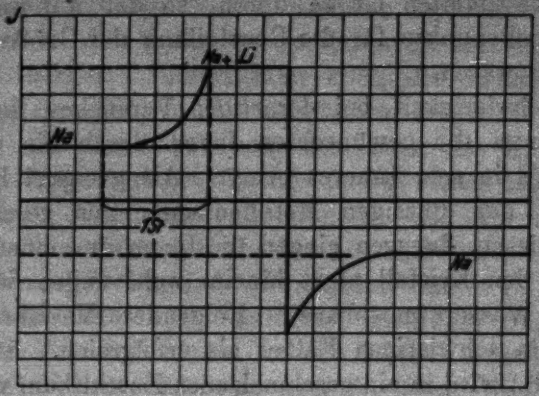


Fig. 14.

(durch grüne Färbung sichtbar) zerstört wurde. Sowohl im Licht, wie im Röntgenstrahl sah man hier ein Kristallaggregat an Stelle des einheitlichen Individuums.

Verschiedene Ionen konnten in gut nachweisbaren Mengen auch durch andere Kristalle geschickt werden (NaCl, SiO_2, $CaCO_2$), wobei einige Ionen nur in bestimmten kristallographischen Richtungen wanderten, dagegen in anderen, wo die Ionen des Gitters enger liegen, nicht durchzubringen waren. Diese im Gang befindliche Arbeit hat noch keine sicheren und systematischen Resultate ergeben; ich hoffe aber in Kürze ausführlicher darüber berichten zu können.

Leiden, 1. Juli 1922.

(Eingegangen 6. Juni 1923.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Gaede

Hoch-Vakuum-Pumpen

aller Art

für Wissenschaft und Technik

Vakua bis zu $^{1}/_{1000000}$ mm Hg. Saugleistung bis 50 cbm per Stunde

Neuheit!

Quecksilber-Dampfstrahlpumpe

System Pfeiffer D.R.P. angem.

Ganz aus Glas!

Für Gas und elektrische Heizung

Enorme Leistung!

Rotierende Kapsel-Ölluftpumpe

D.R.P.

Vakuum bis 0,001 mm Hg.

Saugleistung bis 10 cbm per Stunde

Listen auf Verlangen

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 0.

Fabrik für physikalische, chemische und technische Apparate

1923. № 23.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 72.

1. *Über eine Abart der Jaminschen Interferenzanordnung;*

von E. Bratke und E. Waetzmann.

§ 1. Im folgenden soll die strenge Theorie einer der Jaminschen nahe verwandten, bereits von Mascart[1]), Lummer[2]) und später von Hurion[3]) behandelten Interferenzerscheinung gegeben werden.

Die von der Vorder- bzw. Hinterseite einer planparallelen Platte P etwa unter 45° reflektierten Strahlen fallen auf eine Linse L auf und treffen nach dem Austritt aus L auf einen Spiegel, der sie zur Linse zurückwirft. Sie durchsetzen also die Linse zum zweiten Male und werden zum zweiten Male an der Hinter- bzw. Vorderseite der planparallelen Platte reflektiert, von wo aus sie in das Auge des Beobachters gelangen.

An sich bietet die genaue Durchrechnung einer solchen Interferenzerscheinung heute nur bedingtes Interesse. Infolgedessen werden wir uns ganz kurz fassen und nur den Gang der Rechnung, einige hierbei zutage tretende interessante Einzelheiten und die Resultate mitteilen.

Die Rechnung wurde nicht um ihrer selbst willen durchgeführt, sondern nur aus dem Grunde, weil sie zur Fundamentierung einer von uns ausgearbeiteten Methode zur Untersuchung der Abbildungsfehler optischer Systeme notwendig war. Beim Zustandekommen der in Frage stehenden Erscheinung spielt ja die Linse eine wesentliche Rolle, und das Interferenzbild ist — wie der eine von uns gefunden hat[4]) — je nach dem Korrektionszustande derselben ein ganz verschiedenes. Um die Abbildungsfehler aus dem Interferenzbild auch

1) E. Mascart, Ann. chim. phys. 23. S. 149. 1871.
2) O. Lummer, Wied. Ann. 23. S. 513. 1884.
3) A. Hurion, Journ. de Phys. (3) 1. S. 414. 1892.
4) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. 39. S. 1042. 1912.

quantitativ[1]) entnehmen zu können, muß aber zunächst das Aussehen der Interferenzerscheinung *unter der Voraussetzung idealer Linsenabbildung* genau bekannt sein.

Die für diesen Fall von Lummer gegebene Theorie führt zu dem Resultat, daß die Interferenzkurven äquidistante, vertikale Gerade sind, die symmetrisch zu einem Zentralstreifen angeordnet sind, der etwas seitlich der optischen Achse liegt. Die Streifenabstände nehmen proportional der Entfernung des Spiegels aus der Brennebene der Linse ab. Dabei ist es gleichgültig, in welcher Richtung der Spiegel verschoben wird. Die Stellung in der Brennebene bezeichnen wir als seine Nullstellung. Die Erscheinung ist also symmetrisch zur Nullstellung des Spiegels. In dieser Nullstellung werden die Streifenabstände unendlich groß, es treten also keine Interferenzstreifen mehr auf. Die Lummersche Berechnung des Gangunterschiedes beschränkt sich aber auf die Betrachtung von Strahlen, die in ein und derselben, durch die optische Achse von L und die Plattennormale gelegten Ebene — sie soll stets als Horizontalebene bezeichnet werden — verlaufen und beim ersten Auftreffen auf L parallel der optischen Achse gehen. Ferner werden quadratische und höhere Potenzen der in den Formeln auftretenden kleinen Winkelgrößen vernachlässigt, ohne daß geprüft wird, ob und inwieweit die Berücksichtigung dieser Größen das theoretische Interferenzbild ändern würde.

Wie wir erst nachträglich bemerkten, hat sich dann Hurion mit der gleichen Interferenzanordnung beschäftigt und hierbei auch räumlich und unter beliebigem Winkel auftreffende Strahlen betrachtet. Der strenge Verlauf der interferierenden Strahlen im Raume wird aber nicht geprüft und ebenso fehlen die notwendigen Erörterungen über den Einfluß von Öffnung und Entfernung des Beobachtungsapparates auf den zu betrachtenden Strahlengang. Ferner werden, wie bei Lummer, quadratische Glieder vernachlässigt, ohne daß der etwaige Einfluß dieser Vernachlässigungen diskutiert wird.

Es bleibt also die Frage offen, ob nicht eine strenge Theorie der Erscheinung schon *bei idealer Linsenabbildung Abweichungen von der geradlinigen Form* der Interferenzkurven ergibt. Wenn

1) E. Bratke, Diss. Breslau 1922.

das der Fall wäre, könnte man von vornherein sagen, daß die ganze Erscheinung zu kompliziert ist, um eine exakte Meßmethode darauf aufzubauen. Ergibt dagegen auch die strenge Theorie bei idealer Abbildung keine Abweichungen von der geradlinigen Form, sind also die Abweichungen restlos auf Abbildungsfehler zurückzuführen, dann durfte man hoffen, die zunächst nur für qualitative Untersuchungen von Linsenfehlern angegebene Methode auch für quantitative Zwecke brauchbar zu machen. Aus diesem Grunde war die vorliegende Rechnung notwendig. Sie führt zu dem Resultat, daß die Interferenzerscheinung auch unter Berücksichtigung von Strahlen verschiedener Richtungen aus äquidistanten, senkrechten Geraden besteht, wenn aus größerer Entfernung und mit kleiner Eintrittspupille beobachtet wird. Da sich diese Bedingung stets erfüllen läßt, *sind alle Abweichungen in den Formen der Interferenzkurven von senkrechten Geraden ausschließlich auf Fehler in der punktweisen Abbildung optischer Systeme zurückzuführen. Mit diesem Resultat ist die sichere Grundlage gegeben, um die ursprünglich nur für qualitative Zwecke angegebene Methode zu einer exakten Meßmethode auszubauen.* Über die hierbei erhaltenen Resultate berichtet E. Bratke an anderer Stelle.

§ 2. Wir betrachten zunächst den Strahlenverlauf in der Horizontalebene. Zur Berechnung des Gangunterschiedes Δ der interferierenden Strahlen wird das von Lummer[1]) benutzte

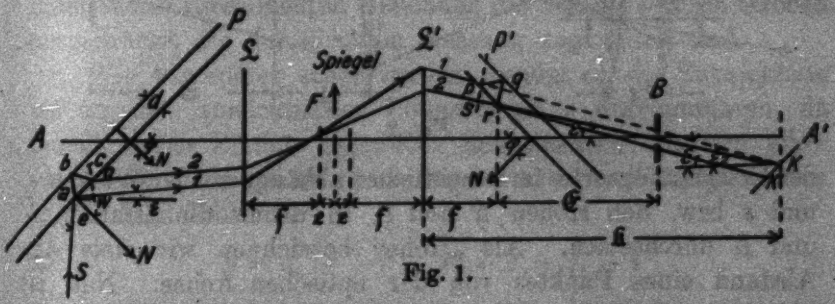


Fig. 1.

Spiegelungsverfahren angewandt. Ferner werden die an dem Spiegelbild P' der planparallelen Platte P reflektierten Strahlen nochmals einer Spiegelung unterzogen, und zwar an der Vorderseite von P', so daß schließlich ein Strahlenverlauf zustande

1) O. Lummer, a. a. O.

kommt, wie er in Fig. 1 dargestellt ist. Die optische Achse des Beobachtungsapparates B ist nunmehr mit der Hauptachse AA' koinzidierend zu denken. Für den Beobachtungsapparat wird eine derartig kleine Öffnung angenommen, daß die zur Interferenzerscheinung beitragenden Strahlen eindeutig bestimmt sind, d. h. daß es unter allen unter verschiedenen Winkeln im Punkte a auf P auftreffenden Strahlen nur einen gibt (Einfallswinkel e), dessen Teilstrahlen 1 und 2 in den Beobachtungsapparat gelangen. Die Platte P hat den Brechungsquotienten n, die Dicke d und ihre Normale N bildet mit der Hauptachse den Winkel φ. Die Teilstrahlen 1 bzw. 2 bilden mit der Normalen von P' die Winkel e_1 bzw. e_2. An Stelle der Winkel e, e_1 und e_2 werden noch die Winkel ε, ε_1 und ε_2 eingeführt, welche die Strahlen mit der optischen Achse bilden. Einer Spiegelverschiebung um ε mm in Wirklichkeit entspricht in der Fig. 1 eine Verschiebung des Systems $L + P$ oder $L' + P' + B$ um $2\,\varepsilon$ mm. Am zweckmäßigsten ist es, sich $L + P$ verschoben zu denken. Es läßt sich nämlich zeigen, daß der Gangunterschied in einer bestimmten Höhe $\mathfrak{h}''$ (Fig. 2)

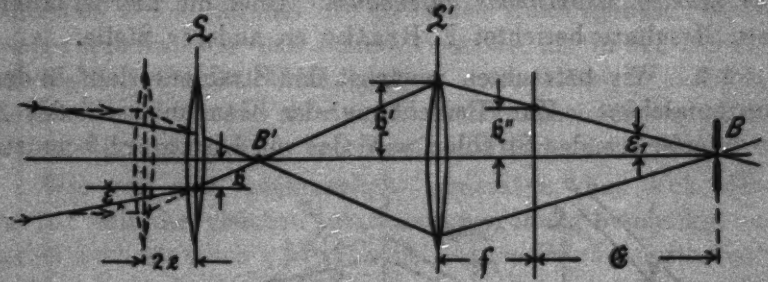


Fig. 2.

des Erscheinungsortes im wesentlichen abhängt von den Winkeln ε_1 und ε bzw. den Höhen $\mathfrak{h}'$ und $\mathfrak{h}$, in denen die Strahlen L' und L durchsetzen. Als „Höhe" bezeichnen wir stets den Abstand eines Punktes von der optischen Achse. Nun ist bei fester Entfernung $\mathfrak{G} + \mathfrak{f}$ des Beobachtungsapparates von L' und kleinster Eintrittsöffnung bei B der Strahlenverlauf durch $\mathfrak{h}'$ zwischen B und dem ihm in bezug auf L' konjugierten Punkt B' eindeutig und konstant festgelegt. Es ändert sich bei Spiegelverschiebung lediglich der Winkel ε bzw. die Höhe $\mathfrak{h}$ und in welcher Weise das geschieht, erkennt man am besten,

wenn man sich $L + P$ verschoben denkt. Endlich wird noch P' parallel zu sich in Richtung der optischen Achse so weit verschoben, daß ihre Vorderfläche mit dem Schnittpunkt r der interferierenden Strahlen zusammenfällt, wie dies in Fig. 1 geschehen ist. Eine derartige Verschiebung der Platte ist ohne Einfluß auf die Größe des Gangunterschiedes.

Konstruiert man jetzt in den Punkten c und p (Fig. 1) die zu den Strahlen 1 und 2 orthogonalen Flächen — in c die Ebene $c\,w$, in p die um K als Mittelpunkt geschlagene Kugelfläche $p\,s$ — so sind die optischen Weglängen der beiden Strahlen zwischen diesen beiden Flächen die gleichen und kommen infolgedessen für die Δ-Berechnung nicht in Frage. Es ergibt sich endlich in einfacher Weise:

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2(\varphi + \varepsilon)} - \dfrac{2d}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\varphi + \varepsilon_1)}} \\ \qquad \left\{ n^2 - \dfrac{\sin(\varphi + \varepsilon_1)\,[\cos(\varphi + \varepsilon_2) - \cos(\varphi + \varepsilon_1)]}{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \right\}. \end{cases}$$

Für $\varepsilon = 0$ geht diese Formel in die von Lummer[1]) gefundene über.

§ 3. Um Gleichung (1) für praktische Rechnungen verwendbar zu machen, wird sie in eine Reihe mit steigenden Potenzen der ε entwickelt. Sodann wird geprüft bis zu welchem Grade höhere Potenzen der sehr kleinen Winkel ε, ε_1 und ε_2 vernachlässigt werden können, und endlich werden in der auf diese Weise vereinfachten Gleichung die Winkel ε durch Größen ausgedrückt, die der direkten Messung zugänglich sind.

Wie wir später sehen werden, genügt es, die Entwicklung bis zu den quadratischen Potenzen in ε durchzuführen, da bereits deren Einfluß gegenüber den linearen Gliedern *unter gewissen Bedingungen* so gering ist, daß er vernachlässigt werden kann. Man erhält:

$$(2)\qquad \Delta = a_0\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \varepsilon\right) + b_0(\varepsilon_1\,\varepsilon_2 - \varepsilon^2)$$

wobei

$$a_0 = \frac{d \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi}}$$

den senkrechten Abstand zweier Strahlen darstellt, die durch Reflexion an der Vorder- und Hinterfläche der planparallelen

1) O. Lummer, a. a. O. S. 521.

Platte aus einem unter dem Winkel φ auf die Platte auftreffenden Strahl entstanden sind, und

$$b_0 = \frac{d \cos 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} + \frac{d \sin^2 2\varphi}{4 \sqrt{(n^2 - \sin^2 \varphi)^3}}$$

ist.

Mit Hilfe der Fig. 3 findet man:

$$(3) \quad \operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\mathfrak{h}''}{\mathfrak{E}}; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \varepsilon_2 - \mathfrak{h}'' \frac{2e}{f^2}; \quad \operatorname{tg} \varepsilon_1 = \operatorname{tg} \varepsilon_2 + a' \frac{2e}{f^2}.$$

Hierin ist

$$a' = \frac{a}{\cos \varepsilon}$$

die Entfernung, in der die beiden Strahlen auf L auftreffen. Die e-Werte sind positiv oder negativ einzusetzen, je nachdem die Spiegelverschiebungen außerhalb oder innerhalb der Brennweite von L erfolgen.

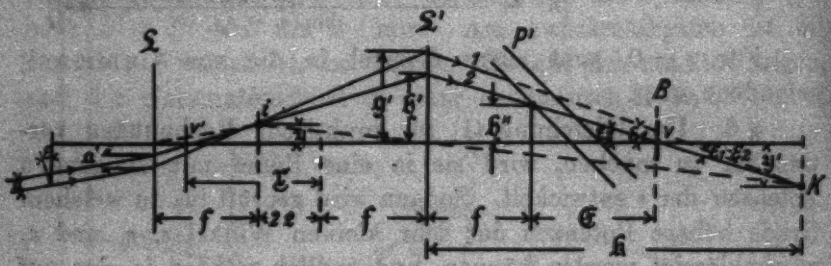


Fig. 3.

Wir erlangen am einfachsten einen Überblick, wenn wir ein Zahlenbeispiel betrachten, das praktischen Verhältnissen entspricht. In Tab. 1 sind die maximalen Winkelwerte ε, ε_1 und ε_2 zusammengestellt, die bei der Untersuchung einer Linse von der Brennweite $f = 485$ mm für $\mathfrak{h}''_{max} = 20$ mm auftreten. Bei den in Frage stehenden Berechnungen ist die Linse natürlich als ideal abbildend angenommen. Die Berechnungen sind für zwei sehr verschieden dicke planparallele Platten durchgeführt. Um einen Vergleich zu gestatten, sind in der Tabelle die Verhältnisse so gewählt, daß für beide Platten gleiche Gangunterschiede resultieren würden.

Die Tabelle zeigt, daß die maximalen Winkel um so kleiner werden, je größer bei festem $\mathfrak{h}''$ die Entfernung $\mathfrak{E}$ des

Tabelle 1.

	$\mathfrak{E}$	ϵ	s	s_2	s_1
$d = 3{,}16$ mm $n = 1{,}53$ $\varphi = 45°$	1000 mm	$+\frac{f}{15}$	0° 49′ 51″	1° 8′ 45″	1° 10′ 57″
		$-\frac{f}{15}$	1° 27′ 39″	1° 8′ 45″	1° 6′ 33″
	10000 mm	$+\frac{f}{15}$	0° 12′ 2″	0° 6′ 53″	0° 9′ 5″
		$-\frac{f}{15}$	0° 25′ 47″	0° 6′ 53″	0° 4′ 40″
$d = 10{,}33$ mm $n = 1{,}59$ $\varphi = 45°$	1000 mm	$+\frac{f}{52}$	1° 3′ 18″	1° 8′ 45″	1° 10′ 43″
		$-\frac{f}{52}$	1° 14′ 12″	1° 8′ 45″	1° 6′ 46″
	10000 mm	$+\frac{f}{52}$	0° 1′ 26″	0° 6′ 53″	0° 8′ 51″
		$-\frac{f}{52}$	0° 12′ 19″	0° 6′ 53″	0° 4′ 54″

Beobachtungsapparates von der hinteren Brennebene von L' wird, je weiter bei festem $\mathfrak{h}''$ und $\mathfrak{E}$ der Spiegel von der Linse entfernt wird (Übergang von $-\epsilon$ zu $+\epsilon$) und je größer d bei gleichen Gangunterschieden entsprechenden Spiegelverschiebungen genommen wird.

Die mit den Winkelwerten der Tab. 1 berechneten Werte des linearen und des quadratischen Gliedes der Gleichung (2) sind in Tab. 2 zusammengestellt. Wie die Tabelle zeigt, sind die quadratischen Glieder unter günstigen Versuchsbedingungen (großes $\mathfrak{E}$ und großes d) in der Tat sehr klein. Ist die Brennweite des Linsensystems kleiner als in dem vorstehenden Beispiel, so werden die quadratischen Glieder schon bei entsprechend kleineren Werten von $\mathfrak{E}$ sehr klein. Die Konstanz der absoluten Werte in Spalte 3 zeigt, daß bei Vernachlässigung der quadratischen Glieder der Gangunterschied Δ bei einer bestimmten Spiegelstellung nur abhängig ist von der Höhe $\mathfrak{h}''$, gleichgültig, in welcher Entfernung beobachtet wird, und daß die Δ-Werte für symmetrisch zur Brennebene von L gelegene Spiegelstellungen gleich sind.

Tabelle 2.

Fernrohrlinse $f = 485$ mm, für $y''_{max} = 20$ mm.

	1	2	3	4	5	6
	$\mathfrak{E}$	ε	$a_0\left(\frac{s_1+s_2}{2}-s\right)$	$b_0(s_1 s_2 - s^2)$	Spalte 4 in % von Spalte 3	in Bruchteilen der Brennweite f
$d = 8{,}16$ mm $n = 1{,}53$ $\varphi = 45°$ $a_0 = 2{,}33$ $b_0 = 0{,}316$	1000 mm	$+\frac{f}{15}$	$+0{,}01356$	$+0{,}0064 \cdot 10^{-3}$	0,47	$1/_{2100}$
		$-\frac{f}{15}$	$-0{,}01356$	$-0{,}0088 \cdot 10^{-3}$	0,59	$1/_{1700}$
	10000 mm	$+\frac{f}{15}$	$+0{,}01356$	$-0{,}0002 \cdot 10^{-3}$	0,016	$1/_{64000}$
		$-\frac{f}{15}$	$-0{,}01356$	$-0{,}0017 \cdot 10^{-3}$	0,124	$1/_{13000}$
$d = 10{,}33$mm $n = 1{,}59$ $\varphi = 45°$ $a_0 = 7{,}24$ $b_0 = 0{,}892$	1000 mm	$+\frac{f}{52}$	$+0{,}01355$	$+0{,}0064 \cdot 10^{-3}$	0,47	$1/_{11000}$
		$-\frac{f}{52}$	$-0{,}01355$	$-0{,}0069 \cdot 10^{-3}$	0,51	$1/_{10100}$
	10000 mm	$+\frac{f}{52}$	$+0{,}01355$	$+0{,}00045 \cdot 10^{-3}$	0,033	$1/_{153000}$
		$-\frac{f}{52}$	$-0{,}01355$	$-0{,}0009 \cdot 10^{-3}$	0,066	$1/_{79000}$

Um nun zu entscheiden, ob die an sich sehr geringen Beträge der quadratischen Glieder ganz vernachlässigt werden können, muß geprüft werden, inwieweit andere Faktoren etwa die Meßgenauigkeit herabsetzen. Das Endziel der Untersuchungen liegt ja darin, aus den experimentell gefundenen Interferenzbildern die Abbildungsfehler zu bestimmen. Das wird im wesentlichen dadurch geschehen, daß *die verschiedenen Werte von* $\mathfrak{E}$, *die sich bei nicht idealer Abbildung bei einer bestimmten Spiegelstellung für die verschiedenen Zonen der Linse ergeben, aus den Gangunterschieden berechnet werden, welche das Interferenzbild liefert.* Es fragt sich also, mit welcher Genauigkeit die Werte von Δ und damit die Werte von ε aus dem Interferenzbild entnommen werden können. In der demnächst

erscheinenden Arbeit von Bratke wird gezeigt, daß die Genauigkeit in der Bestimmung der ε-Werte bei der vorliegenden Versuchsanordnung[1]) etwa $^1/_{2000}$ bis $^1/_{3000}$ der Brennweite beträgt. Innerhalb dieser Genauigkeit lassen sich die Versuchsbedingungen ohne weiteres so wählen, daß die Vernachlässigung der quadratischen Glieder tatsächlich erlaubt ist. Man erhält also als Gleichung für den Gangunterschied

$$\Delta = a_0 \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \varepsilon \right) \tag{4}$$

worin

$$\varepsilon_2 = \frac{\mathfrak{h}''}{\mathfrak{k}}; \quad \varepsilon = \varepsilon_2 - \mathfrak{h}'' \frac{2e}{f^2}; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + a_0 \frac{2e}{f^2} \tag{5}$$

zu setzen ist. In der letzten Gleichung ist, entsprechend den diskutierten Vernachlässigungen, a' durch a_0 ersetzt. Es folgt also

$$\Delta = a_0 (2\mathfrak{h}'' + a_0) \frac{e}{f^2}. \tag{6}$$

Wie sich leicht beweisen läßt, darf die Interferenzerscheinung praktisch als in der Brennebene von L liegend angesehen werden.

§ 4. Der Fall des „räumlichen" Strahlenverlaufes ließe sich in der üblichen Weise ohne weiteres auf den ebenen Fall zurückführen, wenn nicht eine unvorhergesehene Schwierigkeit aufträte. Die genaue Verfolgung der Strahlen im Raume führt nämlich zu dem zunächst überraschenden Resultat, *daß sich die interferierenden Strahlen im Raume streng nicht schneiden.* Es müssen also Vernachlässigungen eingeführt werden, um überhaupt einen Schnittpunkt für die interferierenden Strahlen festzulegen. An Hand der Fig. 4 läßt sich zeigen, daß diese Vernachlässigungen von der gleichen Größenordnung sind, wie die früher gemachten Vernachlässigungen, also unbedenklich ausgeführt werden dürfen.

In der Fig. 4 sei P die planparallele Platte, $\mathfrak{F}_1$ die vordere, $\mathfrak{F}_2$ die hintere Brennebene der durch eine Ebene dargestellten Linse L. L', $\mathfrak{F}_1'$ und P' seien die entsprechenden Spiegelbilder, wobei wieder die Platte P' so verschoben ist, daß ihre Vorderfläche mit dem Schnittpunkt r der interferie-

1) Über eine verbesserte Anordnung vgl. E. Bratke und E. Waetzmann, Zeitschr. f. Physik 12. S. 258. 1922.

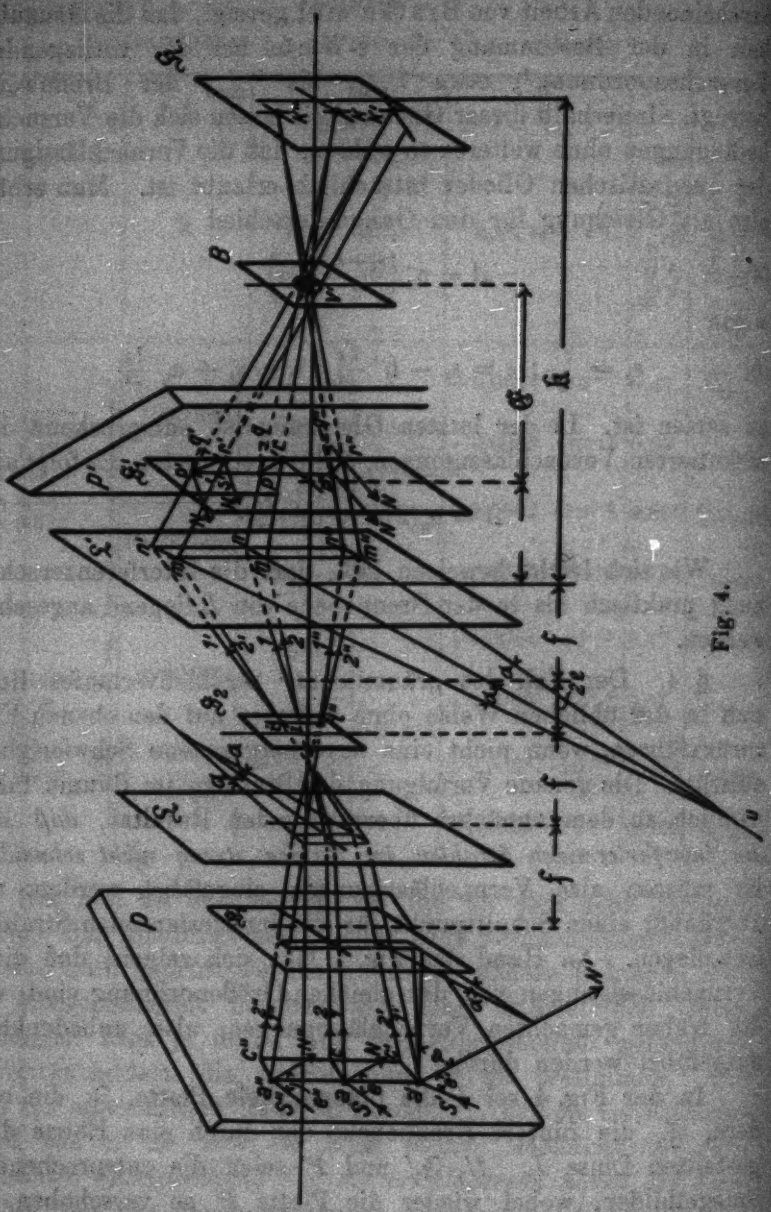


Fig. 4.

renden Strahlen zusammenfällt. *B* stellt die Blende des Beobachtungsapparates mit der Eintrittsöffnung *v*, $\mathfrak{R}$ die zu $\mathfrak{F}_3$ in bezug auf *L'* konjugierte Ebene dar.

Es mögen in dem Punkt a der Horizontalebene der Strahl S, in den Punkten a' und a'' senkrecht unter bzw. über a die Strahlen S' und S'' auf die Platte P so auffallen, daß sie nach ihrem Durchgang durch die Linsen schließlich sämtlich die Mitte der Blendenöffnung v passieren. Durch diese Bedingung sind den Strahlen S ganz bestimmte Einfallswinkel $e\,e'\,e''$ zugeordnet, und zwar so, daß die Strahlen in einer Ebene verlaufen, die senkrecht auf der Horizontalebene steht. Das letztere gilt auch für die durch Reflexion und Brechung entstandenen Strahlen $1\,1'\,1''$ bzw. $2\,2'\,2''$ während ihres ganzen Verlaufes. Es liegen infolgedessen die Punkte $p\,p'\,p''$ bzw. $r\,r'\,r''$ der Plattenoberfläche und die Punkte $K\,K'\,K''$ der konjugierten Ebene $\mathfrak{K}$ ebenfalls senkrecht übereinander.

Betrachtet man den Verlauf der aus einem Strahl, etwa S'', entstandenen Teilstrahlen $1''$ und $2''$, so sieht man, daß sie zunächst in einer Ebene verlaufen, die durch Plattenlot und Einfallswinkel bestimmt ist, und deren Spur in der Ebene L einen Winkel α mit der Horizontalebene bildet. Die Strahlen werden nun von L so gebrochen, daß sie durch i'' gehen. Legt man wieder eine Ebene durch die Strahlen, so muß sie die Spur in L und den Punkt i'' enthalten und L' in einer Geraden schneiden, die ebenfalls den Winkel α mit der Horizontalebene bildet, da L und L' parallele Ebenen sind. Die Strahlen werden durch L' abermals, und zwar so gebrochen, daß sie sich in dem Punkt K'' schneiden. Die durch sie gelegte Ebene muß die Schnittspur $n''\,m''\,u$ und den Punkt K'' enthalten. Würde diese Ebene auch noch die in p'' und r'' errichteten Plattenlote N fassen, dann blieben sowohl der in p'' gebrochene, als auch der in r'' reflektierte Strahl in dieser Ebene, die interferierenden Strahlen müßten sich schneiden. Das ist nun aber streng genommen nur für die in der Horizontalebene verlaufenden Strahlen der Fall, weil diese Ebene senkrecht auf der planparallelen Platte steht. Daß trotzdem auch außerhalb der Horizontalebene eine Interferenzerscheinung zustande kommt, liegt daran, daß die beiden interferierenden Strahlen in der Brennebene $\mathfrak{F}_1'$, die zugleich die Ebene ist, auf die der Beobachtungsapparat eingestellt ist, so nahe aneinander verlaufen, daß sie von dem Beobachter nicht getrennt werden.

In einigen zahlenmäßig durchgerechneten Beispielen ergeben sich für den Abstand der interferierenden Strahlen an der Stelle, an welcher die Interferenzerscheinung zustande kommt, maximale Entfernungen, die einem aus $\mathfrak{E} = 1000$ mm subjektiv Beobachtenden unter den sehr kleinen Winkeln von 2″ bis 6″ erscheinen. Der kleinste Winkel, unter dem mit bloßem Auge zwei Punkte noch getrennt werden können, beträgt aber etwa 1′. Auch bei Beobachtung mit einem Fernrohr mit schwacher Vergrößerung, wie sie für die vorliegenden Verhältnisse allein in Betracht kommt, bleiben die Strahlen ungetrennt.

Wellentheoretische Betrachtungen würden das Gebiet, in dem die Strahlen als sich schneidend angesehen werden können, noch erweitern; für den vorliegenden Zweck genügte es, nach den Regeln der geometrischen Optik zu verfahren.

Unter Anwendung der besprochenen Vernachlässigungen läßt sich jetzt die Größe des Gangunterschiedes für den räumlichen Fall leicht berechnen. Es ergibt sich genau der gleiche Wert wie in der Ebene. *Gleichung (6) stellt also den Gangunterschied nicht nur für den „ebenen", sondern auch für den „räumlichen" Strahlenverlauf dar.*

§ 5. Die Diskussion der bisherigen Überlegungen und Rechnungen ergibt folgendes:

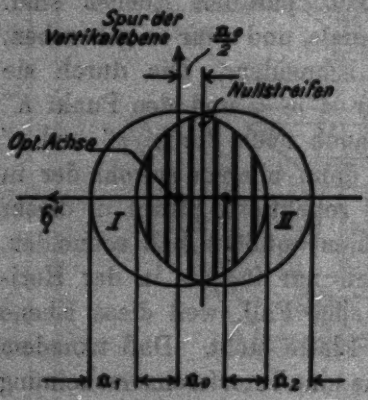


Fig. 5.

Der an der Vorderfläche von P' reflektierte Lichtkegel erzeugt in der Brennebene die helle, *streng* kreisförmige Fläche I (Fig. 5), deren Mittelpunkt in der optischen Achse liegt, während der an der Rückseite von P' reflektierte Kegel eine *praktisch* kreisförmige Fläche II hervorbringt, deren Mittelpunkt streng um $a_0 = \frac{d \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}$ seitlich verschoben ist.

Da nur durch Zusammenwirken von Strahlen aus dem aus der Vorderseite *und* dem an der Rückseite der Platte reflektierten Strahlenkegel Interferenzen erzeugt werden, so

können Interferenzkurven nur auf dem Teil der Flächen auftreten, auf dem sie sich überdecken.

Aus Gleichung (6) geht hervor, daß die Erscheinung wegen der linearen Abhängigkeit des Δ von $\mathfrak{y}''$ symmetrisch zu einem „Nullstreifen" sein muß, der um $\mathfrak{y}'' = -\frac{a_0}{2}$ seitlich der optischen Achse verschoben ist.

Zur weiteren Diskussion der Interferenzkurven mag eine graphische Darstellung (Fig. 6) der Gleichung (6) benutzt werden,

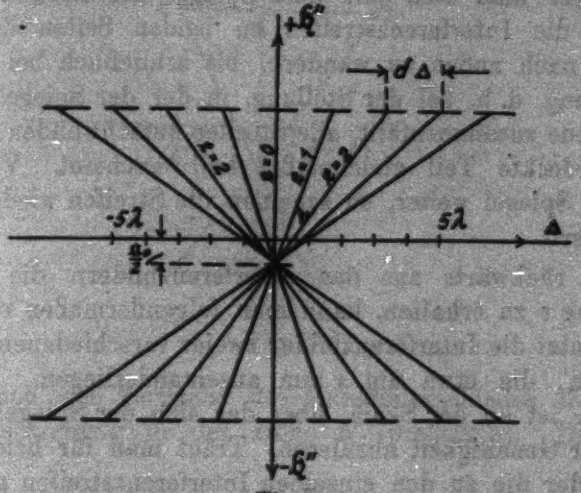


Fig. 6.

die besonders für spätere Betrachtungen von Linsen mit Aberrationen von Nutzen sein wird.

Trägt man etwa für eine bestimmte Linse und planparallele Platte mit der festen Neigung φ den Gangunterschied Δ in seiner Abhängigkeit von der Höhe $\mathfrak{y}''$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit Δ als Abszisse und $\mathfrak{y}''$ als Ordinate, sowie ε als Parameter auf, so erhält man gerade Linien, die sich alle in dem Punkte $\mathfrak{y}'' = -\frac{a_0}{2}$ schneiden. Mit wachsendem ε wird für ein bestimmtes $\mathfrak{y}''$ der Gangunterschied größer, d. h. die Neigung der Geraden geringer, denn es gilt:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathfrak{y}'' + \frac{a_0}{2}}{\Delta} = \frac{f'}{a_0 \cdot 2\varepsilon}.$$

Um die Abstände der Interferenzstreifen zu erhalten, hat man nur die zu den Abszissen $0, \lambda, \ldots\ldots n \cdot \lambda$ gehörigen $\mathfrak{y}''$ aufzusuchen. Man sieht, daß die Streifenabstände gleich sind, daß sie mit wachsendem e kleiner werden, daß sie für $+e$ und $-e$, d. h. für Spiegelstellungen symmetrisch zur Brennebene der Linse gleich bleiben, und daß sie proportional der Wellenlänge λ des angewandten Lichtes sind, vorausgesetzt, daß die Linse auch chromatisch ideal abbildet, d. h. für alle Farben die gleiche Brennweite besitzt.

Nähert man sich mit dem Spiegel der Brennebene, so scheinen die Interferenzstreifen zu beiden Seiten des Nullstreifens nach außen zu wandern, bis schließlich bei der sog. Nullstellung, d. h. bei der Stellung, in der der Spiegel mit der Brennebene zusammenfällt, alle Streifen verschwunden sind und der überdeckte Teil gleichmäßig hell erscheint. Verschiebt man den Spiegel weiter, so scheinen die Streifen wieder herein zu wandern.

Um rückwärts aus den Interferenzbildern die Spiegelentfernung e zu erhalten, kann man folgendermaßen verfahren: Man benutzt die Interferenzbilder zweier verschiedenen Spiegelstellungen, die etwa um x mm auseinanderliegen. Die Entfernung x ist an der Skala, über der sich der Spiegel bewegt, mit hoher Genauigkeit abzulesen. Trägt man für beide Interferenzbilder die zu den einzelnen Interferenzstreifen gehörigen Höhen $\mathfrak{y}''$ in ihrer Abhängigkeit vom Gangunterschied Δ auf, so erhält man zwei Gerade I und II, wie sie Fig. 7 darstellt. Entnimmt man die zu einer bestimmten Höhe $\mathfrak{y}''$ gehörigen Gangunterschiede, so gilt für sie:

$$\Delta_1 = \frac{a_0}{f^2}(2\mathfrak{y}'' + a_0)e$$

und

$$\Delta_2 = \frac{a_0}{f^2}(2\mathfrak{y}'' + a_0)(e + x).$$

Bildet man

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \frac{a_0}{f^2}(2\mathfrak{y}'' + a_0)x$$

und bedenkt man, daß $\Delta_2 - \Delta_1$ in der Figur durch die in der Höhe $\mathfrak{y}''$ gemessene Entfernung $a\,b$ der beiden Geraden I und

II dargestellt wird, so erhält man, wenn man diese Entfernung durch die Spiegelverschiebung x teilt, direkt den Wert:

$$\frac{a_0}{f^2}(2\mathfrak{y}'' + a_0) = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{x} = d\Delta,$$

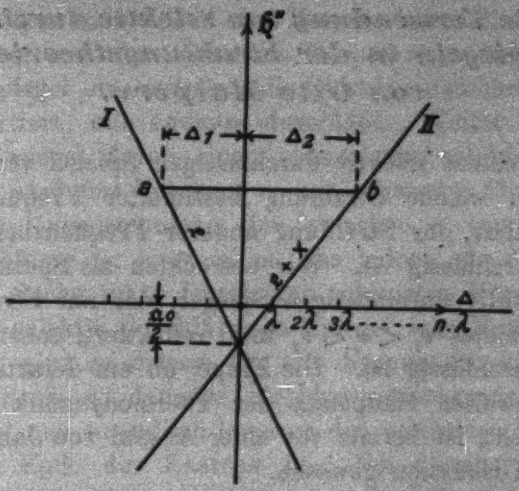


Fig. 7.

der zugleich den Zuwachs des Gangunterschiedes für 1 mm Spiegelverschiebung in der Höhe $\mathfrak{y}''$ wiedergibt. Die Quotienten:

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{d\Delta}, \qquad \text{bzw. } \varepsilon + x = \frac{\Delta_2}{d\Delta}$$

stellen nun die gesuchten Spiegelabstände von der Brennebene dar. Man sieht, daß zu ihrer Berechnung außer der leicht festzustellenden Spiegelverschiebung x nur Größen notwendig sind, die aus den Interferenzbildern direkt entnommen werden können.

Breslau, Physikalisches Institut, Mai 1923.

(Eingegangen 16. Juni 1923.)

2. *Über die Verwendung von selektiv durchlässigen Spiegeln in der Strahlungstheorie;* *von Otto Halpern.*

Unter einem selektiv durchlässigen Spiegel verstehen wir eine Platte, welche Strahlung bestimmter Frequenzbereiche total reflektiert, für Strahlung anderer Frequenzbereiche vollkommen durchlässig ist. Wir betrachten als Spezialfall einen solchen selektiv durchlässigen Spiegel, der nur Strahlen eines Frequenzgebietes $\nu_1 < \nu < \nu_2$ total reflektiert, sonst aber vollkommen durchlässig ist. Die Frage, ob ein derartiger Spiegel mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik verträglich ist oder nicht, ist bereits vor einer Anzahl von Jahren Gegenstand der Diskussion gewesen.

W. Wien[1]) hat in seiner bekannten großen Arbeit einen Prozeß unter Verwendung eines ähnlichen Spiegels angegeben, welcher Wärme kompensationslos in Arbeit zu verwandeln gestatten sollte. Dieser Prozeß ist Gegenstand einer ausführlichen Kritik Reiches[2]) gewesen, der ihn als unrichtig erklärte und darüber hinaus zum Schluß kam, daß ganz allgemein selektiv durchlässige Spiegel ohne Verletzung des zweiten Hauptsatzes in der Strahlungstheorie Verwendung finden könnten.

Wir halten jenen Teil der Reicheschen Arbeit, in welcher die Unrichtigkeit des Wienschen Prozesses dargetan wird, für zutreffend. Doch glauben wir nicht, daß diese Kritik das Wesentliche der eingangs gestellten Frage trifft. Wir behaupten nämlich, daß der Wiensche Satz von der Unverträglichkeit eines selektiv durchlässigen Spiegels mit dem zweiten Hauptsatz zu Recht besteht, wenn auch der von Wien gegebene Beweis für seine Ansicht unrichtig sein mag.

Zum Nachweis unserer Behauptung führen wir folgenden Prozeß durch: Ein schwarzer Körper von der Temperatur T

1) W. Wien, Wied. Ann. 52. S. 132. 1894.
2) F. Reiche, Ann. d. Phys. 25. S. 521. 1908.

bilde den Boden eines rechteckigen, sonst von weißen Wänden begrenzten Gefäßes vom Volumen V, welches durch einen vollkommen reflektierenden Spiegel in zwei Teile v_1 und v_2 geteilt sei. In dem dem schwarzen Körper anliegenden Volumen v_1 befindet sich natürlich schwarze Strahlung von der Temperatur T. Der andere Teil des Kastens sei vollkommen leer. Wir schieben vor den schwarzen Körper einen selektiv durchlässigen Spiegel ein, welcher alle Strahlen zwischen ν_1 und ν_2 total reflektiert, alle anderen durchläßt. Weiter ersetzen wir den Mittelspiegel durch einen ebensolchen selektiven Spiegel. Hierdurch wird das Volumen v_2 mit schwarzer Strahlung aller Frequenzen, ausgenommen der zwischen ν_1 und ν_2 erfüllt. (Diese Erfüllung ist irreversibel, was jedoch für das Folgende nichts zur Sache tut.) Durch den schwarzen Körper, der nur durch den selektiv durchlässigen Spiegel vom Hohlraum V getrennt ist, wird in diesem für alle Frequenzen kleiner als ν_1 und größer als ν_2 dauernd Strahlungsgleichgewicht erhalten. Wir ziehen nun unendlich langsam den selektiven Mittelspiegel gegen das Ende des Kastens zu. Bei diesem Prozeß wird lediglich die Strahlung zwischen ν_1 und ν_2 beeinflußt, da für die andere Strahlung die Stellung der durchlässigen Platte belanglos ist. Die Strahlung zwischen ν_1 und ν_2 leistet durch Reflexion am beweglichen Spiegel Arbeit und verwandelt sich dabei in solche von kleinerer Frequenz. Wenn wir am Ende unseres passend dimensionierten[1]) Kastens ankommen, ist die ganze Strahlung aus dem Frequenzbereich zwischen ν_1 und ν_2 verschwunden, dabei wurde von ihr ein gewisses Quantum Arbeit geleistet, deren Berechnung zwar leicht möglich, aber überflüssig ist. Der andere Teil der Strahlungsenergie wurde als Strahlung kleinerer Frequenz vom schwarzen Körper absorbiert. Schieben wir nun wieder den selektiv durchlässigen Spiegel in seine Anfangslage zurück, so müssen wir dabei keine Arbeit leisten, da er ja für alle im Hohlraum noch vorhandenen Strahlen vollkommen durchlässig ist. Hierauf heben wir den über dem schwarzen Körper liegenden Spiegel auf, hierdurch wird (übrigens in irreversibler Weise) das Volumen v_1 wieder mit Strahlung zwischen ν_1 und ν_2 erfüllt, der Hohl-

1) Es muß $v_1 \nu_2^3 = (v_1 + v_2) \nu_1^3$.

raum befindet sich somit in jenem Stadium, wie vor Beginn des Prozesses. Der ganze Effekt besteht darin, daß dem schwarzen Körper Wärme entzogen und diese in Arbeit verwandelt wurde.[1]) Wir haben damit in, wie wir glauben, einwandfreier Weise dargetan, daß die Existenz eines selektiv durchlässigen Spiegels im Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz steht.

Dabei wurde in keiner Weise eine Voraussetzung über die Energieverteilungskurve der schwarzen Strahlung eingeführt, vielmehr lediglich der elektrodynamische Teil des Wienschen Verschiebungsgesetzes verwendet. Unser Beweis gilt also unabhängig von jeder Gestalt der Strahlungsformel. Es läßt sich also aus ihm nicht, wie Reiche es beim Wienschen Beweis versucht hat, ein Anhaltspunkt zu deren Ableitung gewinnen.

Aus dem Institut für Theoretische Physik
Universität Wien.

1) Ein ganz ähnlicher Prozeß wurde von Boguslavski in seiner Publikation in der Physik. Zeitschr. 23. S. 209. 1922 verwendet. Seine Arbeit ist mir zum großen Teil unverständlich geblieben, doch kann so viel mit Sicherheit gesagt werden, daß die Schlüsse, die er aus seinem thermodynamischen Prozeß zieht, falsch sind.

(Eingegangen 6. August 1923.)

3. *Untersuchungen an einem Glimmlicht-Gleichrichter für Wechselstrom;* *von Hans Kneser.*

(Hierzu Tafel I und II.)

Die Hydra-Werke (Berlin) stellen einen Glimmlicht-Gleichrichter für Wechselstrom her, bei dem die Abhängigkeit des Kathodenfalles von der Elektrodenoberfläche zur Erzielung einer Ventilwirkung ausgenützt wird.

I. Konstruktion des Gleichrichters.

Der Gleichrichter ist mit einer großen zylinderförmigen Elektrode *A* (Fig. 1) und einer viel kleineren, stiftförmigen *B*, beide aus Aluminium, versehen; ihre Oberflächen verhalten sich schätzungsweise wie 380 : 1. Beide Elektroden sind in ein zylindrisches Glasrohr eingebaut, das nach Angabe der Firma mit einem Gemisch von He und Ne gefüllt ist, in dem sich aber noch Beimengungen von Wasserstoff, Xenon und Quecksilber spektroskopisch nachweisen lassen. Die Stromzuführung zu den Elektroden wird durch einen gewöhnlichen Glühlampensockel *C* bewirkt, der das Glasrohr abschließt.

Fig. 1.

Bei der Demonstration dieses Gleichrichters zeigte sich die folgende merkwürdige Erscheinung: Legt man eine Wechselspannung von etwa 140—160 Volt$_{\text{eff}}$ an die Elektroden, so tritt zwar eine Ventilwirkung ein, d. h. ein in Reihe geschalteter Gleichstrommesser zeigt einen Ausschlag, dieser Strom passiert jedoch den Gleichrichter nicht, wie man erwarten sollte, in der Richtung von der kleinen zur großen Elektrode, sondern umgekehrt; die kleine Elektrode fungiert also als Kathode. Bei höheren Wechselspannungen kehrt sich die Richtung des gleichgerichteten Stromes plötzlich um, und die Stromstärke nimmt weit höhere Werte an. Diese

Erscheinung gab den Anlaß zur systematischen Untersuchung des Gleichrichters, zu der ich von Hrn. Prof. Zenneck veranlaßt wurde.

II. Gleichstromcharakteristik.

Fig. 2a zeigt die Gleichstromcharakteristik. Die positiven Abszissen geben die Stärke des von der kleinen Elektrode zur großen fließenden Stromes an, die positiven Ordinaten die entsprechende Spannung. In Fig. 2b ist der Deutlichkeit halber der negative Teil der Charakteristik mit 10fach vergrößerten Abszissen herausgezeichnet. Aus den Figuren geht hervor, daß der negative Strom bei einer niedrigeren Spannung (— 192 Volt) einsetzt als der positive (+ 240 Volt), und zwar mit einem endlichen Wert (A' B'). Bei weiterer Steigerung der positiven

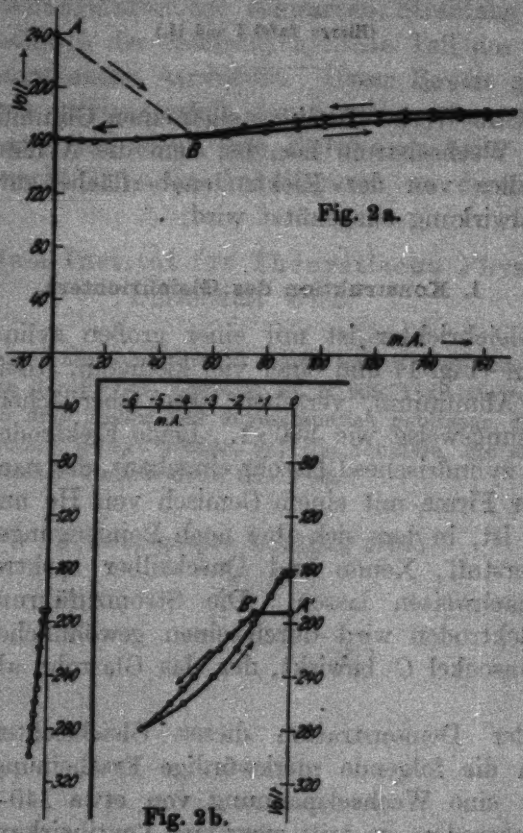


Fig. 2a.

Fig. 2b.

Spannung nimmt jedoch der positive Strom über den labilen Teil *A B* hinweg weit höhere Werte an als der negative.[1])

Ist die kleine Elektrode negativ, so tritt nur an ihr eine Leuchterscheinung, das negative Glimmlicht, auf, während weder an der großen Elektrode noch zwischen beiden ein Leuchten wahrzunehmen ist (Fig. 3[2]), d. h. eine positive Lichtsäule ist nicht vorhanden; die Entladung geht also in derjenigen Form vor sich, die man als negativen Spitzenstrom bezeichnet[3]). Die Einsatzspannung ist die Ionisierungsspannung an einer negativen Leiterspitze. Bei Steigerung der Spannung bis 300 Volt ändert sich die Leuchterscheinung nicht; es reichen also diese Spannungen nicht aus, um den Spitzenstrom in einen Glimmstrom zu verwandeln, der wegen der kleinen Oberfläche der Kathode anomalen Kathodenfall ergeben würde.

Ist dagegen die kleine Elektrode positiv, so genügt eine Spannung von weniger als 240 Volt nicht, um einen positiven Spitzenstrom an der kleinen Elektrode hervorzurufen, da ja bekanntlich der positive Spitzenstrom unter sonst gleichen Umständen höhere Spannungen erfordert als der negative. Bei 240 Volt (Punkt *A* der Fig. 2a) setzt die Entladung ein, geht aber dann sofort in den Glimmstrom über, dem bei den benützten Stromstärken in der großen Elektrode eine Kathode mit normalem Kathodenfall zur Verfügung steht; die Stärke dieses Glimmstromes nimmt daher bei verhältnismäßig niederen Spannungen hohe Werte an (Fig. 2a).

An der kleinen Elektrode zeigt sich dabei ein kleiner positiver Lichtansatz (Figg. 4 und 5). Die Innenseite der großen Elektrode ist mit negativem Glimmlicht bedeckt (Fig. 4), das bei höheren Stromstärken die ganze Kathodenoberfläche, und zwar auch die äußere, überzieht (Fig. 5).

III. Ventilcharakteristik.

Fig. 6a zeigt die Ventilcharakteristik; die als Abszissen aufgetragenen Mittelwerte des gleichgerichteten Stromes wurden

1) Die Hysteresis, d. h. die Abweichung des aufsteigenden Astes der Charakteristik vom absteigenden, ist von A. Rüttenauer (Zschr. f. Phys. 11. 1, S. 33, 1923) untersucht. Sie ist abhängig von der Zusammensetzung des Gasgemisches.

2) Figg. 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 u. 11 befinden sich auf Taf. I u. II.

3) J. Stark, Elektr. in Gasen (Leipzig 1902), S. 138 und J. Stark, Wiss. Veröff. d. Siemens-Konzerns, Bd. 11, S. 209, 1922.

mit einem Drehspulenstrommesser, die Effektivwerte der Spannungen mit einem Hitzdrahtvoltmeter gemessen. Sobald die Effektivwerte der Spannungen 136 Volt, bzw. die Maximal-

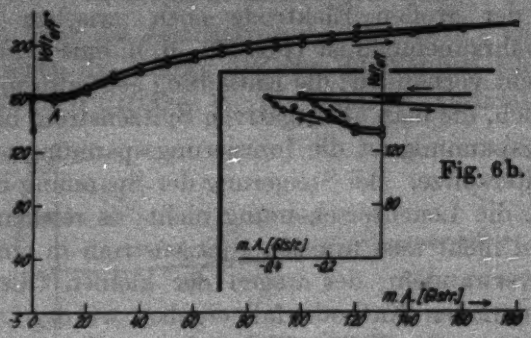


Fig. 6b.

Fig. 6a.

werte 192 Volt (vgl. Punkt A' der Gleichstromcharakteristik Fig. 2b) überschreiten, setzt ein negativer Strom ein, wobei natürlich nur die negativen Spannungen wirksam sind. Dieser Teil der Ventilcharakteristik ist wiederum in Fig. 6b mit 100fach vergrößerten Abszissen herausgezeichnet. Läßt man die Spannung weiter anwachsen, so überschreiten auch die positiven Amplituden ihren Grenzwert von 240 Volt (Punkt A der Gleichstromcharakteristik, Fig. 2a), und es geht nunmehr in beiden Richtungen Strom durch den Gleichrichter, wobei derjenige in positiver Richtung weit überwiegt, so daß der Mittelwert stark positiv ist. Das Glimmlicht tritt nun abwechselnd an der großen und an der kleinen Elektrode auf, während das Auge nur ein dauerndes Leuchten beider Elektroden wahrnimmt. Diesen Zustand zeigen Figg. 7 und 8. Das erste Bild (Fig. 7) ist bei 8 Milliamp., entsprechend Fig. 4, aufgenommen, also kurz nach dem Einsetzen des positiven Stromes. Fig. 8, bei 150 Milliamp. aufgenommen, zeigt schon die ganze große Elektrode auch an ihrer Außenseite vom Glimmlicht bedeckt. An der kleinen Elektrode erkennt man mit dem Auge sowohl das negative Glimmlicht, wie den helleren, bläulich gefärbten, positiven Lichtansatz, die miteinander in jeder Periode abwechseln.

IV. Stromverlauf im Gleichrichter.

Endlich wurde mit Hilfe der Braunschen Röhre auf bewegter Platte[1]) der zeitliche Verlauf des Stromes aufgenommen. Fig. 9 zeigt den Verlauf des Stromes bei einer mittleren Stromstärke von 8 Milliamp., also im Punkte *A* der Ventilcharakteristik (Fig. 6a). Man erkennt, daß die negativen Maximalströme 5 Milliamp. nicht überschreiten, während die positiven 80 Milliamp. erreichen. Der steil ansteigende Teil der Kurve entspricht der Strecke *A B* der Gleichstromcharakteristik (Fig. 2a); er wird also in äußerst kurzer Zeit durchlaufen. Die Stufe im absteigenden Teil ist einer höheren Harmonischen des Spannungsverlaufes zuzuschreiben. Die erste Periode ist sowohl in Fig. 9 wie in Fig. 10 an Hand des Negativs nachgezeichnet, da die steilen Teile der Kurven in den Kopien nicht deutlich erkennbar sind. Die folgende Kurve (Fig. 10) ist bei einer mittleren Stromstärke von 150 Milliamp. aufgenommen. Die positiven Maximalströme erreichen den hohen Betrag von 1,8 Amp. Damit hierbei die Ausschläge des Kathodenstrahles nicht den Bereich des Fluoreszenzschirmes überschritten, mußten die Ablenkungsspulen sehr weit von der Braunschen Röhre entfernt werden; so kommt es, daß die negativen Ströme in Fig. 10 nicht mehr zu erkennen sind. Fig. 10 zeigt also, daß die Verhältnisse bei einer mittleren Stromstärke von 150 Milliamp., d. i. etwa die Betriebsstromstärke, günstiger liegen, als das Oszillogramm im Prospekt der Hydra-Werke angibt.

V. Betrieb mit Drosselspule.

Schaltet man in den Stromkreis eines elektrischen Ventils eine Drosselspule hoher Induktanz, so tritt bekanntlich außer der Herabsetzung der Stromstärke eine Verlängerung der Zeit ein, während welcher das Ventil Strom durchläßt (Durchlaßzeit).[2]) Diese Erscheinungen wurden auch am vorliegenden Glimmlichtgleichrichter festgestellt. Um Stromstärken von etwa 0,2 Amp. (Betriebsstrom) zu erzielen, waren natürlich weit höhere Spannungen erforderlich als bisher. Diese wurden einem mit 220 $Volt_{eff.}$ betriebenen Transformator entnommen.

1) Vgl. J. Zenneck, Phys. Zschr. 14, S. 226, 1913.

2) Vgl. hierzu: N. Papalexi (Ann. d. Ph. 39, S. 976, 1912) und G. Joos (Jahrb. f. drahtl. Tel. 19, S. 109, 1922).

Die Streuinduktanz seiner Sekundärwicklung erwies sich als vollkommen ausreichend, um eine starke Drosselung zu bewirken. Die Spannung wurde mit Hilfe eines Vorschaltwiderstandes im Primärkreis geregelt, während sich im Sekundärkreis kein nennenswerter Ohmscher Widerstand befand. Bei geeigneter Konstruktion des Transformators dürfte sich ein Vorschaltwiderstand überhaupt erübrigen; die Eisenverluste des Transformators werden dann gegenüber den beim Betrieb ohne Drosselspule im Vorschaltwiderstand auftretenden Verlusten nicht ins Gewicht fallen. — Die photographische Aufnahme des zeitlichen Stromverlaufes läßt deutlich die Wirkung der Drosselspule erkennen (Fig. 11, aufgenommen bei 253 Volt_{eff} und 0,15 Amp.). Die Durchlaßzeit erstreckt sich über mehr als $^1/_2$ Periode, während sie in Fig. 10 nur $^1/_5$ Periode beträgt. Die Maximalwerte sind gegenüber denjenigen beim Betrieb ohne Drosselspule sehr stark herabgesetzt; sie betragen nur etwa 0,5 Amp.

Hat man den Gleichrichter längere Zeit — etwa 100 Stunden — arbeiten lassen, so zeigt sich an ihm, auch bei normaler Schaltung, insofern eine Veränderung, als denselben Spannungen höhere Stromstärken als zuvor (vgl. Ventilcharakteristik, Fig. 6) entsprechen, d. h. das Entladungsrohr ist, wahrscheinlich infolge Gasabgabe der Elektroden, weicher geworden. Demnach ist auch der zeitliche Stromverlauf gegen den auf Fig. 10 dargestellten um ein Geringes verändert: Die Maximalwerte sind niedriger, die Durchlaßzeiten größer als in Fig. 10, während der Verlauf des negativen Stromes noch merklich derselbe ist. Es läßt sich aber auch unter diesen Umständen mit Hilfe der Drosselspule bei derselben Gleichstromstärke eine weitere Verminderung der Maximalströme um etwa 50 Proz. erzielen.

Der Gleichrichter wird zweifellos in den Zeiten am stärksten beansprucht, in denen die Stromstärke besonders hohe Werte annimmt. Es liegt die Vermutung nahe, daß der Betrieb mit Drosselspule, die die Maximalwerte des Stroms stark herabdrückt, auch für die Lebensdauer des Gleichrichters günstig ist.

München, Physikal. Institut der Technischen Hochschule,
15. Juli 1923.

(Eingegangen 18. Juli 1923.)

4. *Untersuchung stehender elektromagnetischer Wellen mit ungedämpfter Erregung;*

von Walter Kopp.

(Gießener Dissertation.)

Einleitung.

Bei seinen Messungen im Strahlungsfelde eines ungedämpften Hertzschen und Abrahamschen Erregers fand L. Bergmann[1]), als er die Wellenlänge der vom Erreger ausgesandten Schwingungen mittels der Methode der stehenden Wellen maß, folgendes interessante Ergebnis: Die Entfernung des Senders von der Reflexionswand war von Einfluß auf die Ausbildung der stehenden Welle, und zwar derart, daß die Amplituden der stehenden Welle am größten waren, wenn der Sender im Abstand eines ungeraden Vielfachen der viertel Wellenlänge, also in einem Schwingungsbauch sich befand, sie wurden wesentlich kleiner, wenn man den Sender um $^1/_4$ aus dieser Lage also in einen Schwingungsknoten verschob, was deutlich aus den von Bergmann[2]) gefundenen Kurven hervorgeht. Die ganze Ausbildung der stehenden Welle war um so schlechter, je näher der Sender der Reflexionswand stand. Da der benutzte Glühkathodenröhrensender ungedämpfte Wellen ohne Oberschwingungen aussandte, konnte Bergmann auf den Gedanken kommen, daß bei genauer Einstellung eines solchen Senders in eine Knotenlage überhaupt keine Ausbildung einer stehenden Welle mehr eintreten könne. Die von Bergmann in seiner Arbeit bereits angekündigte genaue Untersuchung dieser abnormen Erscheinung ist von mir durchgeführt worden und bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

1) L. Bergmann, Dissertation Gießen 1921; Ann. d. Phys. 67. S. 13 ff. 1922.

2) L. Bergmann, a. a. O., Fig. 11. S. 27.

Die Sende- und Empfangsapperatur.

Zur Erzeugung der Schwingungen wurden Glühkathodenröhren benutzt. Der hierzu nötige Aufbau erfolgte in der Hauptsache nach den Angaben, die Bergmann[1]) in seiner Arbeit gemacht hatte, so daß es sich erübrigt, an dieser Stelle genauer darauf einzugehen.

Nur für die spezielleren Untersuchungen waren einige Verbesserungen nötig.

Zunächst wurde die Fassung für die Elektronenröhre so gebaut, daß auch die Antennenstäbe ohne Klemmen in Hülsen gesteckt wurden und sowohl diese, wie auch die Steckhülsen für die Röhre in eine Fiberplatte eingelassen waren; es sollten beim Arbeiten mit kürzeren Wellenlängen keine überragenden Metallteile bei der Erregung der Schwingungen mit zur Wirkung kommen.

Sender und Empfänger waren genau gleich hoch und konnten mittels Lot senkrecht gestellt werden. Sie ließen sich zwischen Holzschienen, die mit Maßeinteilung versehen waren, sehr genau und an jeden beliebigen Punkt einstellen.

Es stellte sich aber im Laufe der Untersuchungen heraus, daß die Bewegungen des eigenen Körpers große Störungen verursachten. Daher wurde eine Einrichtung solcher Art getroffen, daß der Empfänger von dem Tisch aus, der die Meßinstrumente trug, mittels Seilübertragung durch Rollen verschoben wurde. Dabei wurde die vom Empfänger zurückgelegte Entfernung doppelt kontrolliert, indem jedesmal nach 1 cm Verschiebung eine Feder deutlich hörbar einschnappte und außerdem alle 5 cm eine kleine Glühlampe aufleuchtete.

Die Benutzung eines Vergleichsempfängers, wie ihn Bergmann[2]) zur Einstellung auf dieselbe Intensität benutzte, hatte für die speziellen Versuche keinen Zweck, da mit Verschiebung des Senders sich auch der Einfluß auf den Vergleichsempfänger änderte.

Allgemeine Messungen.

Es bestätigt sich zunächst, die auch von Bergmann und anderen[3]) erwähnte Erscheinung, daß bei ungedämpftem Emp-

1) L. Bergmann, a. a. O., S. 15 ff.

2) L. Bergmann, a. a. S., S. 19.

3) K. F. Lindman, Ann. d. Phys. 7. S. 824. 1902; W. Hammer, Diss. Halle 1910, Ber. d. Phys. Ges. B. S. 27. 1911; Herrmann, Diss. Halle 1913.

fang die ersten Maxima der stehenden Welle nach der Wand hinliegen. Bei genauer Einstellung läßt sich diese Erscheinung sogar bis zum 4. Maximum verfolgen. Es zeigten sich außerdem noch mehr Unregelmäßigkeiten, die zum Teil bei stark gedämpftem Empfang verschwanden, wodurch allerdings die Benutzung eines empfindlicheren Galvanometers erforderlich wurde. Für die weiterhin zu machenden Messungen war in praktischer Hinsicht noch folgende Feststellung wichtig: alle aufgenommenen Kurven zeigten starke Störungen, die ohne Zweifel von der Beschaffenheit des Raumes abhingen, worauf ich später noch zurückkommen werde.

Der kleinste Röhrentyp, die *K*-Röhre, arbeitete immer nur anfangs gut, nach kurzer Zeit aber zeigte das an den Empfänger angeschlossene Galvanometer starke Schwankungen, die auch mit dauernden Schwankungen im Heizstromamperemeter verbunden waren. Die *L*-Röhre arbeitete sehr gut und lieferte konstante Schwingungen, sie wurde bei den weiteren Untersuchungen ausschließlich benutzt. Sehr störend machten sich in der Zeit von 6 Uhr morgens bis 10 Uhr abends die mitunter sehr beträchtlichen Schwankungen der städtischen Spannung und somit auch der Gitterspannung und hierdurch der Wellenlänge geltend. Alle genaueren Messungen mußten infolgedessen nachts vorgenommen werden.

Theoretischer Teil.

Es war zunächst wichtig festzustellen, welches Ergebnis theoretisch aus dem Zusammenwirken der vom Erreger ausgehenden und an der Metallwand vollständig reflektierten Welle zu erwarten war. Es kommt für unseren Fall die Komponente der elektrischen Kraft in Betracht, die parallel zur Erregerachse schwingt, gemessen in der Äquatorebene. Wir betrachten die Wirkung der elektrischen Kraft für die hinlaufende und zurückkommende Welle und bekommen für die zurückgelegten Wege die in Fig. 1 angedeuteten Verhältnisse.

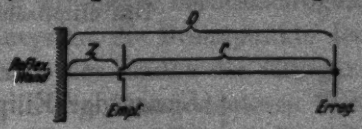


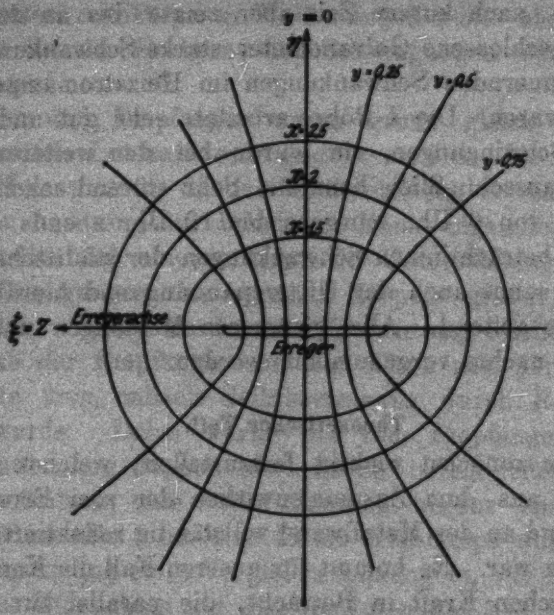
Fig. 1.

Für die ankommende Welle ist der bis zum Empfänger zurückgelegte Weg $r = D - Z$.

Für die reflektierte Welle $r' = 2D - r = D + Z$.

Diese Betrachtung legen wir für die Berechnung beim Hertzschen und Abrahamschen Sender zugrunde und führen zunächst die Berechnung für den letzteren durch.

Die Schwingungsvorgänge um einen stabförmigen Erreger hat M. Abraham[1]) theoretisch behandelt und wir benutzen die von ihm aufgestellten und auch von Caspar[2]) in seiner Dissertation verwandten Formeln zur Berechnung der Amplitude der stehenden Welle. Nach Abraham gelten für die beiden elektrischen Kraftkomponenten X, Y, die bei Benutzung von elliptischen Koordinaten x, y (Fig. 2) in Richtung der wachsenden x bzw. y verlaufen, folgende Ausdrücke:



Das elliptische Koordinatensystem.
Fig. 2.

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Längs der Ellipsen } x = \text{const} \\ X = -\, e^{-(p_n c t)} \dfrac{1}{p_n} \dfrac{E_n(y)}{\sqrt{x_n^2 - y^2}} \cdot \dfrac{H_n(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}. \end{array} \right.$$

1) M. Abraham, Ann. d. Phys. 66. S. 435. 1898 und Dissert. Berlin.
2) P. Caspar, Dissert. Gießen Ann. d. Phys. 51. S. 649; und Jahrbuch d. drahtl. Telegr. 13. S. 121. 1918.

$$(1)\quad \begin{cases} \text{Längs der Hyperbeln } y = \text{const} \\ Y = e^{-(p_n c t)} \dfrac{1}{p_n} \dfrac{E_n(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \dfrac{\overline{H}_n(x)}{\sqrt{1 - y^2}}. \end{cases}$$

Berücksichtigt man die für den Erreger als dünnen Stab geltenden Werte, so erhält man hieraus bei ungeradem n (in unserem Fall $n = 1$ = Grundschwingung) durch Trennung des reellen und imaginären Teils 2 Wertepaare für die elektrischen Komponenten

$$(2)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{A}{\sqrt{x^2 - 1}} \sin \dfrac{\pi n y}{2} \sin \dfrac{\pi n}{2} (x - c t), \\ Y_1 = \dfrac{A}{\sqrt{1 - y^2}} \cos \dfrac{\pi n y}{2} \cos \dfrac{\pi n}{2} (x - c t), \\ X_2 = \dfrac{A}{\sqrt{x^2 - 1}} \sin \dfrac{\pi n y}{2} \cos \dfrac{\pi n}{2} (x - c t), \\ Y_2 = \dfrac{-A}{\sqrt{1 - y_2}} \cos \dfrac{\pi n y}{2} \sin \dfrac{\pi n}{2} (x - c t). \end{cases}$$

Wobei A den Wert hat[1])

$$A = \frac{2\left(E'_n(1)\right)^2}{\pi^2 n^2 \sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Die durch die Gleichungen

$$\frac{\xi^2}{x^2} + \frac{\eta^2}{x^2 - 1} = 1, \qquad \xi/\eta \text{ gew. rechtwinkl. Koordin.}$$

in unseren Falle wird $\xi = Z = 0$,

$$\eta = r,$$

und

$$\frac{\xi^2}{y^2} - \frac{\eta^2}{1 - y^2} = 1$$

bestimmten elliptischen Koordinaten drücken wir jetzt durch gewöhnliche Koordinaten aus, indem wir dabei berücksichtigen, daß für das elliptische Koordinatensystem die Brennpunkte der konfokalen Ellipsen und Hyperbeln in den Enden des Erregerstabes liegen. Es gelten jetzt die in Fig. 2 angedeuteten Verhältnisse. Da $y = 0$, werden in der Formel 2 X_1 und $X_2 = 0$; es bleiben für die Berechnung nur Y_1 und Y_2, beide führen zu derselben Formel für die stehende Schwingung, da sie sich nur durch Anfangsbedingung unterscheiden.

1) P. Caspar, Ann. d. Phys. S. 673. und Abraham, S. 454.

Es sei Y_1 die elektrische Komponente $\mathfrak{E}_\delta$ parallel zur Erregerachse Z, und wir bekommen

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_\delta = \mathfrak{K}\dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}}\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}\left(\sqrt{1+r^2}-ct\right), \\ \text{und daraus folgt für die mit umgekehrter Phase reflektierte Welle} \\ \mathfrak{E}_\delta' = -\mathfrak{K}\dfrac{1}{\sqrt{1+r'^2}}\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}\left(\sqrt{1+r'^2}-ct\right), \end{cases}$$

wobei $\mathfrak{K} = \dfrac{2\left(E_1'(1)\right)^2}{\pi^2}$, unter Berücksichtigung der Grundschwingung, für die $n = 1$, gilt. E stellt die Stromverteilung längs des Leiters dar, $\mathfrak{K}$ die Konstante der Erregung.

Aus diesen Formeln erhält man, wenn für die Gesamtwirkung $\mathfrak{E}_\delta + \mathfrak{E}_\delta' = \mathfrak{A}\sin(T-\delta)$ gilt, wo $\mathfrak{A}$ die Gesamtamplitude und δ der Phasenunterschied bedeutet für die Amplitude der vom Abrahamschen Erreger erzeugten stehenden Welle[1]):

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{K}^2\Bigg[\dfrac{1}{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2+(D-Z)^2}+\dfrac{1}{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2+(D+Z)^2} \\ -\dfrac{2\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2+(D-Z)^2}-\sqrt{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2+(D+Z)^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2+(D-Z)^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2+(D+Z)^2}}\Bigg]. \end{cases}$$

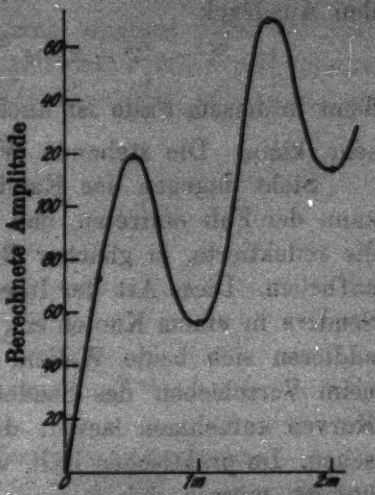
Aus Formel 4 ergaben sich folgende Tabellen und Kurven, wenn die Wellenlänge λ zu 2 m angenommen wird.

Tabelle zu Fig. 3 u. 4.

Z in m	$\mathfrak{A}$ für $D = 2$ m	$\mathfrak{A}$ für $D = 6$ m (Knoten)	$\mathfrak{A}$ für $D = 6{,}5$ m (Bauch)	$\mathfrak{A}$ für $D = 10$ m (Knoten)	$\mathfrak{A}$ für $D = 10{,}5$ m (Bauch)
0	0,00	0	0	0	0
0,25	72,00	—	20,6	—	7
0,50	118,50	38,5	29,5	20	19,0
0,75	—	—	20,7	—	—
1,00	55,00	5,65	4,8	2,45	2
1,50	169,80	35,8	32,5	—	19,65
2,00	113	12,4	10,0	—	3,74
2,50	—	4,0	34,4	—	—
3,00	—	21	14,6	—	—

1) M. Abraham, a. a. O., S. 444.

Die berechneten Kurven (Fig. 3) zeigen, daß die Ausbildung der stehenden Welle ungünstig ist, wenn der Sender sehr nahe der Wand steht. Sieht man von der durch die kugelförmige Ausbreitung der Welle bedingten Abnahme der Amplitude, der sog. Strahlungsdämpfung ab, so hat die Verschiebung des Erregers keinerlei Einfluß auf die Ausbildung der stehenden Welle. Berücksichtigt man diese Dämpfung und rückt den Sender näher nach der Wand hin in einen Knoten, so ist jetzt die Intensität der Welle sogar noch größer als für eine vorhergehende Bauchlage des Senders (Fig. 4) für $D = 6{,}5$ und $D = 6$ m.

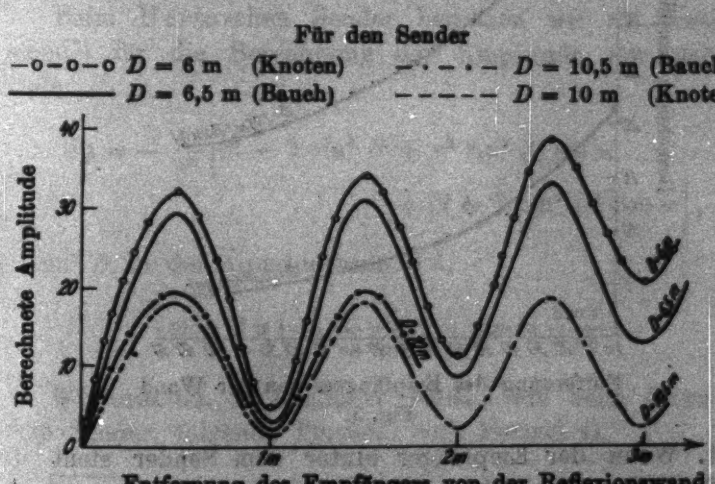


Entfernung des Empfängers von der Reflexionswand

Sender nahe der Wand b. 2 m

Fig. 3.

Die Unabhängigkeit der Ausbildung der stehenden Welle vom Senderabstand D geht auch ohne weiteres aus der Formel hervor. Denken wir uns die Schwingung ganz ungedämpft



Entfernung des Empfängers von der Reflexionswand

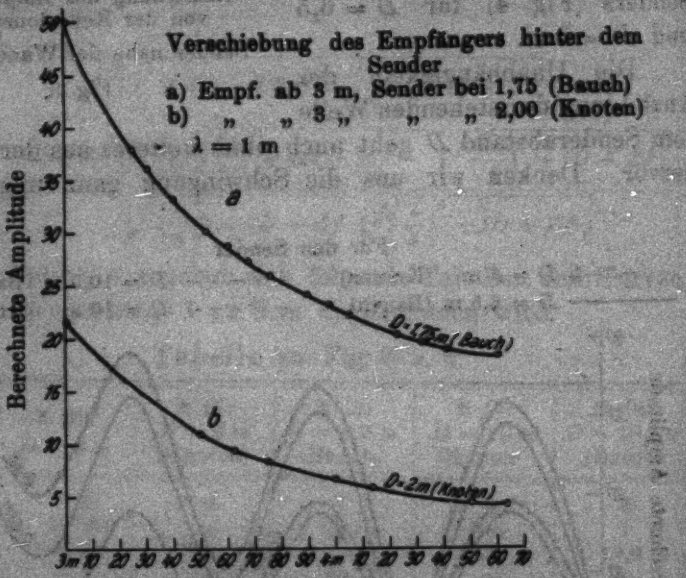
Fig. 4.

oder praktisch den Sender in große Entfernung gestellt, so wird das Bildungsgesetz der stehenden Welle dargestellt durch den Ausdruck

$$\mathfrak{A}^2 \sim \left[2 - 2\cos\frac{2\pi}{\lambda}(D - D - 2Z)\right],$$

denn in diesem Falle ist auch $\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2$ gegen $D - Z$ und $D + Z$ sehr klein. Die stehende Welle ist also unabhängig von D.

Steht dagegen der Empfänger hinter dem Sender, dann kann der Fall eintreten, daß die vom Sender ausgehende und die reflektierte, in gleicher Richtung laufende Welle einander aufheben. Diese Art der Interferenz tritt bei der Stellung des Senders in einem Knoten ein, für die Stellung in einem Bauch addieren sich beide Wellen, d. h., also es müssen sich jetzt beim Verschieben des Senders und feststehendem Empfänger Kurven aufnehmen lassen, die wie eine stehende Welle aussehen. Im praktischen Fall, wo die Strahlungsdämpfung hinzukommt, müssen sich folgende Verhältnisse ergeben:



Entfernung des Empfängers von der Wand

Fig. 5.

1. Wenn der Empfänger hinter dem Sender steht und vom Sender und der Wand weg verschoben wird, so muß sich eine Kurve ergeben, in der die Intensität stetig abnimmt und

sich in großer Entfernung asymptotisch der 0-Graden nähert (vgl. Fig. 5).

2. Eine analoge Kurve muß sich ergeben, wenn der Empfänger zwischen Sender und Reflexionswand steht und diesmal der Sender vom Empfänger und Reflexionswand weg verschoben wird (Fig. 6).

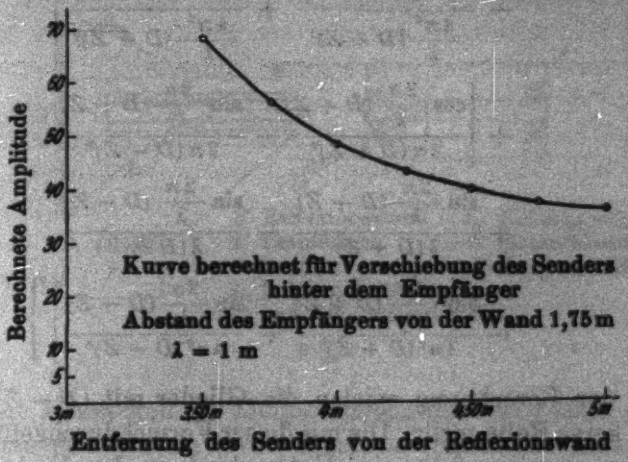


Fig. 6.

Beim Hertzschen Sender benutzen wir als Ausgangsformel[1]) für die Berechnung der Amplitude der stehenden Welle:

$$\mathfrak{E}_3 = -\frac{el}{r^3}\Big[(2 - 3\sin^2\vartheta + x^2\sin^2\vartheta)\sin w + (2 - 3\sin^2\vartheta)\cos w\Big],$$

wo $\sin^2\vartheta$ in der Äquatorebene $= 1$,

$$w = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right); \qquad x = \frac{2\pi r}{\lambda}.$$

Wir erhalten in ähnlicher Weise, wie beim Abrahamschen Sender, folgende Formeln (vgl. Formel 4).

1) Drude-König, Physik des Äthers, S. 540.

$$
(4)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{J}^2 = \left(\frac{s\,l\,4\pi^2}{\lambda}\right)^2 \Bigg\{ \Bigg[& \frac{\cos\frac{2\pi}{\lambda}(D+Z)}{\lambda(D+Z)} - \frac{\cos\frac{2\pi}{\lambda}(D-Z)}{\lambda(D-Z)} \\
& - \frac{\sin\frac{2\pi}{\lambda}(D+Z)}{2\pi(D+Z)^2} + \frac{\sin\frac{2\pi}{\lambda}(D-Z)}{2\pi(D-Z)^2} \\
& - \frac{\cos\frac{2\pi}{\lambda}(D+Z)}{\frac{4\pi^2}{\lambda}(D+Z)^3} + \frac{\cos\frac{2\pi}{\lambda}(D-Z)}{\frac{4\pi^2}{\lambda}(D-Z)^3} \Bigg]^2 \\
& + \Bigg[\frac{\cos\frac{2\pi}{\lambda}(D+Z)}{2\pi(D+Z)^2} - \frac{\sin\frac{2\pi}{\lambda}(D-Z)}{2\pi(D-Z)^2} \\
& + \frac{\sin\frac{2\pi}{\lambda}(D+Z)}{\lambda(D+Z)} - \frac{\sin\frac{2\pi}{\lambda}(D-Z)}{\lambda(D-Z)} \\
& - \frac{\sin\frac{2\pi}{\lambda}(D+Z)}{4\pi^2(D+Z)^3} + \frac{\sin\frac{2\pi}{\lambda}(D-Z)}{4\pi^2(D-Z)^3} \Bigg]^2 \Bigg\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Bei der Berechnung spielen die Glieder mit $(D-Z)^3$ und $(D+Z)^3$ keine Rolle mehr. Die mit dieser Formel durchgeführten Berechnungen zeigen fast keine Unterschiede in dem Verlauf der Kurven für den Abrahamschen und Hertzschen Sender.

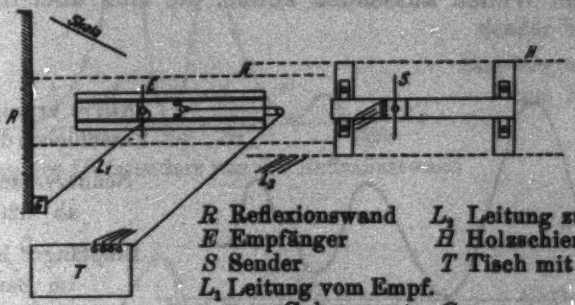
Experimenteller Teil.

Messungen im geschlossenen Raum.

Es wurde jetzt, um den Heizstrom möglichst konstant zu halten, mit zwei parallel geschalteten 6 Voltbatterien gearbeitet. Der Empfänger war stark gedämpft, mit 13 mm langem und 0,05 mm dickem Konstantandraht in jedem Antennenstab. Dabei war dieser Draht der Länge wegen um ein Zelluloidstäbchen gewickelt, das wieder in einem Glasrohr steckte, in dessen Enden die Messingstäbe festgekittet waren. Durch diese starke Dämpfung wurde die Intensität sehr herabgedrückt und die Benutzung eines Spiegelgalvanometers mit Fadenaufhängung nötig. (Empfindlichkeit 10^{-8} Amp.) Diese Empfindlichkeit war zwar zu groß, das hatte aber den Vorteil, daß man das Galvanometer und einen Widerstand hintereinander schalten konnte. Zu Vergleichszwecken konnte man so, wenn zwei

Messungen bei verschiedenen Dämpfungen gemacht wurden, durch Einschaltung eines entsprechenden Widerstandes trotzdem gleiche Ausschläge des Galvanometers erhalten. Die Ablesung geschah jetzt objektiv; auf einer 2 m vom Spiegel entfernten Meßplatte von 1—50 Skalenteilen spielte ein Lichtzeiger.

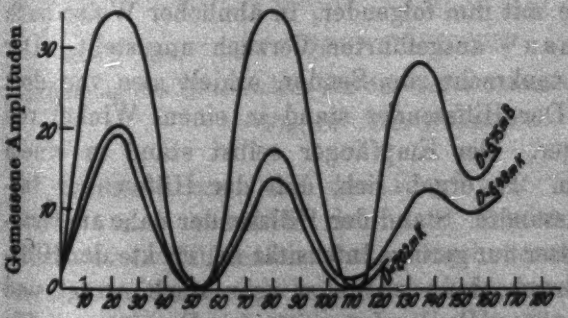
Fig. 7 gibt den gesamten Aufbau.



R Reflexionswand
E Empfänger
S Sender
L_1 Leitung vom Empf. zum Galvanometer *G*
L_2 Leitung zum Sender
H Holzschienen
T Tisch mit Meßinstr.

Fig. 7.

Die Messungen im Zimmer zeigen durchweg stark störende Einflüsse des Zimmers, vor allem von parallelen Eisenträgern und Leitungen. Entgegen der Theorie bestätigt sich die von Bergmann beobachtete Erscheinung, daß bei der Stellung des Senders in einen ungeraden vielfachen von $\lambda/4$ die Amplitude größer, in einem geraden vielfachen kleiner ist (Fig. 8).



Entfernung *D* des Senders

$a \sim \frac{25}{4}\lambda$ $D = 6{,}75$ m *B*

$b \sim \frac{24}{4}\lambda$ $D = 6{,}48$ m *K*

$c \sim \frac{26}{4}\lambda$ $D = 7{,}02$ m *K*

Fig. 8.

Eine Verschiebung des Senders bei zwischen der Reflexionswand und dem Sender feststehendem Empfänger ergab jetzt

statt der theoretisch gewonnenen Kurve abnehmender Intensität (vgl. Fig. 6) eine Kurve nach Art der stehenden Welle (Fig. 9).

Es war dieser Tatsache gegenüber vor allem die Frage zu prüfen, ob diese Erscheinung auf einer Rückwirkung der reflektierten Welle beruhte, d. h. ob der Sender als günstiger Resonator für die von ihm selbst ausgesandte und wieder zurückkehrende Welle als Leiterstück zum zweiten Male erregt werden und Wellen aussenden könne, die sich über die ersten lagerten.

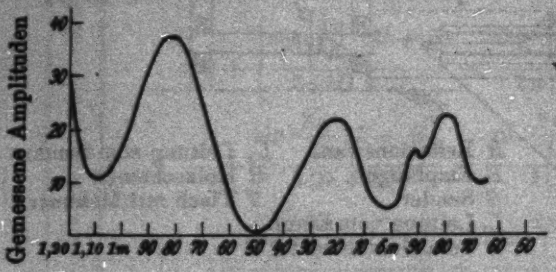
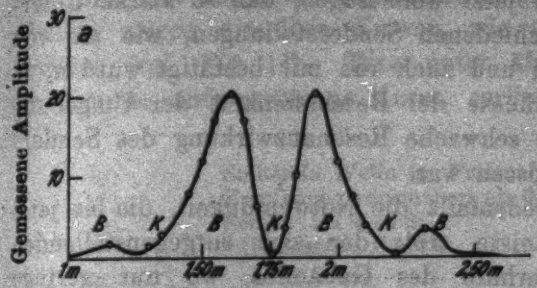


Fig. 9.

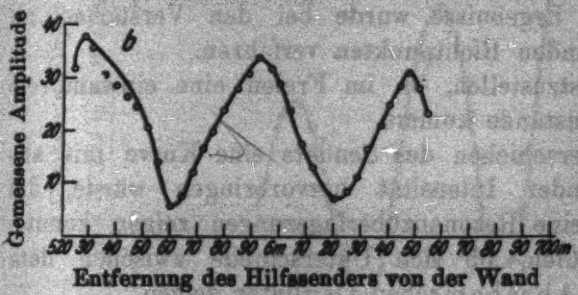
Um sich ein Bild über das Vorhandensein und die Größe dieser Resonanz zu machen, wurde folgender Weg eingeschlagen. Ein Hilfssender von denselben Dimensionen wie der Sender, bei dem aber die Röhre und die beiden Antennenstäbe durch ein einziges Leiterstück von derselben Länge ersetzt waren, konnte ebenfalls in der Senderempfängerebene verschoben werden. Es wurde mit ihm folgender, in ähnlicher Weise auch schon von Lindman[1]) ausgeführter Versuch angestellt. Der Empfänger stand senkrecht zum Sender, erhielt also von dort keine Erregung. Der Hilfssender stand in einem Winkel von 45° zum Empfänger. Der Empfänger selbst stand in einem Knoten bei 1,75 m. Es ergab sich, daß der Hilfssender tatsächlich Wellen aussandte. Stand der Hilfssender nahe am Empfänger, so zeigte dieser nur geringe Intensität an, rückte der Hilfssender in einen Bauch, dann wurde er sehr stark erregt und es stieg infolgedessen auch die Intensität im Empfänger. Sie nahm dann bis zum nächsten Knoten wieder ab. Für den zweiten Bauch war die Wirkung nur noch sehr schwach. Nach

1) K. F. Lindman, Ann. d. Phys. 7. S. 835 u. 845. 1902.

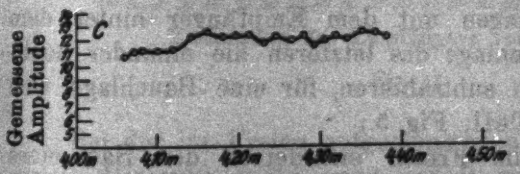
der Wand hin war der 2. Bauch nicht mehr einwandfrei festzustellen. Sonst war die Erscheinung auf beiden Seiten des Empfängers ziemlich symmetrisch (Fig. 10a).



Verschiebung des Hilfssenders
$\lambda \sim 90$ cm
Sender bei 2,90 m
Empfänger senkrecht zum Sender



Hilfssender verschoben hinter dem Sender
Sender bei 5 m



Hilfssender zwischen dem Empfänger und Sender
Sender bei 5 m

Fig. 10. Der Hilfssender.

Richtete man nun den Empfänger wieder parallel zum Sender und verschob den dem Sender ebenfalls parallel gerichteten Hilfssender bei festgehaltenem Empfänger, so ergaben sich in bezüglich der Wellenlänge regelmäßigen Abständen sehr starke Intensitätsänderungen im Empfänger (Fig. 10b). Auffallend war es, daß selbst in Entfernungen von mehreren Wellenlängen diese Wirkung noch sehr stark war und zwar trat deutlicher die Verstärkung der Intensität ein, wenn der Hilfssender in einem geraden vielfachen von $\lambda/4$ stand als in einem

Bauch. Zwischen Empfänger und Sender dagegen war die Wirkung des Hilfssenders merkwürdigerweise sehr gering (Fig. 10c).

Es ließ sich bis jetzt wohl sagen, daß so starke Unterschiede für die verschiedenen Senderstellungen, wie sie von Bergmann gefunden und auch von mir bestätigt wurden, in der Hauptsache Einflüsse der Beschaffenheit der Umgebung waren, daß aber eine schwache Resonanzwirkung des Senders keineswegs ausgeschlossen war.

Es ergab sich jedenfalls die Notwendigkeit, die bis jetzt festgestellten Verhältnisse, trotz den sich entgegenstellenden Schwierigkeiten außerhalb des Gebäudes, wo nur geringe Störungen zu erwarten waren, nachzuprüfen. Im Hinblick auf die theoretischen Ergebnisse wurde bei den Versuchen im Freien nach folgenden Richtpunkten verfahren.

1. Es war festzustellen, ob im Freien eine einwandfreie stehende Welle zustande kommt.

2. Ob ein Verschieben des Senders eine Kurve mit allgemein abnehmender Intensität hervorbringen würde, die gegebenenfalls kleine Resonanzüberlagerungen zeigen konnte.

3. Ist zu prüfen, ob sich Unterschiede zwischen dem Hertzschen und Abrahamschen Oszillator zeigen.

4. Ob bei Messungen mit dem Empfänger hinter dem Sender für eine Knotenlage des letzteren die einander nachlaufenden Wellen sich subtrahieren, für eine Bauchlage sich addieren. (Vgl. Th. Teil, Fig. 5.)

Die Messungen im Freien erforderten den Bau eines transportablen Metallschirmes. Er bestand aus einem mit Pappe beklebten 3 × 3 m großem Holzgestell. Die ganze Fläche war mit Aluminiumfolie beklebt.

Der Schirm war dreiteilig und die einzelnen Stücke konnten immer wieder fest miteinander verschraubt und in leitende Verbindung gebracht werden.

Die Messungen im Freien wurden auch in der Hauptsache wieder Nachts vorgenommen. Die Wellenlänge war durchschnittlich 80—100 cm. Bei dieser Wellenlänge war es nicht nötig, die Röhre zu stark zu beanspruchen. Bei Variation des Heizstroms setzen die Schwingungen immer bei bestimmten Amperezahlen aus, um dann wieder zu beginnen. Es handelt

sich hierbei wohl um Oberschwingungen. Es wurde diejenige Amperezahl des Heizstroms jedesmal gewählt, bei der die Intensität der Schwingungen am stärksten war.

Die jetzt mit dem Empfänger aufgenommenen stehenden Wellen zeigen dieselben Kurven, wie sie die Berechnungen ergaben (vgl. Fig. 11). Eine unter ähnlichen Verhältnissen im Zimmer aufgenommene Kurve verlief ganz unregelmäßig.

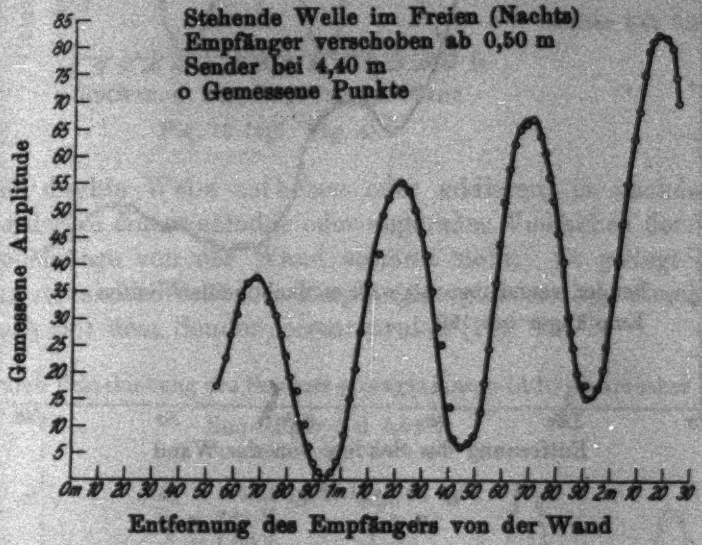


Fig. 11.

Bei der im Freien aufgenommenen Kurve müßte nur das zweite Minimum nicht ganz auf 0 zurückgehen. Vielleicht haben hier zwei über dieser Stelle parallel zur Erregerachse verlaufende Telephondrähte einen Einfluß. Jedenfalls war jetzt die Möglichkeit gegeben, die Abhängigkeit der Ausbildung der stehenden Welle von der Stellung des Senders genauer nachzuprüfen.

Es ergab sich die Kurve in Fig. 12.

Im allgemeinen nimmt jetzt die Intensität bei zunehmender Entfernung vom Empfänger ab, und zwar je größer die Entfernung ist, um so langsamer, wie es theoretisch sich ergibt. An drei Stellen ist jedoch ein deutliches Maximum wahrzunehmen, das in der Nähe der Wand am ausgeprägtesten

ist, was bei einer Resonanzwirkung ja erklärlich wäre. Die Maxima haben auch einen regelmäßigen Abstand, allerdings ist die Wellenlänge nicht mehr gewahrt, weil so lange die Gitterspannung nie konstant blieb.

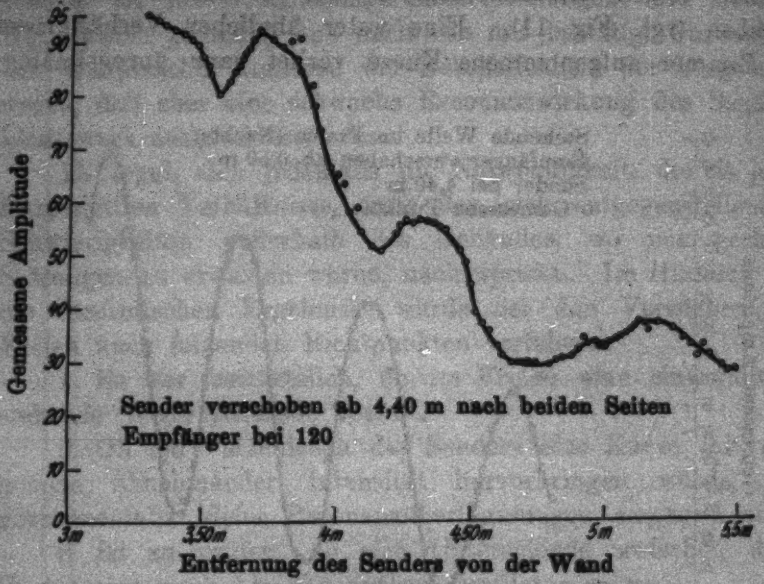


Fig. 12 (vgl. Fig. 6).

Eine sehr große Regelmäßigkeit war nicht zu erreichen, da der Sender immer mit der Hand verschoben wurde, und in der Zwischenzeit die Meßinstrumente nicht kontrolliert werden konnten. Bei mehrmaliger Kontrolle ergab sich immer wieder dieselbe Kurve, abgesehen von Unregelmäßigkeiten durch Spannungsänderungen. Der Genauigkeit halber wurden bei den Messungen Empfänger und Sender immer um höchstens 2 cm weiter geschoben, es konnte so nicht unbemerkt eine größere Intensitätsschwankung vorkommen, die nicht auf Kosten der Verschiebung kam.

Es konnte jetzt auch die schon vorher berechnete Erscheinung (vgl. Fig. 4) festgestellt werden, daß bei großer Entfernung des Senders von der Wand, die Strahlungsdämpfung keinen starken Einfluß mehr auf die Höhe der Maxima und Minima hatte Fig. 13).

Weiter mußte sich jetzt folgendes nachweisen lassen. Für eine Variation des Senders zwischen konstantem Empfänger und Reflexionswand müssen sich abwechselnd die reflektierte

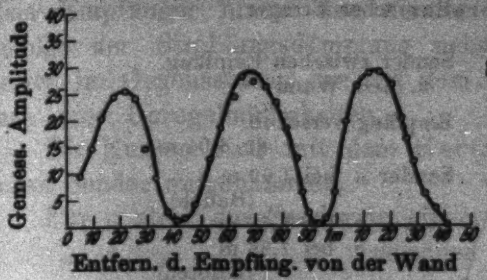


Fig. 13 (vgl. Fig. 4).

und direkte Welle aufheben oder addieren, je nachdem der Sender in einem geraden oder ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge von der Wand entfernt steht. Es gelingt so eine der stehenden Welle des Empfängers ganz analoge Erscheinung auch mit dem Sender hervorzurufen (Fig. 14).

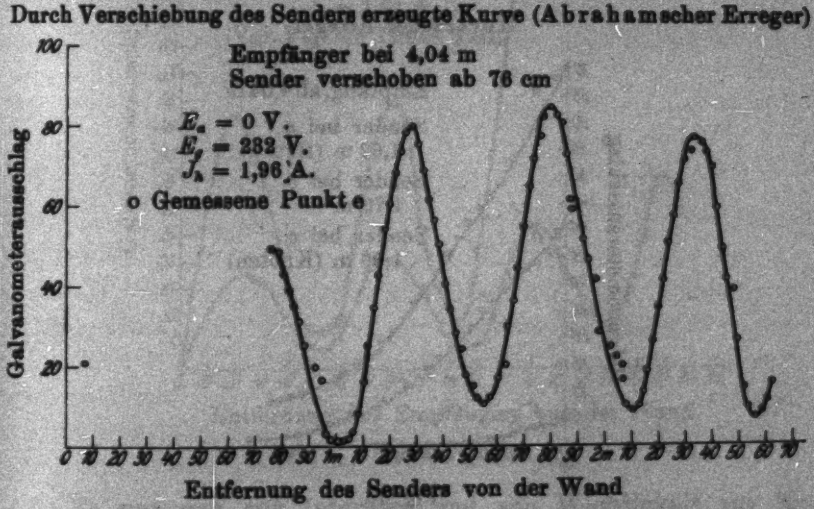


Fig. 14.

Dabei sind die mit dem Hertzschen und Abrahamschen Sender hervorgerufenen Kurven im wesentlichen gleich. Über kleine Unterschiede, die vielleicht bezüglich der Strahlungsdämpfung zwischen beiden Sendern bestehen, läßt sich in

Anbetracht der im Verhältnis dazu sicher viel größeren Unregelmäßigkeiten durch Intensitätsschwankungen nichts bestimmtes aussagen.

Abrahamscher Erreger

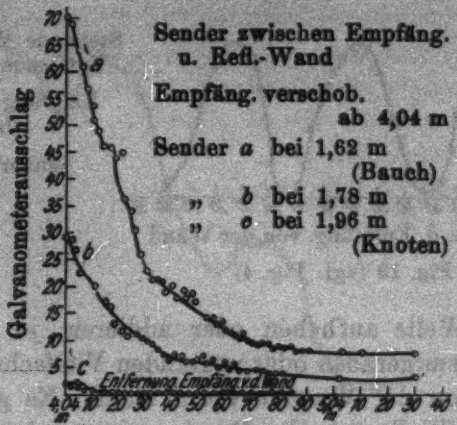


Fig. 15.

Hertzscher Erreger

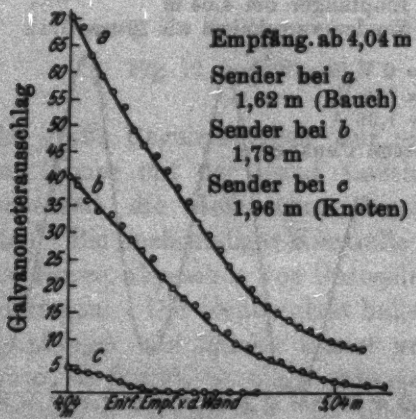


Fig. 16.

Bei Verschiebung des Empfängers hinter dem Sender mußte sich jetzt eine ähnlich abnehmende Dämpfungskurve ergeben, wie beim Verschieben des Senders hinter dem Empfänger, allerdings ohne die übergelagerten Maximastellen, wenn diese

wirklich von der Rückwirkung der reflektierten Welle und nicht von durch die Beschaffenheit der Umgebung hervorgerufenen Störungen abhingen. Fig. 15/16 zeigen solche mit dem Empfänger hinter dem Sender aufgenommene Kurven. Infolge der Strahlungsdämpfung nehmen sie stetig ab und zeigen im Gegensatz zu der mit dem Sender erzeugten Kurve fast keine Unregelmäßigkeiten.

Die Kurven sind mit dem Hertzschen und Abrahamschen Sender aufgenommen.

Für *a* steht der Sender in einem Bauch.
„ *b* „ „ „ zwischen Bauch und Knoten.
„ *c* „ „ „ in einem Knoten.

Es bestätigt sich also auch diese Interferenzerscheinung

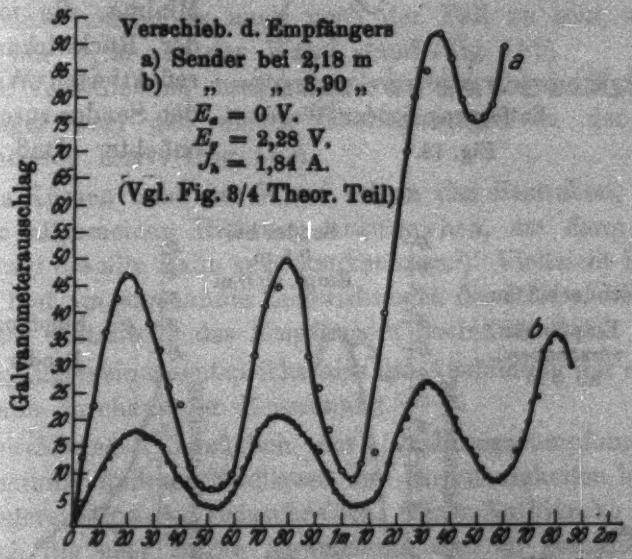


Fig. 17.

Es war nun von Interesse und von Wichtigkeit zur Erklärung der Wirkung des Hilfssenders, stehende Wellen nochmals im Freien aufzunehmen, und zwar an einer Stelle, wo voraussichtlich keine parallelen Leiter die Ausbildung der stehenden Welle stören konnten. Es wurde so tatsächlich erreicht, daß die ersten beiden Minima nicht mehr ganz

bis 0 zurückgingen. Bei der einen Aufnahme (Fig. 17b) stand der Sender bei 3,90 m, bei der anderen bei 2,18 m. Man sieht die starke Wirkung der Sendernähe. Die Verschiebung des Senders bei feststehendem Empfänger ergibt wieder eine Kurve von allgemein abnehmender Intensität (Fig. 18). Auffallend sind aber auch hier wieder die sich im Abstand von $\lambda/2$ überlagernden Maxima und Minima, die ich eben der Rückwirkung der reflektierten Welle auf den Sender zuschreiben möchte. Daß die ge-

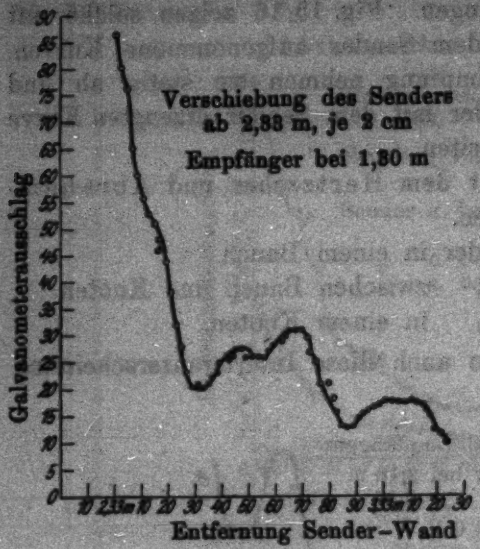


Fig. 18.

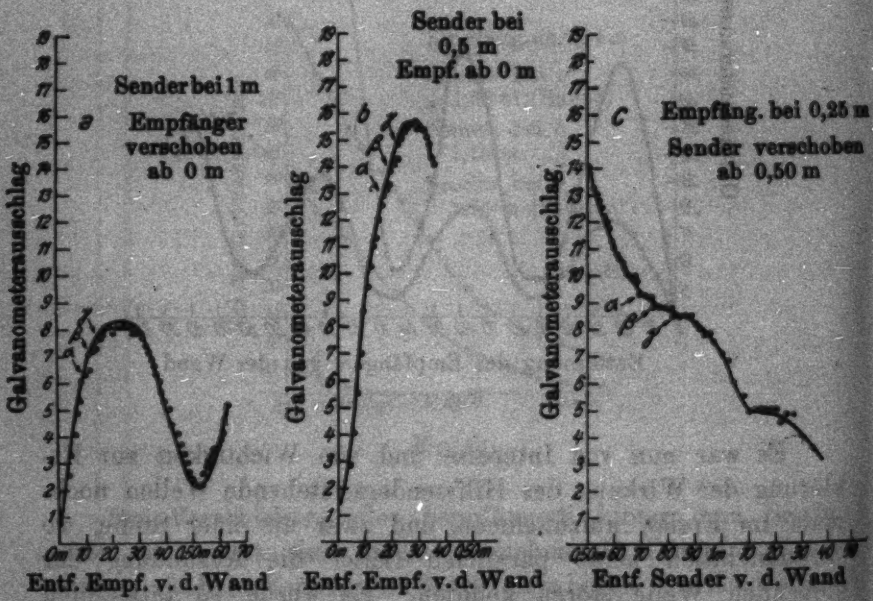


Fig. 19. Messungen nahe der Reflexionswand.

messenen Kurven immer steiler abfallen, liegt wohl an der nie ganz einwandfreien Umgebung. Es lagen also im allgemeinen die Verhältnisse so, wie sie theoretisch zu erwarten waren.

Es war nur für eine Senderstellung ganz nahe der Wand nochmals nachzuprüfen, ob noch eine regelmäßige Ausbildung zustande kam. Die Intensität war allerdings jetzt so stark, daß ein Hartmann- und Braunsches Drehspuleninstrument von $4{,}8 \times 10^{-6}$ A. Empfindlichkeit benutzt wurde. Außerdem wurde noch ein selbst induktionsfreier Widerstand von 10000 Ohm dazwischen geschaltet.

Stand der Sender bei 1 m Entfernung von der Wand, so war die Ausbildung des ersten Maximums noch ganz regelmäßig (Fig. 19a).

Ebenso scheint es auch noch der Fall zu sein, als der Sender nur $^1/_2$ m von der Wand stand (Fig. 19b).

Die Verschiebung des Senders von hier ab von Wand und Empfänger weg, gab wieder Überlagerungen in der sonst abnehmenden Kurve (Fig. 19c).

Die Kurven nahe der Wand zeigen das Bestreben, immer von der allgemeinen Richtung abzuweichen, um dann gleich wieder auf die alte Bahn zurückzukommen.[1]) Vielleicht handelt es sich hier um sogenannte Ziehwirkungen der Röhre, die durch die nahen Metallteile des Empfängers beeinflußt wird.

Im allgemeinen entspricht also die Ausbildung der stehenden Welle durchaus der Berechnung.

Abweichungen bezüglich der Strahlungsdämpfung sind wahrscheinlich äußeren Einflüssen und Ungenauigkeiten bei den Erregungsverhältnissen zuzuschreiben. Einer Aufklärung bedarf nur noch die sehr starke Abweichung der im geschlossenen Raum gemessenen Kurven von den im Freien gemessenen.

Die im Zimmer festgestellte große Abhängigkeit der stehenden Welle von der Stellung des Senders in einem Knoten oder Bauch konnte nur von einer Störung herrühren, die regelmäßige Wirkungen hervorrief, da sich die Wellenlänge doch immer aus den Kurven erkennen ließ. In der Hauptsache kam hierbei

1) Vgl. die Stellen α, β, γ in Fig. 19a, b, c.

wohl eine Reflexion auch der dem Metallschirm gegenüberliegenden Wand in Betracht.

Die Entfernung beider Wände war 8,80 m, die benutzte Wellenlänge durchschnittlich 1,10 m. Es gingen also gerade acht ganze Wellenlängen auf diesen Zwischenraum und somit mußten die von beiden Wänden kommenden reflektierten Wellen ohne Phasenunterschied stetig ineinander übergehn. Stand daher der Sender zwischen beiden Wänden in einem Bauch,

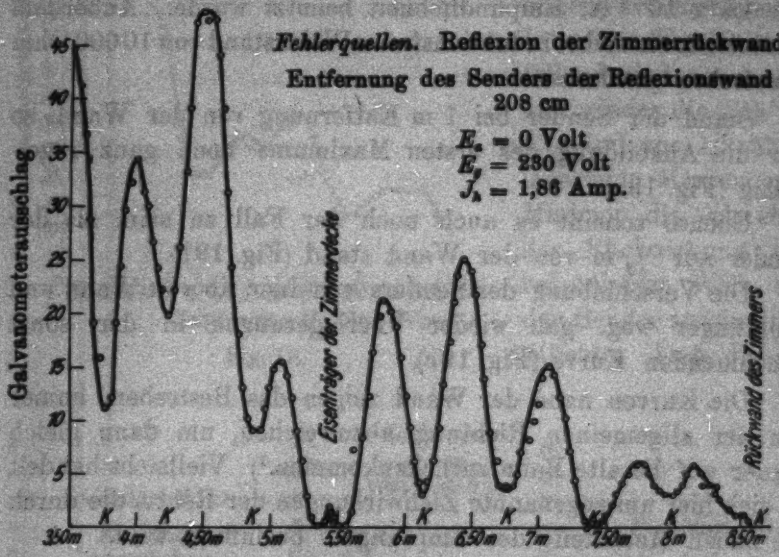


Fig. 20 (vgl. Fig. 15/16).

so addierten sich von ihm aus nach beiden Seiten hin die Wellen, stand er in einem Knoten, so hoben sie sich auf.

Die Betrachtung gibt auch eine Möglichkeit, die Wirkung des Hilfssenders im Zimmer zu erklären. Der starke Einfluß aller paralleler Leiter auf die Ausbildung der stehenden Welle hatte sich erwiesen. So konnte auch der Hilfssender die stehende Welle beeinflussen und zwar am stärksten in einem Bauch und am wenigsten in einem Knoten, was zu regelmäßigen Änderungen führen mußte.

Es wurde demnach die Rückwand des Zimmers in dieser Hinsicht untersucht. Eine Aufnahme mit dem Empfänger

hinter dem Sender, also zwischen Sender und Zimmerrückwand, ergab eine ausgeprägte stehende Welle (Fig. 20), wo sich doch eigentlich eine Kurve nach Art der Fig. 15/16 hätte ergeben müssen.

Die Wirkung der Rückwand wurde dadurch abgeschwächt, daß man den transportablen Metallschirm im Winkel von 45° davor brachte. Ohne Zweifel lassen sich die von der theoretischen Berechnung stark abweichenden Erscheinungen durch diese Reflexion der Rückwand erklären.

Daß der Metallschirm bei der gewählten Größe einen Einfluß durch Beugung auf die Ausbildung der stehenden Welle hatte, war nicht anzunehmen. Lindman[1]) hatte bei noch kleineren Dimensionen des Schirms im Vergleich zur Wellenlänge eine vollkommene Reflexion gefunden, dagegen waren Fremdreflexionen auch bei gedämpften Erregern schon sehr störend.

Leider konnten eingehendere Versuche über die Wirkung des Hilfssenders nicht mehr im Freien ausgeführt werden, da die ungünstige Witterung jedes Arbeiten verhinderte.

Zusammenfassung.

Die von Bergmann gefundene Abhängigkeit der Ausbildung der stehenden Welle von der Stellung des Senders in einem Knoten oder Bauch erklärt sich zum größten Teil durch den Einfluß von Fremdreflexionen im geschlossenen Raum. Die Messungen im Freien dagegen ergeben eine nur geringe Abhängigkeit der Ausbildung der stehenden Welle von der Senderstellung, und diese Abhängigkeit läßt sich als Rückwirkung der stehenden Welle auf den Sender erkennen.

Es werden für den Hertzschen und Abrahamschen Sender die Formeln für die aus der Reflexion sich ergebenden stehenden Wellen aufgestellt.

Die gemessenen Kurven verlaufen auch noch nahe der Wand, wie die berechneten, nur zeigen sie Abweichungen in der Dämpfung, die vermutlich von der Umgebung abhängen.

Es läßt sich im Freien die Strahlung durch Dämpfung verfolgen und zwar:

---

1) K. F. Lindman, a. a. O., S. 845 ff.

a) Im Verlauf der stehenden Welle.

b) Bei feststehendem Empfänger und von Empfänger und Reflexionswand weg verschobenem Sender, und bei feststehendem Sender und von Sender und Wand weg verschobenem Empfänger, ein Abnehmen der Intensität mit der Entfernung.

c) Im Interferenzgebiet hinter dem Sender, an den durch Variation der Senderstellung erzeugten Maxima und Minima der Intensität.

Zum Schlusse möchte ich nicht versäumen, Hrn. Geh. Rat Prof. Dr. König, meinen ergebensten Dank auszusprechen für die Anregung und Ratschläge, die mir jederzeit bei der Arbeit zuteil wurden.

(Eingegangen 11. Juni 1928.)

5. *Über die zeitliche Änderung der Thermokräfte bei Eisen, Nickel und Kobalt nach dem Ziehen oder Magnetisieren;* von *Joh. Thiele.*

(Auszug aus der Dissertation, Münster i. W.)

I. Einleitung.

Untersuchungen über Änderungen der thermoelektrischen Spannungen infolge mechanischer Bearbeitung, wie Ziehen und Walzen der Drähte, wurden zuerst von Noll[1]), dann von Tammann[2]) und in jüngster Zeit von Borelius[3]) ausgeführt. Letzterer fand, daß Eisen und Nickel nach der mechanischen Bearbeitung zeitliche Änderungen der thermoelektrischen Spannung aufwiesen, die ausschließlich dem kaltbearbeiteten Material zuzuschreiben waren. Da sich diese Änderungen am größten bei den dünnsten Bändern, weniger bei den gezogenen Drähten und dickeren Bändern zeigten, so schloß Borelius, daß sie bedingt sind durch eine Wirkung, die von der Oberfläche ausgeht, und die von der Dicke der Drähte abhängig ist. Nun liegt, weil die Erscheinung aber nur bei Eisen und Nickel auftritt, der Gedanke nahe, daß diese Metalle beim Ziehen und Walzen durch zufällig magnetisierte Zieheisen oder Walzen magnetisch geworden seien, und daß dieser Magnetismus sich allmählich änderte und dadurch die zeitliche Änderung der Thermokraft bewirkte. Ähnliche zeitliche Änderungen haben bei den magnetisierten Heuslerschen Legierungen E. Pinczower[4]), F. A. Schulze[5]) und E. Take[6]) gefunden.

1) Noll, Wied. Ann. 53. S. 874. 1894.
2) Tammann, Metallographie S. 131. 1914.
3) Borelius, Ann. d. Phys. 60. S. 391. 1919.
4) E. Pinczower, Diss. Freiburg i. Br. 1902.
5) F. A. Schulze, Verh. d. deutsch. physik. Ges. 12. S. 822 u. 1080. 1910.
6) E. Take, Verh. d. deutsch. physik. Ges. 12. S. 822 u. 1080. 1910.

Auf Veranlassung von Hrn. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. G. C. Schmidt habe ich die Arbeit von Borelius wieder aufgenommen mit der Absicht, womöglich die Ursachen der zeitlichen Änderung aufzufinden.

II. Versuchsanordnung.

Die Behandlung der Drähte geschah ebenso wie bei Borelius. Es wurden hauptsächlich gezogene Drähte untersucht, gewalzte Bänder nur bei Stahl und Kobalt. Behufs Prüfung der Frage, ob die okkludierten Gase auf die Erscheinung von Einfluß sind, wurden die Drähte im Vakuum, in Luft und Wasserstoff bzw. Stickstoff auf elektrischem Wege geglüht. Nach dem Glühen wurden die Drähte jedesmal geschmirgelt, um reine Oberflächen zu erhalten. Zum eventuellen Magnetisieren der Drähte diente ein Halbringmagnet von Du Bois. Schwieriger war es, die letzten Spuren des Magnetismus aus dem Eisen zu entfernen. Zu diesem Zwecke wurde der Draht in ein Wechselfeld gebracht, und der Strom ganz allmählich durch einen Flüssigkeitswiderstand geschwächt.

Zur Messung der thermoelektrischen Kraft wurde im wesentlichen der Apparat von Borelius benutzt; betreffs der Einzelheiten kann ich daher auf seine Arbeit verweisen. Er erhielt folgende Umgestaltungen, die wesentlich zur Erhöhung der Empfindlichkeit der Apparatur und zur Steigerung der Meßgenauigkeit beitrugen.

1. An Stelle des kupfernen, elektrischen Heizkessels trat ein mit Wasserdampf gespeister. Durch automatisch sich regulierende Flammen und durch automatisches Nachfließenlassen von Wasser von 100° C., welches das verdampfte ersetzte, wurde erreicht, daß das Sieden stundenlang ganz gleichmäßig vor sich ging.

2. Der Heizkessel und der Kupferring an der Innenseite wurden mit Asbest umgeben, um eine Wärmeausstrahlung vom Heizkessel zu vermeiden, die im Innern des Kalorimeters Temperaturschwankungen zur Folge hatten.

3. Der Kupferring selbst wurde von einer kupfernen, mit Leitungswasser gespeisten Schlangenröhre umgeben. Hierbei stellten sich zwei Schwierigkeiten ein, die zur Ausschaltung der Temperaturschwankungen innerhalb des Kalorimeters unbedingt beseitigt werden mußten: Es mußte a) die Tempe-

ratur und b) die Geschwindigkeit des Fließens des Leitungswassers während des Versuches konstant bleiben. Die endgültigen Messungen wurden daher während der Nacht angestellt, wo der Wasserdruck und die Temperatur von vornherein schon fast konstant waren. Die kleineren noch übrigbleibenden Schwankungen der Temperatur des Wassers ließen sich beseitigen, indem man es durch lange Bleiröhren leitete, die sich in Gefäßen mit Wasser von Zimmertemperatur befanden. Der Druck wurde konstant gehalten dadurch, daß man das Wasser außerdem noch durch einen Regulierhahn und durch eine Wulfsche Flasche mit Manometer strömen ließ. Mit Hilfe des letzteren war es möglich, zu jeder Zeit den Druck, unter dem das Wasser stand, abzulesen und ihn mit Hilfe des Regulierhahnes konstant zu halten. Die Messungen begannen 20 Minuten nach Erwärmung des Heizkessels; dann waren die Temperaturen, wie Vorversuche zeigten, konstant.

4. An Stelle der Silberdrähte, die bei Borelius im Innern des Kalorimeters als Vergleichsdrähte dienten, wurde ein Kupfer-Konstantan-Element eingeführt, dessen Thermokraft bestimmt worden war. Geeicht wurde dasselbe mit Hilfe der Siedepunkte von Quecksilber und Wasser und des Gefrierpunkts von Wasser. Mit Hilfe des Thermoelementes wurde vor jeder Messung der Thermokraft der zu untersuchenden Drähte die Temperaturdifferenz zwischen Kupferring und Heizkessel bestimmt. Diese Temperaturdifferenz galt dann auch für die zu untersuchenden Drähte. Zur Messung der Thermokraft diente ein Spiegelgalvanometer von Hartmann & Braun, dessen Spannungsempfindlichkeit von der Größenordnung 10^{-9} war. Die Messung erfolgte im Gegensatz zu Borelius nach der Kompensationsmethode.

III. Die zeitliche Änderung der Thermokraft nach der mechanischen Bearbeitung, wie Ziehen und Walzen.

Für die zeitliche Änderung der Thermokraft, die nach Borelius nur bei Eisen und Nickel, und zwar nur nach der mechanischen Bearbeitung sich zeigt, gibt es, wie in der Einleitung schon erwähnt, zwei Erklärungsmöglichkeiten.

Die erste Erklärung ist die von Borelius aufgestellte, aber nicht experimentell geprüfte, nämlich die Oberflächenwirkung. Diese kann darin bestehen, daß durch das Ziehen

oder Walzen der Metalle die Oberfläche gestört wird, und erst allmählich sich bei den harten Metallen, wie Eisen und Nickel, wieder eine normale Oberfläche bildet. Die Änderung der Oberfläche und die damit Hand in Hand gehende zeitliche Änderung der Thermokraft kann auch auf Gasabsorption bzw. Gasabgabe zurückgeführt werden. Nach P. M. Holmes[1]) und F. Heimburg[2]), die den Einfluß der Absorption von Wasserstoff auf das thermoelektrische Verhalten des Palladiums gegen Platin untersuchten, hat das gasgefüllte Palladium stets eine niedrigere Thermokraft gegen Platin als das gasfreie. Da Eisen und Nickel bekanntlich wasserstoffhaltig sind, so erscheint es möglich, daß sie bei der fortdauernden Erwärmung der einen Lötstelle Wasserstoff allmählich abgeben, was die zeitliche Änderung der thermoelektrischen Spannung hervorrufen könnte.

Die zweite Erklärung ergibt sich auf Grund der ferromagnetischen Erscheinungen. Da die zeitliche Änderung nach Borelius nur bei Eisen und Nickel auftritt und beim Erhitzen verschwindet, kann sie vom Magnetismus herrühren. Dieser Gedanke liegt auch nahe, da durch das Ziehen infolge des Magnetismus des Zieheisens Pole entstehen[3]) oder falls das Zieheisen unmagnetisch ist, können die Eisen- oder Nickeldrähte von vornherein Spuren von Magnetismus in sich tragen. Tatsächlich genügt die Annahme, daß die von Borelius benutzten Eisen- und Nickeldrähte schwach magnetisch waren, um die Größe der von ihm betrachteten Thermokraft zu erklären, wie ein Vergleich seiner Zahlen mit denen von Barus und Stroual[4]) zeigt. Die Annahme, daß die zeitliche Änderung der Thermokraft von dem Magnetismus herrührt, erhält eine zweite Stütze aus dem Verhalten des Eisens im Vergleich zu Nickel; — beim Eisen nimmt die Thermokraft mit der Zeit zu, beim Nickel dagegen ab. Nach Batteli[5]) ist magnetisches Eisen thermoelektrisch positiv, Nickel dagegen thermoelektrisch negativ; d. h. der Strom fließt vom unmagnetischen zum

1) R. M. Holmes, Physik. Berichte. 3. Jahrg. 1922. Heft 23, S. 1243.
2) F. Heimburg, Physik. Zeitschr. Nr. 7. 24. Jahrg. S. 149.
3) Wied. Elektr. S. S. 782, 835. 1895 u. Wied. Ann. 14. S. 54. 1881.
4) a. a. O.
5) Vgl. Wiedemann, Elektr. S. S. 836. 1895.

magnetischen Eisen durch die erwärmte Lötstelle, also von einem thermoelektrisch negativen zu einem thermoelektrisch positiven Metalle; bei Nickel dagegen umgekehrt, vom magnetischen zum unmagnetischen Nickel.

Auf Grund dieser Überlegungen wurden untersucht: A) Metalle, deren Thermokraft nach Borelius sich zeitlich nicht ändert. B) Metalle, die die zeitliche Änderung der Thermokraft nach Borelius zeigen. Es wurden dabei die beiden Erklärungsmöglichkeiten geprüft. Von den Metallen zu A) wurden die Untersuchungen auf Cu, Al und Ag beschränkt. Am eingehendsten wurden hierbei die Verhältnisse an Kupfer bestimmt. Die hauptsächlichsten Versuche zu B) erstreckten sich auf Eisen. Daneben wurden auch Nickel, Stahl und Kobalt in den Kreis der Untersuchung gezogen.

§ 1.

A. Metalle, deren Thermokraft nach Borelius sich zeitlich nicht ändert.

Die Ergebnisse dieses Abschnittes, der sich auf die Untersuchungen der Metalle Kupfer, Aluminium und Silber beschränkt, lauten:

I. Der Strom fließt unabhängig von der Ziehrichtung stets:

1. vom dickeren zum dünneren, vom weniger gezogenen zum mehr gezogenen Material,
2. vom ungeglühten zum geglühten, unabhängig hierbei von der Dicke der Drähte,
3. vom Kupfer zum Aluminium und vom Kupfer zum Silber durch die erwärmte Lötstelle, unabhängig von der Bearbeitung des Materials.

II. Die thermoelektrischen Spannungen werden, wenn die Drähte gezogen sind, größer bei zunehmender Verkleinerung des Querschnittes der Drähte.

III. Es tritt in keinem Falle, d. h. weder bei den gezogenen noch bei den geglühten Drähten eine zeitliche Änderung der thermoelektrischen Spannung auf.

Diese beiden letzten Ergebnisse stimmen mit dem von Borelius erhaltenen überein.

§ 2.

B. Metalle, die nach Borelius die zeitliche Änderung der thermoelektrischen Spannung zeigen; Eisen und Nickel.

Die zeitliche Änderung kann, wie bereits erwähnt, herrühren von Änderungen 1. der Oberflächenschichten und 2. des Magnetismus. Um eine Verquickung der beiden Fälle zu vermeiden, wurden die Präparate, wenn nötig, vor der Untersuchung entmagnetisiert.

α) Einfluß der Oberflächenwirkung.

1. Ist die zeitliche Änderung durch Gasabsorption bzw. Gasabgabe bedingt?

Der Magnetismus wurde bei diesen Untersuchungen sorgfältig eliminiert durch Glühen oder Entmagnetisieren. Untersucht wurden folgende Präparate von Eisen gegen Eisen und Nickel gegen Nickel, sowohl dicke wie dünne Drähte:

ungeglüht entmagnetisiert gegen ungeglüht entmagnetisiert,
ungeglüht entmagnetisiert gegen geglüht (in Luft, im Stickstoff und im Wasserstoff),
und geglüht gegen geglüht.

Das Ergebnis ist folgendes:

I. Die Thermokraft bleibt bei allen Präparaten, die vorher geglüht sind oder bei denen der Magnetismus durch Entmagnetisieren zerstört ist, mit der Zeit konstant.

II. Das Glühen der Drähte im Wasserstoff, im Stickstoff, in Luft und im Vakuum hat keinen Einfluß auf die zeitliche Änderung der Thermokraft. Da nun beim Glühen in Wasserstoff die Metalle stark Gas aufnehmen und im Vakuum Gas abgeben, wie Vorversuche zeigen, aber bei den so behandelten Metallen keine zeitliche Änderung auftritt, so folgt, daß die Gasabsorption bzw. die Gasabgabe nicht der Grund für die von Borelius gefundene zeitliche Änderung der Thermokraft sein kann.

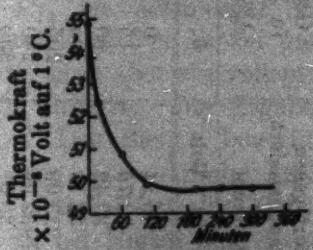
III. Die Richtung des thermoelektrischen Stromes ist stets ungeglüht zu geglüht durch die erwärmte Lötstelle. Die Stromrichtung ist also genau dieselbe, wie bei den Metallen Cu, Al und Ag (vgl. S. 553, Zeile 24).

2. Ist die zeitliche Änderung der Thermokraft durch Ziehen bedingt?

Auch bei diesen Untersuchungen spielt der Magnetismus keine Rolle, da die Drähte durch Glühen oder durch das Wechselfeld entmagnetisiert waren und ebenso das Zieheisen. Es konnte somit der Draht, selbst wenn er nach dem Entmagnetisieren gezogen wurde, keinen Magnetismus erhalten. Untersucht wurden bei Eisen gegen Eisen die Fälle:

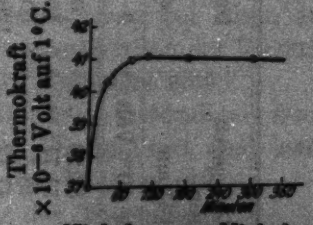
ungeglüht entmagnetisiert gegen geglüht (in Luft, im N und im H_2) gezogen,
ungeglüht entmagnetisiert gegen ungeglüht gezogen,
ungeglüht entmagnetisiert gezogen gegen geglüht in Luft,
ungeglüht entmagnetisiert gezogen gegen geglüht in N,
ungeglüht entmagnetisiert gegen geglüht in N gezogen entmagnetisiert,
geglüht in N gegen geglüht in N gezogen
und geglüht in N gegen geglüht in N gezogen entmagnetisiert.

In der folgenden Tab. I sind einige Beobachtungsreihen gegeben, die sich alle auf Eisen beziehen. In denselben bedeuten: ϑ die Zeit in Minuten, $t_2 - t_1$ die Temperaturdifferenz zwischen Heizkessel und Kupferring, $\varkappa$ die Thermokraft pro 1° C, d_0' und d_0 die Dicke der Drähte. Der Strom fließt stets vom erstgenannten Material mit dem Durchmesser d_0' zu dem zweiten mit dem Durchmesser d_0. Die Tab. II bezieht sich auf Nickel gegen Nickel.



Eisen gegen Eisen
gegl. in N gegen gegl. in N gezogen
($d_0' = 0{,}54$ mm; $d_0 = 0{,}43$ mm)

Fig. 1.



Nickel gegen Nickel
ungegl. entmagn. gezogen gegen gegl. in Luft
$d_0' = 0{,}54$ mm; $d_0 = 0{,}75$ mm)

Fig. 2.

Fig. 1 gibt einen Versuch für Eisen und Fig. 2 einen für Nickel wieder. Dieselben stellen die auf 1° C reduzierten thermoelektrischen Spannungen als Funktion der Zeit dar. Bei den Eisenpräparaten blieben die Verhältnisse genau dieselben, ob

Tabelle I.

Eisen gegen Eisen.

Ungeglüht entmagnetisiert gegen geglüht in H_2 gezogen $d_0' = 0{,}54$ mm; $d_0 = 0{,}43$ mm			Ungeglüht entmagnetisiert gegen geglüht in N gezogen $d_0' = 0{,}54$ mm; $d_0 = 0{,}43$ mm			Geglüht im N gegen geglüht in N gezogen $d_0' = 0{,}54$ mm; $d_0 = 0{,}43$ mm		
ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-6}$ Volt	ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-6}$ Volt	ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-6}$ Volt
0	64,46°	52,23	0	64,46°	32,29	10	64,27°	22,85
15	64,45	51,71	15	64,45	31,645	15	64,21	22,22
60	64,6	48,5	60	64,6	29,56	60	63,37	20,465
120	64,6	47,12	120	64,6	27,29	195	62,78	18,94
185	64,42	46,53	185	64,42	25,86	240	62,68	18,97
240	64,37	46,56	240	64,37	25,45	300	62,74	18,95
300	64,1	46,52	300	64,1	25,4			
Ungeglüht entmagnetisiert gegen geglüht in N gezogen entmagnetisiert $d_0' = 0{,}54$ mm; $d_0 = 0{,}43$ mm			**Geglüht in N gegen geglüht in N gezogen entmagnetisiert** $d_0' = 0{,}54$ mm; $d_0 = 0{,}43$ mm			**Ungeglüht entmagnetisiert gezogen entmagnetisiert gegen geglüht in N** $d_0' = 0{,}43$ mm; $d_0 = 0{,}54$ mm		
ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-6}$ Volt	ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-6}$ Volt	ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-6}$ Volt
0	67,52°	35,24	0	64,27°	54,85	0	67,52°	20
75	66,26	33,76	15	64,21	52,43	75	66,26	16,22
105	65,48	33,42	60	63,37	50,85	105	65,48	15,82
135	64,99	33,19	105	63,21	49,9	135	64,99	15,86
180	64,78	33,06	205	62,78	49,73	180	64,78	15,82
240	64,09	32,96	240	62,68	49,8	240	64,09	15,99
330	63,96	33,01	300	62,74	49,76	330	63,96	16,03
390	63,96	33,01						

Tabelle II.

Nickel gegen Nickel.

Ungeglüht entmagnetisiert gezogen gegen geglüht in Luft $d_0' = 0{,}54$ mm; $d_0 = 0{,}75$ mm		
ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-9}$ Volt
0	44,61°	36,98
30	44,63	44,29
75	44,68	40,98
105	44,75	41,22
186	44,75	41,23
300	44,75	41,23

der entmagnetisierte Draht gezogen oder ob der entmagnetisierte gezogene Draht nach dem Ziehen nochmals entmagnetisiert wurde; ein Zeichen dafür, daß das Zieheisen unmagnetisch war.

Es tritt bei diesen Untersuchungen eine ganz neue Eigenschaft des Materials infolge Ziehens auf, die nicht mit der von Borelius entdeckten identisch ist. Der Unterschied in den beiderseitigen Ergebnissen besteht darin, daß bei Borelius die Thermokraft eine zeitlich langsam fortschreitende Vergrößerung (bei Fe) oder Verringerung (bei Ni) zeigt, z. B. 100 bis 300stündiger Beobachtung; hier aber eine zeitlich kurze, — $1^1/_2$ bis 3stündiger Beobachtung —, Vergrößerung der Thermokraft bei Nickel und eine Verringerung bei Eisen aufweist, dann aber ein vollständiges Konstantwerden der Thermokraft auftritt. Die Ergebnisse dieser Versuche sind:

I. Das Ziehen bewirkt innerhalb $1^1/_2$—3stündiger Beobachtung eine zeitliche Änderung der Thermokraft und zwar:

1. bei Eisen eine Verringerung der Thermokraft,
2. bei Nickel eine Vergrößerung der Thermokraft.

Es ist dabei gleichgültig, ob das Ziehen der Drähte erfolgt, nachdem die Drähte vorher geglüht waren oder nicht. Die zeitliche Änderung der Thermokraft verschwindet aber, wenn man den Draht nach dem Ziehen erhitzt; sie rührt sehr wahrscheinlich daher, daß durch das Ziehen innere Spannungen auftreten, die bei gewöhnlicher Temperatur verhältnismäßig schnell und bei höheren Temperaturen augenblicklich zurückgehen. Voraussetzung für das reine Auftreten dieser Erscheinung ist das völlige Fehlen des Magnetismus.

II. Die Richtung des thermoelektrischen Stromes ist stets vom ungeglühten zum geglühten Material durch die erwärmte Lötstelle, gleichgültig welcher Draht gezogen ist, also wie bei Al, Cu und Ag.

III. Werden beide Drähte geglüht, so läuft der Strom stets vom geglühten zu dem geglüht gezogenen Präparate durch die erwärmte Lötstelle.

IV. Sind beide Drähte ungeglüht, so fließt der Strom stets vom unbehandelten zu dem gezogenen Material durch die erwärmte Lötstelle, also analog III.

β) Einfluß des Magnetismus.

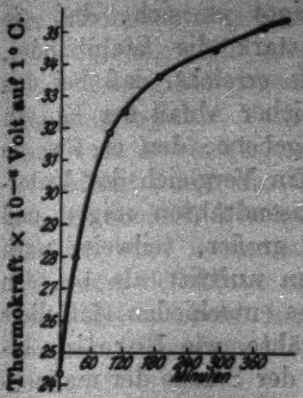
Der Magnetismus kann auftreten dadurch, daß: 1. die Drähte und 2. das Zieheisen magnetisiert sind und es fragt sich, ob Magnetisierung eine zeitliche Änderung der Thermokraft hervorruft? Daneben wurde der von Borelius gezogene Schluß geprüft, daß die Größe der zeitlichen Änderung der

Tabelle III.

Eisen gegen Eisen.

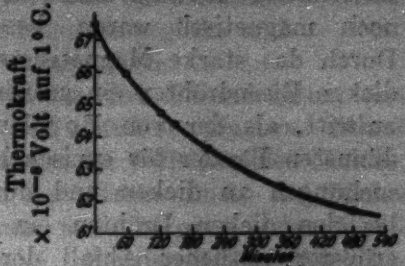
Gegl. magn. gegen geglüht $d_0' = d_0 = 0{,}59$ mm			Ungegl. gegen ungegl. magnetisiert $d_0' = d_0 = 0{,}59$ mm			Ungegl. gegen gegl. magnetisiert $d_0' = d_0 = 0{,}59$ mm		
ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-8}$ Volt	ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-8}$ Volt	ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-8}$ Volt
0	46,13°	17,2	0	61,65°	24,01	0	47,46°	67,5
30	46,13	17,91	30	60,65	25,35	30	47,26	66,5
90	45,96	18,75	60	60,42	26,04	60	47,32	66,01
210	45.48	19,37	120	60,03	26,94	120	47,41	64,66
330	45,48	19,71	360	60,03	27,97	150	47,42	64,4
						210	47,36	63,62
						345	47,36	62,45
						480	47,36	61,7
Gegl. magn. gegen geglüht $d_0' = d_0 = 0{,}2$ mm			Ungegl. magn. gegen geglüht $d_0' = 0{,}59$ mm $= d_0$			Ungegl. gegen gegl. magnetisiert $d_0' = d_0 = 0{,}2$ mm		
ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-8}$ Volt	ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-8}$ Volt	ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-8}$ Volt
0	50,01	24,37	0	54,63	52,58	0	51,17	76,9
30	50	27,95	15	54,63	51,11	60	49,07	73,29
90	49,39	31,87	30	54,63	50,27	120	48,73	72,21
120	49,16	32,52	75	54,36	47,14	240	46,33	71,01
180	49,9	33,65	180	53,46	44,11	330	47,9	70,45
285	50,08	34,4	240	53,26	42,46			
375	49,94	35,1	420	52,86	39,73			

Thermokraft von der Dicke der Drähte abhängig ist. Die Untersuchungen wurden an dicken und dünnen Eisendrähten



Eisen gegen Eisen
gegl. magn. gegen gegl.
($d_0' = d_0 = 0{,}2$ mm)

Fig. 3.

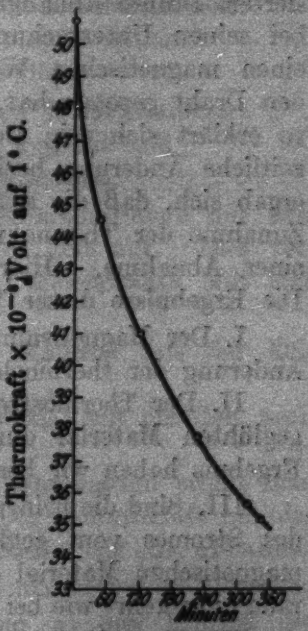


Eisen gegen Eisen
ungegl. gegen gegl. magn.
($d_0' = d_0 = 0{,}59$ mm)

Fig. 4.

vollzogen, ferner an Stahl, Nickel und Kobalt. Ich gebe einige Beobachtungsreihen, die sich auf magnetisiertes Eisen beziehen und zwar auf dicke und dünne Drähte. (Vgl. Tab. III.)

Die Verhältnisse waren bei Stahl ganz analog; ich verzichte daher darauf, Beobachtungsreihen mitzuteilen. Die Kurve, Fig. 3, stellt den Fall dar, daß infolge des Magnetismus die Thermokraft zeitlich zunimmt, und die Kurven der Figg. 4 und 5 zeigen eine zeitliche Abnahme. In der Fig. 4 wurde der Eisendraht mit Hilfe einer Spule magnetisiert und in der Fig. 5 mit einem starken Elektromagneten. Man sieht, daß je stärker die Drähte magnetisiert werden, desto größer auch die zeitliche Änderung der Thermokraft ist. Die Richtung des Magnetisierens spielt dabei keine Rolle, d. h. es ist gleichgültig, ob man den



Eisen gegen Eisen
ungegl. gegen gegl. magn.
($d_0' = d_0 = 0{,}59$ mm)

Fig. 5.

Nord- oder den Südpol mit dem unmagnetischen Eisen verbindet. Wurden die Drähte bzw. Bänder aus dem Kalorimeter herausgenommen, so zeigte es sich, daß sie noch magnetisch waren, besonders stark die Stahlbänder. Durch das starke Magnetisieren wurde erreicht, daß bei den dicken Eisendrähten ein größerer zeitlicher Abfall der Kurven auftritt, als der von Borelius angegebene, den er für die dünnsten Bänder für typisch hielt. Ein Vergleich der Untersuchungen an dicken und dünnen Eisendrähten zeigte, daß bei den dicken Drähten ein ebenso großer, teilweise noch größerer zeitlicher Abfall der Kurven auftritt als bei den dünnsten Drähten. Damit ist die Frage entschieden, daß diese Wirkung nicht von der Dicke der Drähte, wie Borelius behauptet, sondern einzig und allein von der Stärke der magnetisierten Drähte abhängig ist. Borelius hat wahrscheinlich bei seinen Untersuchungen ein magnetisches Zieheisen oder einen magnetischen Werkstattwalzer benutzt. Je öfter er den Draht gezogen hat, um so magnetischer ist er geworden; so erklärt sich sein Befund, daß die Dicke der Drähte die zeitliche Änderung beeinflußt. Im Gegensatz zu Borelius ergab sich, daß die zeitliche Änderung keineswegs stets einer Zunahme der Thermokraft entsprach, sondern eventuell auch einer Abnahme. Hierauf werde ich gleich zurückkommen. Die Ergebnisse dieser Versuche sind:

I. Der Magnetismus ruft eine starke und langandauernde Änderung der thermoelektrischen Kraft hervor.

II. Der Thermostrom fließt stets vom ungeglühten zum geglühten Material durch die erwärmte Löststelle. Dieses Ergebnis haben wir bereits gefunden (vgl. S. 558, II).

III. Sind die beiden Präparate geglüht, so ist die Richtung des Stromes vom geglüht magnetischen zum geglühten unmagnetischen Material durch die erwärmte Lötstelle; also gerade umgekehrt wie bei den gezogenen Präparaten (S. 558, III).

IV. Sind die beiden Präparate ungeglüht, so fließt der Thermostrom stets vom ungeglühten zum ungeglühten magnetisierten Draht durch die erwärmte Löststelle, also analog wie bei den gezogenen Drähten (vgl. S. 558 unter IV).

V. Die Größe der zeitlichen Änderung ist abhängig von der Stärke des Magnetismus und nicht von der Dicke der Drähte, wie Borelius angegeben hat.

Die Untersuchungen an Kobalt und Nickel zeigen dieselben Ergebnisse wie an den Eisenpräparaten. Nur betreffs der Stromrichtung findet man bei den Nickeldrähten:

1. ungeglüht magnetisch gegen ungeglüht und
2. geglüht gegen geglüht magnetisch

ein umgekehrtes Verhalten wie bei den Eisendrähten, das auch zum Ausdruck kommt in dem Abfall der Kurven. Dieses ist bedingt durch das thermoelektrische Verhalten des Nickels, wie Battelli[1]) gezeigt hat. Der Strom fließt bei Nickel nämlich vom magnetisierten zum nicht magnetisierten Material, wenn der Draht ungeglüht ist. Bei den Eisendrähten bewirkt die zeitliche Änderung, daß die Thermokraft bei bestimmten Kombinationen der Drähte steigt, bei andern fällt. Z. B.

Zunahme der Thermokraft bei den Kombinationen:
ungeglüht gegen ungeglüht magnetisch und
geglüht magnetisch gegen geglüht.

Abnahme der Thermokraft bei den Kombinationen:
ungeglüht magnetisch gegen geglüht und
ungeglüht gegen geglüht magnetisch.

Bei Nickel dagegen tritt bei allen Kombinationen nur eine Verringerung der Thermokraft mit der Zeit auf. Dies verschiedene Verhalten der Eisen- und Nickeldrähte läßt sich darauf zurückführen, daß:

α) das ungeglühte magnetisierte Material mit der Zeit negativer,

β) das geglühte magnetisierte Material mit der Zeit positiver wird.

Je nach der angewandten Drahtkombination erhält man infolgedessen bei Eisen eine Zunahme der Thermokraft mit der Zeit oder eine Abnahme, dagegen bei Nickel nur eine Abnahme.

2. Ziehen der Drähte durch ein magnetisches Zieheisen.

Nachdem wir im vorhergehenden a) den Einfluß des Ziehens und b) den Einfluß des Magnetismus auf die Thermokraft festgestellt haben, ist es leicht vorauszusagen, was geschehen wird, wenn man Eisen und Nickel durch ein magnetisches Zieheisen zieht. Das Ziehen wird stets zu Anfang des Versuches einen Abfall, der Magnetismus je nach der gerade

1) Vgl. Wiedemann, Elektr. 3. S. 836. 1895.

untersuchten Kombination eine Zunahme oder Abnahme d Thermokraft bewirken, die sich auf lange Zeiten erstreck wird. Das Ziehen durch ein magnetisiertes Zieheisen wird som eine Übereinanderlagerung dieser beiden Faktoren: „Ziehen un Magnetismus" geben und zwar so, daß entweder die beid Faktoren gleich- oder entgegengesetztgerichtete Wirkungen b sitzen, wie die beiden folgenden Tabellen in IV. zeigen.

Tabelle IV.

Eisen gegen Eisen.

1. Ungeglüht entmagnetisiert gegen ungeglüht gezogen $d_0' = 0{,}54$ mm; $d_0 = 0{,}48$ mm			2. Ungeglüht entmagnetisiert gegen geglüht gezogen $d_0' = 0{,}49$ mm; $d_0 = 0{,}48$ mm		
ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-8}$ Volt	ϑ	$t_2 - t_1$	$\varkappa \cdot 10^{-8}$ Vol
0	43,92°	40,98	0	47,72°	65,86
15	43,94	37,27	30	47,56	61,82
75	43,95	35,25	60	47,46	60,7
120	42,92	36,11	135	46,77	59,36
210	42,76	37,7	180	46,66	58,86
300	42,68	38,38	240	46,63	58,24
360	42,64	38,74	270	46,63	57,93
420	42,71	38,91	420	46,63	57

Nach diesen Untersuchungen geht hervor, daß die zeit liche Änderung nach dem Ziehen viel verwickelter ist, als wi Borelius gefunden hat, der nur einen Anstieg der Kurve bei Eisen und ein Fallen der Kurven bei Nickel festgestell hat. Da das Ziehen nach meinen Versuchen nur einen Abfa der Kurven bewirkt, Magnetismus dagegen eventuell einen Anstieg, so ist es wahrscheinlich, daß Borelius ein magnetische Zieheisen benutzt hat und zufälligerweise gerade die Kom bination angewandt hat, die das Steigen der Thermokraft be Eisen hervorruft (Tab. IV, 1).

Die nach dem vorhergehenden möglichen Fälle sind i den beiden folgenden Figg. 6 und 7 übersichtlich zusammen gestellt. Die Dicke der Drähte war $d = 0{,}59$ mm. Die Thermo kräfte sind auf Null reduziert. Die Kurven beziehen sich i der Fig. 6 auf folgende Fälle:

I. Geglüht gegen geglüht. Die Thermokraft ist und bleib konstant.

II. Geglüht gegen geglüht gezogen durch ein unmagnetisches Zieheisen. Die Kurve fällt mit der Zeit.

III. Geglüht gezogen gegen geglüht (gezogen durch ein magnetisches Zieheisen). Das Ziehen bewirkt anfangs einen Abfall, und der Magnetismus darauf einen Anstieg.

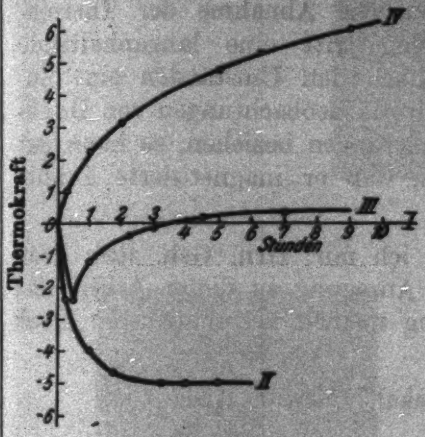


Fig. 6.

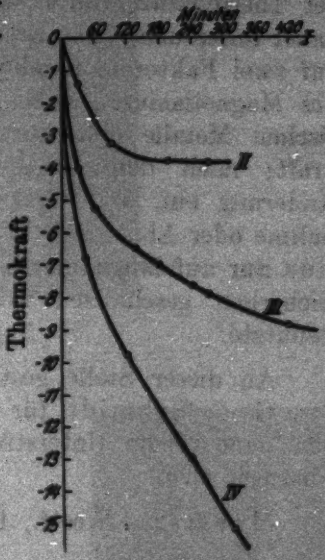


Fig. 7.

IV. Geglüht magnetisiert gegen geglüht. Die Magnetisierung ruft einen starken Anstieg der Kurve hervor.

Die Fig. 7 stellt die folgenden Versuche dar:

I. Ungeglüht gegen geglüht. Da beide Drähte unmagnetisch waren, so erhielt man eine Gerade.

II. Ungeglüht gegen geglüht gezogen durch ein unmagnetisches Zieheisen. Das Ziehen bewirkt einen schnell verlaufenden Fall der Kurve, die nach 8 Stunden schon eine konstante Thermokraft aufweist.

III. Ungeglüht gegen geglüht gezogen durch ein magnetisches Zieheisen. Das Ziehen bewirkt einen Abfall und ebenso der Magnetismus; beide Einflüsse verstärken sich daher.

IV. Ungeglüht gegen geglüht magnetisch.

Bei diesem Präparate war das Eisen sehr stark magnetisiert, infolgedessen ist der zeitliche Abfall sehr groß und dauert sehr lange.

Ergebnisse.

Es ist die von Borelius entdeckte zeitliche Änderung der Thermokraft von Eisen und Nickel nach dem Ziehen genauer untersucht. Die Erscheinung kann zurückgeführt werden auf zwei Faktoren, nämlich auf den Einfluß des Ziehens und des Magnetismus. Nach dem Ziehen zeigen die ferromagnetischen Metalle eine kurze zeitliche Abnahme der Thermokraft; nach dem Magnetisieren tritt eine langanhaltende Änderung ein, und zwar je nach den Umständen eine Zunahme oder Abnahme. Da sich die Beobachtungen von Borelius nur auf langdauernde Änderungen beziehen, so kann mit Sicherheit geschlossen werden, daß er magnetisierte Drähte benutzte.

An dieser Stelle gestatte ich mir, Hrn. Geh. Rat. Prof. Dr. G. C. Schmidt für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine reiche Unterstützung meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Münster i. Westf., Physikal. Institut, April 1923.

(Eingegangen 11. Juni 1923.)

---

6. *Nachtrag zu der Arbeit: Über die Beständigkeit der Phosphoreszenzzentren I* (Ann. d. Phys. 70. S. 81—112. 1923); *von Hans Kuppenheim.*

Die dort S. 81 in der Anmerkung angezogene Arbeit des Hrn. C. A. Hoffmann ist inzwischen als Dissertation der Universität Zürich erschienen: C. A. Hoffmann: Untersuchungen über den Einfluß der Temperatur auf Zentrensorten verschiedener Dauer einer Phosphorbande. (Göttingen 1923; Druck von August Rüttgerodt.)

Rudolstadt, September 1923.

(Eingegangen 14. September 1923.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

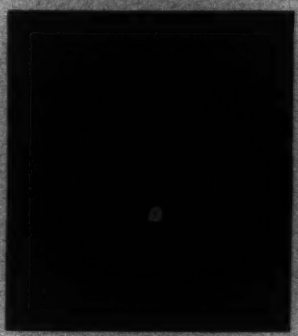


Fig. 7.

Fig. 8.

H. Kneser.

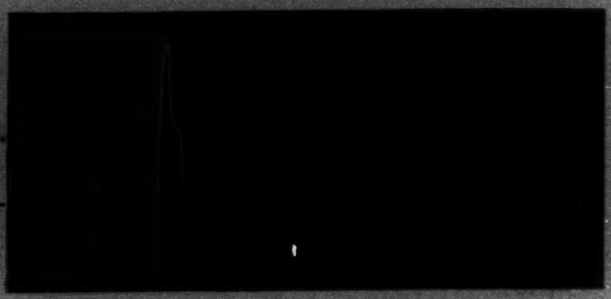


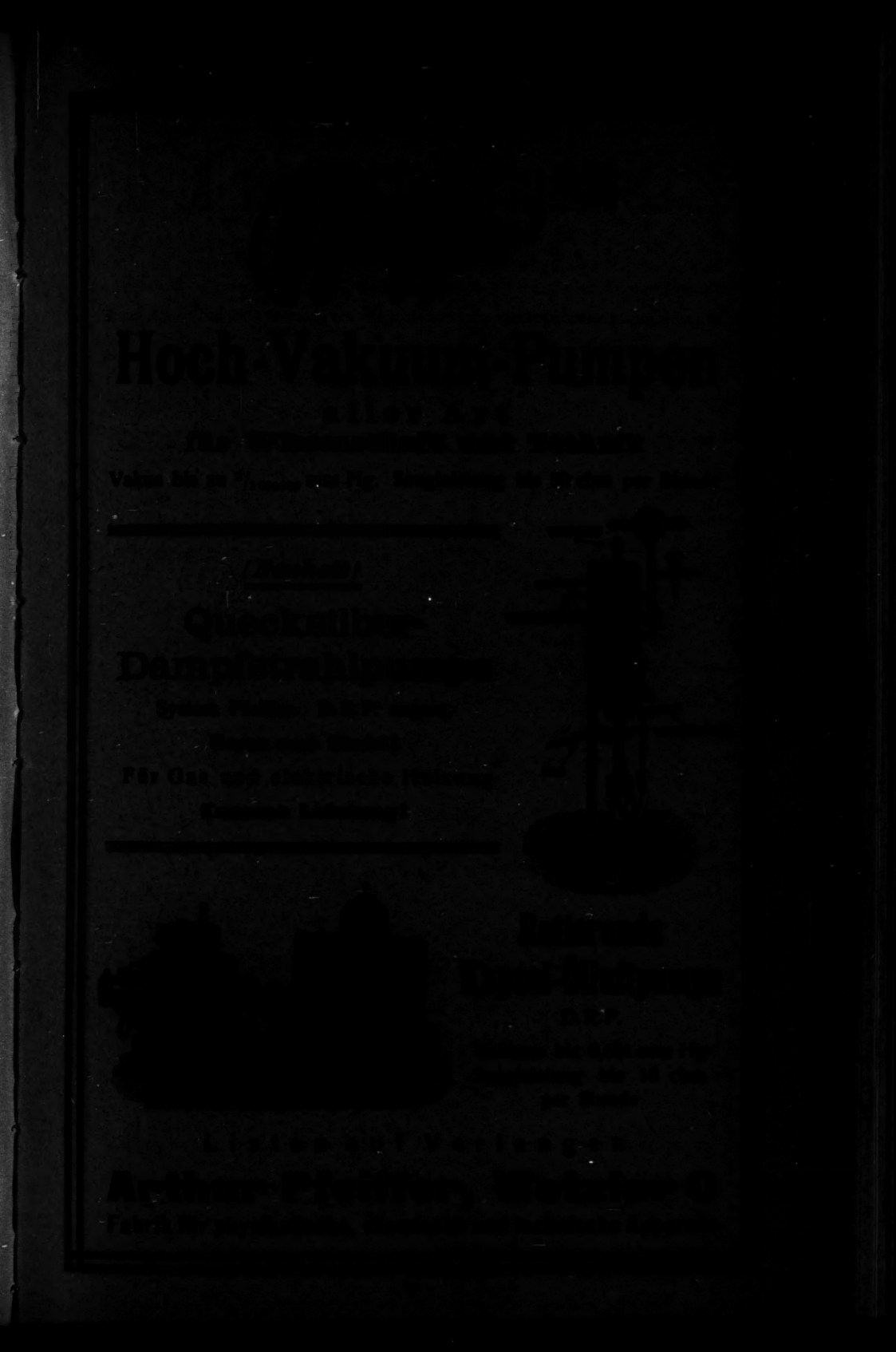
Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

H. Kneser.

OBERLIN COLLEGE



1923. № 24.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 72.

1. Über die Elektrizitätsleitung von Salzdämpfen. Abhandlung IV;

von Gerhard C. Schmidt u. Roland Walter.

§ 1. Einleitung.

Wie der eine von uns[1]) nachgewiesen, sind die Dämpfe der leichtflüchtigen Halogensalze des Cadmiums, Zinks, Ammoniums, Eisens und Aluminiums selbst bei verhältnismäßig niedriger Temperatur gute Leiter der Elektrizität, dagegen die Dämpfe der Quecksilber-, Zinn-, Antimonhalogensalze, ferner des Arseniks, Jods usw. und aller untersuchten organischen Substanzen Isolatoren. Die Leitfähigkeit änderte sich sehr stark mit der Zeit; meistenteils nahm sie mit der Zeit anfangs zu, erreichte ein Maximum, um darauf zu fallen, bis sie schließlich längere Zeit ungefähr konstant blieb. In Abh. II konnte gezeigt werden, daß die Leitfähigkeit unter bestimmten, aber nicht genau festzustellenden Bedingungen konstant war. Die mit der Zeit erfolgende Zunahme der Leitfähigkeit wurde darauf zurückgeführt, daß der Dampf eine gewisse Zeit bedurfte, um bis zur Sonde zu gelangen, und die dann beobachtete Abnahme darauf, daß infolge Kleinerwerdens der Oberfläche infolge Zusammenbackens der Teilchen, Verdampfung usw. die Verdampfungsgeschwindigkeit abnahm; infolgedessen sollte die Dampfdichte in dem Raume, in welchem die Leitfähigkeit gemessen wurde, allmählich kleiner werden und damit auch die Stromstärke.

In der folgenden Abhandlung III wurde versucht, rekapitulierbare Werte zu erhalten. Trotzdem die Experimente auf das mannigfachste modifiziert wurden, gelang dies nicht. Die

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. **35**. S. 401, 1911; **41**. S. 673, 1913; **66**. p. 341, 1918. Im folgenden bezeichnen wir diese Abhandlungen als Abh. I, II und III.

erhaltenen Zahlen wichen selbst unter den gleichen Versuchsbedingungen um Hunderte von Prozent voneinander ab. Unter diesen Umständen verliert jede Erklärung der beobachteten Erscheinungen sehr an Sicherheit; dies gilt auch von der oben gegebenen.

Da die Salze des Zn, Cd usw. sich leicht zersetzen, so war es möglich, daß die chemische Zersetzung die Ionen liefere. Wenn der Zerfall nicht regelmäßig und bei den verschiedenen Beobachtungsreihen nicht mit derselben Geschwindigkeit erfolgte, so würde sich die Inkonstanz der erhaltenen Werte und ihre Nichtrekapitulierbarkeit leicht erklären. Dann wäre aber zu erwarten, daß man auch für alle anderen physikalischen Größen keine konstanten Werte erhalten würde. Um dies zu prüfen, wurden die Dampfdrucke gemessen. Es hat sich ergeben, daß, wenn man sorgsam Sauerstoff fernhält, man beim CdJ_2 gut konstante Werte erhält; auch waren nach tagelangem Erhitzen keine nennenswerten Mengen von freiem Jod nachzuweisen. Dagegen zersetzten sich alle anderen Salze des Cd und Zn. Die Erwartung, daß man für die Leitfähigkeit beim CdJ_2 bei Fernhaltung von O konstante Werte bekommen würde, hat sich nicht bestätigt. Wir haben daraufhin die Erscheinung genauer untersucht und hat sich dabei das überraschende Ergebnis ergeben, daß die oben erwähnten Salze nur positive Ionen aussenden.

A. Dampfdrucke der Halogensalze des Zn und Cd.

§ 2. Versuchsanordnung zur Messung der Dampfdrucke.

Zur Messung der kleinen Dampfdrucke, die allein in Frage kamen, war nur die Strömungsmethode geeignet. Die zu untersuchende Substanz befand sich in einem U-Rohr *A* (Fig. 1), das durch zwei luftdicht schließende Schliffe mit dem Gaszuleitungsrohr *B* und dem Ableitungsrohr *C* verbunden war. Außerdem waren die Schliffe noch durch zwei Stahlfedern fest aufeinandergepreßt. Im Zuleitungsrohr befanden sich Kupfer- und Silberspäne, damit das Gas die Temperatur des Ofens schnell annahm. In das Ableitungsrohr *C* ragte bis möglichst nahe an das U-Rohr heran, eine dünne Glasröhre, die zur Aufnahme des Thermoelements diente. Der ganze Apparat bestand aus Quarz und bei späteren Versuchen aus

schwer schmelzbarem Glase und wurde zwecks Erhitzung in einen langen elektrischen Ofen gebracht, dessen freie Stellen mit Asbest gefüllt waren. Die Ausführung des Versuchs war die übliche[1]); es erübrigen sich daher weitere Angaben; nur erwähnt soll werden, daß der hindurchströmende Stickstoff auf das sorgfältigste von jeder Spur Sauerstoff und Feuchtigkeit befreit wurde, da diese die Salze zersetzten. Die Thermoelemente wurden mit schmelzendem Eis, siedendem Wasser und Schwefel und mit Hilfe der Schmelzpunkte des Pb, Sn, Cd und Zn geeicht. Die zu untersuchenden Salze waren von Kahlbaum-Berlin und Merck-Darmstadt bezogen. Die Bestimmungen wurden mit beiden Präparaten bei denselben Temperaturen durchgeführt, um sicher zu sein, daß keine Verunreinigungen die Resultate fälschten. Zur Berechnung des Dampfdrucks aus dem Gewichtsverlust des U-Rohrs wurde das Verfahren von Pfaundler[2]) benutzt.

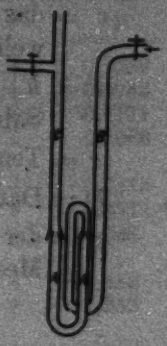


Fig. 1.

§ 8. Dampfdrucke des Quecksilberchlorids.

Behufs Prüfung des Apparats wurden die Dampfdrucke des Quecksilberchlorids gemessen, von dem schon Bestimmungen von Richter[3]), Stelzner[4]), Arctowski[5]) und Niederschulte[6]) vorliegen. Richter arbeitete nach der statischen, Stelzner nach der dynamischen, Arctowski und Niederschulte nach der Strömungsmethode. Für die im folgenden innegehaltenen Temperaturen kommen nur die Werte von Niederschulte in Betracht.

Die folgende Tab. I und II enthalten die Messungen. In denselben bedeuten

---

1) Vgl. Niederschulte, Diss. Erlangen 1903, Robert Naumann, Diss. Berlin 1907, L. Pfaundler, Wied. Ann. 68. p. 36, 1897.
2) L. Pfaundler a. a. O.
3) Richter, Chem. Ber. 19. p. 1057, 1886.
4) Stelzner, Diss. Erlangen 1901.
5) Arctowski, Zeitschr. anorg. Ch. 7. p. 167, 1894.
6) Niederschulte, Diss. Erlangen 1903.

t = Versuchstemperatur, also Temperatur des elektrischen Ofens,

q = Gewichtsverlust des Salzes im U-Rohr,

v = das im Gasometer gemessene Volumen Luft bzw. N_2, welches über das Salz geleitet wurde,

$P = h + p$ = Partialdruck der Luft + Partialdruck des Salzes,

τ = Temperatur des Wassers im Gasometer,

D = Dauer des Versuchs in Stunden,

p = der mit Hilfe der Formeln von Pfaundler aus den Messungen sich ergebende Dampfdruck.

Tabelle I.

$HgCl_2$ Cu/Constantan-Thermoelement

t	q	v	P	τ	D	p
	0,0159	10 Lit. Luft	760,74	19,5°	3	0,1092
100°	0,0169	„	762,08	19,5	4	0,1160
	0,0171	„	760,74	19,5	6	0,1174
	0,0484	„	760,45	19,5	3	0,3323
115°	0,0484	„	761,74	20,5	4	0,3286
	0,0471	„	750,81	21,5	6	0,3269
	0,1074	„	753,1	19,5	3	0,7375
128°	0,1025	„	757,15	19,5	4	0,7038
	0,1049	„	760,09	19,5	6	0,7202
	0,2222	„	750,75	20,5	3	1,534
140°	0,2181	„	755,4	18	4	1,487
	0,212	„	747,9	18,5	6	1,450
	0,4942	„	754,9	16	3	3,341
155°	0,5056	„	761,74	17	4	3,432
	0,491	„	763,3	18	6	3,349
	0,9652	„	764,07	19	4	6,597
170°	1,0264	„	765,01	17	6	6,967
	0,9642	„	763,3	18	8	6,576
	1,53	„	764,67	18	4	10,43
180°	1,4268	„	764,07	19	6	9,751
	1,4544	„	764,82	17	8	9,873

Tabelle II.

$HgCl_2$ Pt/Pt-Rh-Element

t	q	v	P	τ	D	p
	0,0160	10 Lit. Luft	752,76	17,5°	4	0,1089
100°	0,0138	10 „ N_2	752,8	19	4	0,0943
	0,0173	10 „ Luft	762,51	16,5	4	0,1171
	0,0157	10 „ „	764,18	17	3	0,1066
	0,1065	10 „ Luft	754,78	16,5	4	0,7215
128°	0,0925	10 „ N_2	752,8	20	4	0,6371
	0,087	10 „ N_2	763,7	20	4	0,668
	0,209	10 „ Luft	767,35	16	4	1,412
140°	0,198	10 „ „	767,35	18,5	3	1,353
	0,4581	10 „ Luft	754,78	17,5	4	3,097
155°	0,5035	10 „ N_2	757,96	17	4	3,418
	1,0228	10 „ Luft	754,78	18,5	4	6,994
	1,135	10 „ N_2	764,14	16,5	6	7,704
170°	1,0898	10 „ N_2	763,7	18	4	7,433
	1,0448	10 „ Luft	765,7	19	6	7,16
	0,9542	10 „ „	765,7	21	4	6,603
	1,626	10 „ Luft	768,1	18	6	11,09
180°	1,490	10 „ „	766,53	20	4	10,26

Als Mittelwerte aus sämtlichen Bestimmungen ergeben sich die folgenden Zahlen:

Tabelle III.

t	p
100°	0,1099
115	0,3293
128	0,696
140	1,447
155	3,346
170	7,142
180	10,212

Mit Hilfe dieser Zahlen wurden die Konstanten der Formel von Dupré-Hertz

$$\log p = k - m \log T - \frac{n}{T}$$

und von Nernst

$$\log p = -\frac{A}{T} + B$$

berechnet. Es ergaben sich die Werte

$k = 70.\ 186\ 043\ 08$
$m = 19.\ 658\ 748\ 62$
$n = 7660.\ 848\ 586\ 85$
und $A = 4228.\ 984\ 024\ 72$
$B = 10.\ 889\ 946\ 21$

Wie gut die beiden Formeln die Versuche wiedergeben, geht aus folgender Tabelle hervor:

Tabelle IV.

t	Dupré-Hertz	Nernst	beob.
100°	0,1099	0,1061	0,1099
115	0,3151	0,3094	0,3293
128	0,7196	0,698	0,696
140	1,447	1,414	1,447
155	3,206	3,23	3,346
170	6,576	6,98	7,142
180	10,745	11,33	10,212

MitHilfe der Formel von Dupré-Hertz und Nernst wurden die Zwischentemperaturen berechnet und mit den Werten von Niederschulte[1]) verglichen.

Tabelle V.

$HgCl_2$.

t	p Dupré-Hertz	p Niederschulte	p Nernst	p graphisch
100°	0,1099	0,10	0,1061	0,11
110	0,224	0,19	0,223	0,22
120	0,437	0,38	0,426	0,43
130	0,812	0,77	0,788	0,79
140	1,447	1,35	1,414	1,45
150	2,480	2,37	2,468	2,49
160	4,107	3,87	4,20	4,30
170	6,576	6,20	6,98	7,14
180	10,745	9,75	11,33	10,21

1) Bei der Nachrechnung der Niederschulteschen Zahlen ergaben sich Unstimmigkeiten zwischen seinen und unseren Rechnungen. Leider konnte die eventuelle Fehlerquelle nicht festgestellt werden, da Niederschultein fast allen Fällen seine Beobachtungsdaten nicht genügend ausführlich angegeben hat.

Die Werte von Niederschulte sind durchweg niedriger als unsere; da wir aber viel mehr Bestimmungen ausgeführt und die Versuchsbedingungen viel mehr variiert haben, halten wir unsere Zahlen für die zuverlässigeren.

Wie aus den einzelnen Beobachtungen der Tab. I und II hervorgeht, sind die Differenzen unter den zu einer bestimmten Temperatur gehörenden Dampfdrucken nicht unbeträchtlich, trotzdem dürfte die angewandte Methode ausreichen, um zu entscheiden, ob die Cadmium- und Zinksalze konstante Dampfdrucke geben, oder ob dies infolge der Zersetzung nicht der Fall ist. Tatsächlich läßt sich, wie aus dem folgenden hervorgeht, mit Sicherheit ein diesbezüglicher Schluß ziehen.

§ 4. Dampfdrucke des Jodcadmiums.

Tabelle VI.

CdJ_2 Cu/Const-Element

t	q	v	P	τ	D	p
	0,0087	8 Lit. N_2	756,29	28°	2,4	0,0579
343°	0,0085	8 „ „	757,18	27	3,2	0,0563
	0,0089	8 „ „	746,92	31	4,8	0,0603
	0,0148	8 „ „	757,12	31	2,4	0,1002
352,4	0,0165	8 „ „	749,08	27,5	3,2	0,1070
	0,0162	8 „ „	761,08	28	4,8	0,1077
	0,0285	8 „ „	758,46	26	4,8	0,1878
362,2	0,0274	8 „ „	758,29	26	3,2	0,1803
	0,0281	8 „ „	757,39	25	2,4	0,1839
385,4	0,0398	5 „ „	756,97	27	4	0,4214
	0,0424	5 „ „	756,05	29	3	0,4539
406,2	0,0740	5 „ „	751,47	24	3	0,7623
	0,0728	5 „ „	755,67	24,5	4	0,7605
426,7	0,1261	5 „ „	755,08	28,5	4	1,346
	0,1266	5 „ „	754,95	27	2	1,340

Tabelle VII.

CdJ_2 Pt/Pt-Rh-Element

t	q	v	P	τ	D	p
350°	0,0128	8 Lit. N_2	759,38	25°	3,2	0,084
	0,0102	8 „ „	759,38	23,5	2,4	0,088
365	0,0335	8 „ „	760,45	19	3,2	0,2127
	0,0334	8 „ „	760,05	22	3,2	0,2153
	0,0334	8 „ „	755,8	22	2,4	0,2153
372	0,0272	5 „ „	745,55	22	2,4	0,2806
	0,0415	8 „ „	745,42	24	4	0,2703
390	0,056	6 „ „	761,66	23,5	2,4	0,484
	0,0613	6 „ „	753,97	21	2,4	0,524
410	0,098	6 „ „	753,68	22	2,4	0,831
	0,0814	5 „ „	757,25	22	2,0	0,839
430	0,1782	6 „ „	755,97	22	2,4	1,532
	0,145	5 „ „	749,24	21	2,5	1,489
450	0,2865	5 „ „	753,35	21	2	2,943
	0,2803	5 „ „	752,72	22	3	2,891

Als Mittelwerte von p für die einzelnen Temperaturen ergeben sich folgende Zahlen:

Tabelle VIII.

t	p	p Du.-H.	p Nernst
343	0,0582	—	—
350	0,0860	0,1078	0,106
352,4	0,1050	—	—
362,2	0,1840	—	—
365	0,2144	0,1954	0,1847
372	0,2750	0,2542	0,237
385,4	0,4376	—	—
390	0,504	0,481	0,440
406,2	0,761	—	—
410	0,835	0,917	0,842
426,7	1,343	—	—
430	1,510	1,649	1,553
450	2,917	2,818	2,77

Die Konstanten der Formel von Dupré-Hertz waren

$$k = 96.\ 192\ 072\ 42$$
$$m = 26.\ 646\ 978\ 81$$
$$n = 14138.\ 771\ 063\ 78$$

und die der Formel von Nernst

$$A = 6381.\ 647\ 404\ 46$$
$$B = 9.\ 268\ 968\ 91$$

Wie aus der Tab. VIII hervorgeht, geben die beiden Formeln die Versuche nicht so gut wieder, wie die Beobachtungen von $HgCl_2$.

Mit Hilfe dieser beiden Formeln und mittels graphischer Interpolation wurden folgende Werte interpoliert.

Tabelle IX.

CdJ_2

t	p Dupré-Hertz	p Nernst	p graphisch
350	0,1078	0,106	0,086
360	0,161	0,154	0,160
370	0,236	0,221	0,255
380	0,340	0,313	0,365
390	0,481	0,440	0,504
400	0,669	0,612	0,680
410	0,917	0,842	0,835
420	1,238	1,149	1,090
430	1,649	1,553	1,51
440	2,168	2,06	2,19
450	2,818	2,77	2,92

Vergleicht man die zu den einzelnen Temperaturen gehörenden Beobachtungen von Tab. VI und VII miteinander, so erkennt man, daß sie übereinstimmen. Die Fehler der einzelnen Beobachtungen sind nicht größer, als beim $HgCl_2$. Die Zahlen beweisen, daß *CdJ_2 sich nicht beim Erhitzen in nennenswerter Weise zersetzt.*

§ 5. Dampfdrucke des $CdBr_2$ und der übrigen Halogensalze des Zn und Cd.

Das Salz wurde während der ganzen Beobachtungsreihe, die bei 450° durchgeführt wurde, nicht erneuert; bei 480° be-

ziehen sich die ersten 6 Beobachtungen auf ein- und dieselbe Füllung, darauf wurde das U-Rohr mit frischem Salz beschickt

Tabelle X.

$CdBr_2$

t	q	v	P	τ	D	p
	0,0083	6 Lit. N_2	755,41	22°	3	0,09592
	0,0215	8 „ „	752,21	19,5	3,2	0,1842
	0,028	8 „ „	753,5	22	3,2	0,2428
450°	0,021	6 „ „	753,5	23	2,4	0,2441
	0,0304	8 „ „	757,01	19,5	4	0,2604
	0,0305	8 „ „	756,8	21,5	3,2	0,2638
	0,0268	7 „ „	757,39	21	3,4	0,2642
	0,0414	6 „ „	742,81	21,5	2,4	0,4777
	0,0516	7 „ „	752,56	18	2,8	0,5016
	0,0669	7 „ „	752,93	21	3,5	0,6590
480°	0,0826	7 „ „	758,22	19	2,8	0,8066
	0,082	6 „ „	765,15	18,5	2,4	0,9350
	0,0817	6 „ „	764,45	22	2,4	0,944
	0,0373	6 „ „	760,96	17,5	2,4	0,422
480°	0,0519	6 „ „	759,12	23	5	0,603
	0,0456	6 „ „	755,55	19	2,4	0,520

und eine zweite Reihe bei 480° durchgeführt. Man erkennt aus der Tabelle

1. Der Dampfdruck nimmt mit der Dauer der Erhitzung zu.
2. Der Dampfdruck ist um so größer, je öfter das Salz vorher erhitzt worden ist.

Offenbar zersetzt sich das Salz selbst in reinem Stickstoffstrome und ist es daher nicht möglich, zuverlässige Werte für den Dampfdruck zu erhalten. Mercksche und Kahlbaumsche Präparate verhielten sich gleich; es erübrigt sich daher, weitere Zahlen anzugeben.

$CdCl_2$, ZnJ_2, $ZnBr_2$ und ZnJ_2 zersetzten sich ebenfalls und differierten die Dampfdrucke von Versuch zu Versuch.

Aus den §§ 4 und 5 ergibt sich somit: *Cadmiumjodid zersetzt sich nicht in einer N-Atmosphäre; infolgedessen lassen sich die Dampfdrucke dieses Salzes messen. Alle übrigen Halogen-*

salze des Zn und Cd zersetzen sich und ist es daher nicht möglich, deren Dampfdrucke zu bestimmen.

Es erschien noch von Interesse eine zweite physikalische Konstante von CdJ_2 zu bestimmen, um zu prüfen, ob auch bei Messung derselben rekapitulierbare Werte erhalten würden. Zu dem Zweck wählten wir den Schmelzpunkt. Er wurde in bekannter Weise mit Hilfe des elektrischen Ofens bestimmt; er war nicht sehr ausgeprägt, da das CdJ_2 bei höheren Temperaturen plastisch ist. In 7 Reihen ergab sich als Schmelzpunkt $381 \pm 1{,}5^0$ C. Trotzdem ein und dieselbe Probe des Salzes siebenmal weit über den Schmelzpunkt erhitzt war, blieb der Schmelzpunkt konstant. Auch diese Beobachtung spricht dafür, daß CdJ_2 sich nicht zersetzt.

B. Leitfähigkeit der Halogensalze des Zn und Cd, insbesondere des CdJ_2.

§ 6. Versuchsanordnung.

Auf Grund der vorhergehenden Versuche erwarteten wir beim CdJ_2 konstante und rekapitulierbare Werte für die Leitfähigkeit zu erhalten. Benutzt wurde die folgende Versuchsanordnung. Ein Rohr von beistehender Form (Fig. 2), Länge 40 cm, Durchmesser des Schenkels *A* 1,5 cm, Durchmesser des Schenkels *B* 0,3 cm enthielt in dem engen Schenkel *B* Silberspäne, die dazu dienten, den langsam durch das Rohr streichenden Stickstoff auf die gewünschte Temperatur zu bringen. Bei *F* befand sich ein kleiner Pfropfen von Glaswolle; darüber war eine große Schicht von CdJ_2 gebracht, deren Höhe mannigfach variiert wurde. In dem Rohr *A* befand sich ein Platinzylinder *CC*, der durch den Draht *G* (punktiert gezeichnet) mit der Batterie verbunden wurde. Auf das Rohr *A* wurde mit weißem Siegellack ein zweites gekittet, das sich oben verjüngte und in der Mitte die Sonde *E* aus Platin enthielt, die bis auf eine gewisse Strecke in Glas eingeschmolzen war, so daß der untere Teil frei blieb. *E* war unter Dazwischenschaltung eines Erdkontakts, der unterbrochen werden konnte, mit dem

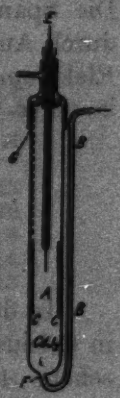


Fig. 2.

Elektrometer verbunden. Damit die Elektrizität nicht direkt von dem Platinzylinder zur Sonde durch das Glas überging, befand sich zwischen beiden eine zur Erde abgeleitete Messingröhre *D*. Zur Messung des Stroms diente ein Dolezalekscher Elektrometer, dessen Empfindlichkeit ca. 200 Skt. = 1 Volt betrug. Das Rohr wurde durch einen elektrischen Ofen erhitzt, dessen Temperatur mit Thermoelementen gemessen wurde. Der Druck wurde mit einem Manometer bestimmt. Als Kapazitäten dienten Kondensatoren mit Bernsteinisolation.

Das Rohr wurde erst leer geprüft; zeigte sich bis 500° keine Leitfähigkeit, so wurde nach Entfernung des oberen Teils des Rohres *A* mit Hilfe eines langen Trichters Salz nach unten gebracht. Nachdem das Ganze wieder zusammengesetzt war, gab der Ausschlag des Elektrometers evtl. nach Anhängung von Kapazitäten die Stromstärke an. Mit der Erhitzung wurde erst begonnen, nachdem aller Sauerstoff durch Stickstoff entfernt war. Während des ganzen Versuchs wurde Stickstoff durch *B* und *A* hindurchgeleitet, und blieb die Pumpe dauernd in Tätigkeit. Mit Hilfe eines Regulierhahns konnte die Strömungsgeschwindigkeit reguliert werden. Um kleine Druckschwankungen auszugleichen, war zwischen dem Rohr und der Pumpe eine große 5 Liter fassende Flasche eingeschaltet. Die Spannung lag dauernd an *C C*. Von Zeit zu Zeit wurde durch Aufhebung des Erdkontakts die Sonde *E* direkt mit dem Elektrometer verbunden und der Ausschlag des Elektrometers in einer bestimmten Zeit gemessen.

Messungen.

§ 7. Leitfähigkeit von CdJ_2.

In den nachfolgenden Tabellen bedeuten *T* die Temperatur in Celsiusgraden, *Z* die Zeit in Minuten, *p* den Druck; der Ausschlag *A* gibt ein Maß für die Stromstärke. Wir haben die Umrechnung auf Amperes nicht durchgeführt, da die Werte bei jeder Versuchsreihe verschieden waren. Der Größenordnung nach betrugen die Stromstärken 10^{-11} — 10^{-13} Amp.

Die Leitfähigkeit ändert sich sehr stark mit der Zeit und zwar tritt auch jetzt wieder die typische Form der Kurve auf:

Tabelle XI.

CdJ_2.

$T = 241°$ C $p = 14$ mm Spannung + 2 Volt

Z	A	Z	A	Z	A
4	462	18	208	49	212
6	578	20	185	52	208
8,5	648	22	176	59	215
10,5	538	27,5	167	66	212
12	408	30,5	176	70	214
14	309	33	185	76	206
16	246	45	211		

anfangs nimmt die Leitfähigkeit zu, erreicht ein Maximum, um darauf zuerst schnell, nachher langsam zu fallen (vgl. Abh. I und II).

Von den vielen Beobachtungsreihen bei verschiedenen Temperaturen, Drucken, Durchströmungsgeschwindigkeiten usw. teilen wir nur noch eine mit.

Tabelle XII.

CdJ_2.

$T = 360°$ C $p = 22$ mm Spannung − 2 Volt

Z	A	Z	A	Z	A
0	2120	35	147	75	23
2	1795	38	122	78	22
4	1540	40	110	93	15
6	1130	43	102	95	14
8,5	822	47	87	97	13
11,5	669	50	75	98,5	12,5
14	515	52	71	101	13
16	408	54	68	103	13
18,5	355	58	60	105	13
20,5	334	60	55	107	13
23	279	63	49	117	12
26	245	66	41	127	12
29,5	206	71	30		
32,5	178	73	26		

Aus diesen Beobachtungen ersieht man den enormen Einfluß der Zeit. Die Kurve verläuft etwas anders als die vorhergehende, insofern gleich zu Beginn ein Abfall auftritt, während die erste anfangs ein Steigen zeigt. Wie bereits in den früheren Abhandlungen betont, ist das Steigen namentlich bei den Cadmiumsalzen nicht sehr ausgeprägt.

Aus den Beobachtungsreihen ergibt sich:

1. *Unter denselben Bedingungen (wie Fernhalten von O, nicht allzuhoher Temperatur usw.), unter denen man für den Dampfdruck absolut konstante Werte erhält, ist die Leitfähigkeit von CdJ_2 keineswegs konstant, sondern ändert sich außerordentlich stark mit der Zeit, indem sie anfangs zunimmt, darauf ein Maximum erreicht, um dann zu fallen.*

2. *Da bei den analogen Versuchen des Abschnittes A das durch das Rohr strömende Gas dauernd mit Dampf gesättigt war und der Dampf wegen des Durchleitens von Stickstoff durch das Rohr sehr schnell nach oben gelangte, so ist die oben in der Einleitung erwähnte Erklärung des einen von uns, daß der Dampf erst allmählich zur Sonde gelangt und dadurch das Anwachsen der Leitfähigkeit hervorruft, nicht richtig.*

3. *Das Abfallen der Leitfähigkeitskurve mit der Zeit hat der eine von uns auf das Kleinerwerden der Oberfläche und auf die hierdurch hervorgerufene Abnahme der Verdampfungsgeschwindigkeit zurückgeführt* (siehe auch die Einleitung). *Auch diese Erklärung ist nicht richtig, da, wie aus den Zahlen der Tab. XI und XII hervorgeht, die Abnahme auch eintritt, wenn Stickstoff dauernd durch das Salz geleitet wird, wobei das Gas gesättigt bleibt.* Das Kleinerwerden der Oberfläche infolge der Verdampfung, des Zusammenbackens der einzelnen Krystalle spielt bei den Versuchen dieses Paragraphen keine Rolle.

§ 8. Leitfähigkeit von Zinkchlorid.

Es schien noch von Interesse, zu prüfen, ob die anderen Halogensalze des Cd unf Zn nach dem neuen Verfahren dieselben Kurven gäben, wie früher (ohne Durchströmen von N_2). Dies war in der Tat der Fall. Ein Beispiel soll daher zur Erläuterung dienen.

Tabelle XIII.

$ZnCl_2$

Mit Gasstrom		Ohne Gasstrom	
T=304° C. p=32 mm. Sp.=2 V.		T=220° C. p=16 mm Sp.=2 V.	
Z	A	Z	A
4	136	1	241
6	126	3	206
9	105	5	172
12	81	7	146
15	71	9	133
17	66	11	123
19	62	13	114
21	58	16	102
27	51		
30	51		
35	45		
37	42		
41	41		
43	41		
47	41		

Der große Einfluß der Zeit zeigt sich auch hier wieder.

§ 9. Nachweis, daß die Zersetzung der Salze durch Sauerstoff und Wasserdampf nicht die Ursache der Leitfähigkeit ist.

Bereits G. Schmidt[1]) hat nachgewiesen, daß Gegenwart von O oder H_2O-Dampf die Leitfähigkeit nicht veränderten. Diese Resultate sind später von Sheard[2]) bestätigt worden. Auch mit der neuen Anordnung wurden die gleichen Resultate erzielt; es erübrigt sich daher die Beschreibung der Versuche.

§ 10. Nachweis, daß die Abnahme der Leitfähigkeit nicht daher rührt, daß eine fremde Substanz aus dem Salz herausdestilliert.

Die Abnahme der Leitfähigkeit mit der Zeit ließe sich einfach erklären, wenn es gelänge nachzuweisen, daß eine fremde Substanz, welche die Leitfähigkeit bedingt, allmählich aus dem CdJ_2 herausdestilliert. Dann müßte nach Erhitzen auf höhere Temperatur beim Zurückgehen auf die ursprüngliche Temperatur die Leitfähigkeit kleiner geworden sein. Um dies

1) G. C. Schmidt, Abh. I, 417.
2) Ch. Sheard, Phil. Mag. 25. 370, 1913.

Tabelle XIV.

Z	A	Z	A	Z	A	Z	A	Z	A
Temp. 305°		Temp. 305°		Temp. 340°		Temp. 360°		Temp. 305°	
0	191	1 St. 50	175	4 St. 50	720	6 St. 29	1330	8 St. 43	74
3	278	54	173	55	724	35	1365	50	78
7	363	58	172	5 St. 0	718	40	1350	55	77
11	369	2 St. 8	168	6	677	43	1330	59	78
15	373	18	167	11	636	47	1320	9 St. 5	79
19	374	37	158	15	610	52	1320	9	80
23	361	46	183	19	600	7 St. 1	1350	13	78
27	350	52	154	22	595	4	1340		
32	333	3 St. 6	145	28	556	12	1315		
35	314	16	140	32	547	15	1320		
38	295	20	137	36	540	30	1280		
43	273	24	136	41	530	35	1285		
48	269	28	131	44	531	39	1305		
1 St. 0	248	36	128	48	530	51	1280		
6,5	239	47	124	51	526	Temp. 340°			
13	218	4 St. 5	123	55	521				
20	208	9	124	6 St. 1	510	7 St. 57	486		
22	198	13	123	5	500	8 St. 1	475		
25	192	19	123	10	492	11	480		
37	184	29	123	16	482	17	480		
45	178	34	122	19	476	21	482		
						28	490		

zu prüfen, wurde CdJ_2 bei einer bestimmten Temperatur bis zur Konstanz beobachtet, darauf wurde höher erhitzt und dann zur ursprünglichen Temperatur zurückgekehrt. Die Tab. XIV gibt die Versuche wieder.

Die einzelnen Teile der Beobachtungsreihe der Tab. XIV zeigen die Mannigfaltigkeit der Kurven, welche auftreten können. Die Leitfähigkeit nimmt anfangs zu, erreicht ein Maximum und fällt darauf (vgl. Teil 1, Temp. 305° C). Als darauf höher erhitzt wurde auf 340° C, nahm die Leitfähigkeit mit der Zeit anfangs ein wenig zu und darauf ab; als dann noch höher erhitzt wurde auf 360°, blieb die Leitfähigkeit dauernd ungefähr konstant. Nach dem Abkühlen auf 340° erhielt man wieder eine konstante Leitfähigkeit, die ebensogroß war wie die früher erhaltene. Beim noch stärkeren Abkühlen auf 305° zeigte die Leitfähigkeit wieder keine Änderung mit der Zeit; die Leitfähigkeit war in diesem Fall etwas kleiner, als die vor 4 Stunden erhaltene. Diese Differenz rührt wohl sicher daher, daß bei dem ersten Erhitzen nicht so lange beobachtet war, bis die Leitfähigkeit ganz konstant war. Ganz allgemein findet man,

daß, selbst wenn die Leitfähigkeit während einer gewissen, nicht allzulangen Zeit, konstant zu sein scheint, eine Tendenz der Kurve vorliegt, zu fallen; infolgedessen werden die Werte, wenn man nur lange genug wartet, stets kleiner.

Aus der Tab. XIV geht mit Sicherheit hervor, daß *eine fremde Substanz, die allmählich herausdestilliert, nicht die Ursache der Änderung der Leitfähigkeit ist, denn bei stärkerem Erhitzen hätte diese in größerer Menge herausdestilliert sein müssen und hätte somit die Leitfähigkeit beim Zurückgehen auf die ursprüngliche Temperatur einen kleineren Wert als vorher zeigen müssen, was tatsächlich nicht der Fall ist.*

§ 11. Nachweis, daß die Leitfähigkeit im flüssigen Zustand konstant ist, während sie in dem damit im Gleichgewicht stehenden Dampf sich mit der Zeit ändert.

Falls wir es bei der Leitfähigkeit des CdJ_2 mit einer Volumenionisation zu tun haben, so muß die Konzentration der Ionen in einem mit der Schmelze bzw. dem festen Salz in Berührung stehenden Dampf in konstantem Verhältnis zu der Konzentration der Ionen in der Flüssigkeit bzw. dem festen Salz stehen. Es erschien daher denkbar, daß das CdJ_2 sich in eine Substanz *B* umlagerte mit großer Leitfähigkeit und diese überginge in eine Substanz *C* mit kleinerer Leitfähigkeit. Der Verlauf der Kurve, anfangs Steigen, darauf Fallen, spricht für eine derartige Umwandlung. Der Plan, die Leitfähigkeit in festem Salz festzustellen, wie es anfangs unsere Absicht war, wurde aufgegeben, weil sich, wie aus den Untersuchungen von J. Rosenthal[1]), E. Lorenz[2]) u. a. hervorgeht, niemals ein guter Kontakt zwischen Elektrode und festem Salz gewinnen läßt, wodurch die Messungen völlig unsicher werden. Im flüssigen Zustand läßt sich aber ein sicherer Kontakt leicht erreichen. E. Lorenz hat nun nachgewiesen, daß man mit flüssigem CdJ_2 gut rekapitulierbare Werte bis 470° C erhält, also bei einer Temperatur, die weit höher liegt als der Schmelzpunkt 381° und auch weit höher liegt, als die Temperaturen, bei denen

1) J. Rosenthal, Diss. Erlangen 1891. Ann. d. Phys. u. Chem. 43. 700, 1891.

2) E. Lorenz, Diss. Halle 1913.

die obigen Messungen ausgeführt worden sind. E. Lorenz erwähnt ausdrücklich, daß erst bei 500° infolge Zersetzung der Schmelze die Leitfähigkeit bei konstant gehaltener Temperatur mit der Zeit zugenommen habe; unterhalb dieser Temperatur war die Leitfähigkeit von der Zeit unabhängig. Ganz anders verhält sich der Dampf, wie die folgenden Beobachtungsreihen zeigen. Damit das Salz bei diesen Beobachtungen eine große Oberfläche bildete, waren dem Salz Glasperlen zugemischt, die sich mit flüssigem Salz bezogen und verhinderten, daß das Salz in die Röhre *B* drang.

Tabelle XV.

CdJ_2. $p = 34{,}0$ mm. $T = 444°$ C + 2 Volt		CdJ_2. $p = 34$ mm. $T = 444°$ C − 2 Volt	
Z	*A*	*Z*	*A*
0	280	0	213
3	194	2	153
6	138	5	121
9	122	8	94
12	93	14	79
17	62	18	54
26	26	22	40
29	22	27	30
32	18	32	25
36	14	44	17

Tabelle XVI.

CdJ_2. $p = 24$ mm. $T = 400°$. 2 Volt				$ZnCl_2$. $p = 21{,}8$ mm. $T = 306{,}5°$ 2 Volt			
Z	*A*	*Z*	*A*	*Z*	*A*	*Z*	*A*
3	319	51	53	0	377	95	184
5	305	61	36	8	638	105	198
8	296	63	34	14	740	114	221
10	284	66	32	20	800	120	244
15	264	69	31	33	820	145	289
21	223	76	27	37	810	158	305
25	184	80	23	47	553	181	308
29	161	83	24	64	276	186	318
39	85	89	23	78	192	190	320
47	64	106	18	81	187		

Man erhält also wieder die typischen Leitfähigkeitskurven. Aus diesen Beobachtungen geht somit hervor: *Während die*

Leitfähigkeit im flüssigen Zustand sich nicht mit der Zeit ändert, nimmt die Leitfähigkeit in dem über der Flüssigkeit stehenden Dampf mit der Zeit anfangs schnell zu, erreicht ein Maximum, um darauf zu fallen.

Es erhebt sich nun die Frage, welche Vorgänge die Leitfähigkeit im Dampfe bedingen? Um dies zu beantworten, wurde eine große Anzahl von Versuchen ausgeführt, die im folgenden beschrieben werden sollen.

§ 12. Nachweis, daß nur positive Ionen von dem Salz ausgesandt werden.

Bisher ist von allen Forschern, die auf diesem Gebiete gearbeitet haben, angenommen worden, daß die Ionisation der Halogensalze des Zn, Cd usw. eine Volumionisation sei. Von Sheard[1]) ist dies auch direkt bewiesen. Indem er in einem ähnlichen Apparat wie Fig. 1 das Salz und den äußeren Platinzylinder erhitzte, die Sonde, welche aus einem Rohr bestand, durch einen im Innern des Rohrs zirkulierenden Luftstrom abkühlte, erhielt er gleichgültig ob der äußere Zylinder + oder − geladen war, stets einen Strom, woraus er schloß, daß sich Ionen beiderlei Vorzeichens bildeten. Die Ergebnisse der §§ 10 und 11 haben in uns Zweifel an der Richtigkeit dieses Ergebnisses geweckt. Wir haben daher die Versuche von Sheard wieder aufgenommen. Der Apparat bestand aus einem Glasgefäß von etwa 15 cm Länge. An das Glas schmiegte sich eng an ein Drahtnetz aus Nickel *A*, das zur Erde abgeleitet war und zum elektrostatischen Schutz diente. Durch die eine Öffnung oben ging ein gut isolierter Draht, welcher mit einem kleinen Zylinder *B B* verbunden war. Derselbe führte zum Elektrometer. Durch die mittlere Öffnung ging ein dicker Cu-draht, der mit einem dünnen Pt-draht verbunden war und wieder in einem dicken Cu-draht endete; der Pt-draht blieb daher auch bei höherer Temperatur gespannt. Das Ende des letzteren tauchte in Hg, und konnte durch einen eingeschmol-

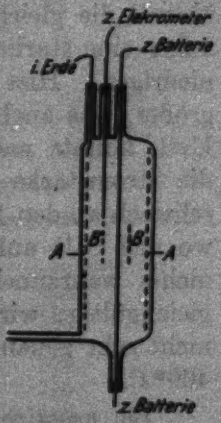


Fig. 3.

1) Sheard, a. a. O.

zenen Pt-stift mit der Batterie verbunden werden. Damit die Elektrizität nicht über das Glas zu dem mit dem Elektrometer verbundenen Zylinder gelangte, befand sich zwischen beiden ein zur Erde abgeleiteter Messingzylinder. Die Temperatur wurde aus der Widerstandsänderung des erhitzten Platindrahtes bestimmt. Durch eine isoliert stehende Batterie wurde der Pt-draht erwärmt und durch Ausschalten von isoliert stehenden Widerstand allmählich die Temperatur desselben gesteigert. Gleichzeitig wurde durch eine zweite Batterie + oder — Spannung an den Pt-draht gelegt und dann von Zeit zu Zeit die Stromstärke am Elektrometer abgelesen. Solange kein Salz auf dem Pt-draht sich befand, konnte man die Temperatur sehr hoch — bis zur Rotglut — steigern, ohne daß ein Strom nachzuweisen war. Erst bei Weißglut waren die Ströme beträchtlicher und nun wurden sowohl + wie — Ionen bzw. Elektronen ausgesandt. Nachdem die Röhre so geprüft worden war, wurde der Draht aus dem Glasrohr entfernt und etwas Salz darauf gebracht. Dies geschah, indem man entweder den Draht in flüssiges Salz tauchte oder sonst über das erhitzte Salz hielt; es destillierte dann letzteres und schlug sich auf dem kälteren Draht nieder. Bei den folgenden Versuchen ist die Temperatur auf dem ganzen Draht wahrscheinlich nicht überall die gleiche gewesen. Dort, wo Salz sich befand, und daher eine starke Verdampfung stattfand, war die Temperatur niedriger. Hier war auch der Querschnitt des Stromleiters größer, was auch eine Erniedrigung der Temperatur bewirkte. Evtl. konnte man dies auch direkt sehen. Denn wenn man die Stromstärke des Heizstromes steigerte, so glühte der Draht schwach an den Stellen, wo kein Salz sich befand; in der Mitte, wo das Salz aufgetragen war, war dagegen von der Rotglut nichts wahrzunehmen. Für die folgenden Versuche ist dies gleichgültig; wir teilen die Temperaturen nicht mit, da sie nicht sehr genau sind; sie waren stets niedrig zwischen 200 bis 400° C.

Bei *negativer* Ladung des Drahtes war nie eine Spur von Leitfähigkeit zu beobachten.

Wie die Tabellen zeigen, nimmt die Leitfähigkeit mit der Zeit ab; es rührt dies nicht daher, daß das Salz verdampft war; denn wenn man nach dem Abfall die Temperatur wieder steigerte, wurde die Leitfähigkeit wieder groß, um darauf zu fallen (vgl.

Tabelle XVII.

CdJ_2. Spannung + 2 Volt. $p = 0{,}24$ mm.

Z	Heizstrom	A	Z	Heizstrom	A
1	816 M.-A.	695	17	855 M.-A.	760
3	„	456	19	„	356
5	„	260	21	„	210
9,5	„	30	26	„	50
12,5	„	7	29	„	26
14,5	855 M.-A.	266	34	„	23

Tabelle XVIII.

CdJ_2. Spannung + 2 Volt. $p = 0{,}35$ mm.

Z	A	Z	A
0,5	158	33	44
2,5	190	35,5	43
5,5	120	39	41
7,5	111	45	29
10	93	47,5	26
14	85	50	26
19	64	52,5	30
22	54	56,5	27
27	50	59,5	22
30	48		

Tabelle XIX.

$CdCl_2$. Spannung + 80 Volt. $p = 0{,}16$ mm.

Z	A	Z	A
1	1600	20	520
2	9600	23	416
3	5280	26	339
4	3850	29	274
5	2960	32	216
6	2560	38	140
7	2150	41	118
8	1900	45	97
9,5	1600	50	80
11	1300	60	58
14	940	70	45
17	670		

Tab. XVII). Wir fanden z. B. bei einem Heizstrom von 700 Milliamp. einen Ausschlag von 70, der in 5 Min. auf 5 fiel; bei Steigerung des Heizstroms auf 750 war der Ausschlag 100, der in 10 Min. wieder auf 5 herabging. Als der Heizstrom auf 860 gesteigert wurde, trat wieder eine große Leitfähigkeit von 100 auf, die in 10 Min. auf 3 fiel; es wurde nochmals der Heizstrom gesteigert auf 900 Milliamp.; jetzt beobachteten wir einen Ausschlag von 40, der in 4 Min. auf 5 fiel und wieder bei Vergrößerung des Heizstroms auf 950 Milliamp. (beginnende Rotglut) auf 30 wuchs, schnell ein Maximum von 50 erreichte, um darauf zu fallen.

Aus den obigen Tabellen geht hervor:

1. *Die Salze senden nur positive und keine negativen Ionen aus.* Dies Ergebnis steht im Widerspruch mit den Resultaten von Sheard. Da wir aber unsere Versuchsbedingungen auf das mannigfachste variiert haben, zweifeln wir keinen Augenblick an der Richtigkeit unseres Resultats. Sheard hat, wie erwähnt, seine Sonde durch einen durch das Innere des unten geschlossenen Rohres fließenden Luftstrom gekühlt; er schätzt dessen Temperatur auf 75° C. Aber es ist leicht möglich, daß die mit dem Salzdampf in Berührung stehende Seite des Rohrs eine viel höhere Temperatur hatte. Dann hätte die Sonde, wenn sie + geladen war, + Ionen aussenden können, und wenn der äußere Zylinder + geladen war, und die Sonde somit −, dann hätte ersterer + Ionen abgeben können. Auf diese Weise erklärt sich auch, weswegen bisher stets gleichgültig, ob der Zylinder + oder − geladen war, eine Leitfähigkeit erhalten wurde.

2. *Die Leitfähigkeit, welche durch die Halogensalze des Cd, Zn, Fe, Al usw. bei höherer Temperatur hervorgerufen wird, ist eine Oberflächenionisation und keine Volumenionisation.*

3. *Die Stromstärke dieser + Ströme nimmt anfangs mit der Zeit zu, erreicht ein Maximum, um darauf wieder zu fallen.* Die Kurven sind also analog den früher von dem einen von uns (Abh. I und II) und den in § 7ff. erhaltenen. Die Zunahme der Leitfähigkeit kann nicht dadurch erklärt werden, daß das Salz erst allmählich die betreffende Temperatur annahm, denn die Schichten waren meistens so dünn, daß sie die Temperatur sofort angenommen haben müssen. Der Abfall kann auch nicht

erklärt werden daraus, daß das Salz allmählich verdampfte. Denn je dünner die Schicht im Laufe der Zeit wird, um so schneller muß sie verdampfen, um so schneller hätte die Leitfähigkeit abnehmen müssen, während sie tatsächlich sich einer Konstanz nähert.

§ 13. Einfluß der chemischen Natur der erhitzten Unterlage.

Aus dem vorhergehenden geht hervor, daß in dem erhitzten Salz Umwandlungen vor sich gehen. Es erhebt sich die Frage, ob hierbei die chemische Natur der Unterlage, auf der das Salz aufgetragen ist, eine Rolle spielt. Um dies zu prüfen, wurde über den Platindraht eine sehr dünnwandige Glaskapillare gebracht, die durch den stromdurchflossenen Pt-draht erhitzt wurde. Der Heizstrom mußte jetzt sehr gesteigert werden. Bei Rot- und Weißglut war bei Abwesenheit von Salz keine Spur von Leitfähigkeit nachzuweisen. Als CdJ_2 auf das Glas gebracht war, wurde bei Rotglut des Drahtes eine Leitfähigkeit erhalten.

Tabelle XX.

CdJ_2 auf Glasröhrchen. + und − 20 Volt. $p = 0{,}13$ mm.

Heizstrom in M.-A.	A ohne Salz		A mit Salz	
	+	−	+	−
480	0	0	1	0
520	0	0	5	0
560	0	0	16	0
600	0	1	117	1
680	0	2		
700	0	5		

Man erhielt darauf wieder die typische Zeitkurve. Auf Nickel wurden analoge Werte wie bei Pt gefunden. Stets wurden nur + Ionen ausgesandt. Somit ergibt sich:

Die erhitzten Halogensalze des Zn, Cd usw. senden nur positive Ionen aus, gleichgültig, ob die Unterlage aus Pt, Ni oder Glas besteht.

§ 14. Nachweis, daß das erhitzte Salz sich negativ auflädt.

Bei den bisherigen Versuchen wurde stets eine äußere elektromotorische Kraft an das erhitzte Salz gelegt. Wurde dieselbe entfernt, so lud sich das Elektrometer sofort + auf, ein Beweis, daß auch ohne äußere elektromotorische Kraft positive Ionen entweichen und das Salz sich somit negativ lädt.

§ 15. Nachweis, daß die erhitzten Oxyde des Zn, Cd usw. und die Metalle Zn und Cd keine positiven Ionen aussenden.

Die folgenden Versuche wurden unternommen, um den Mechanismus der Vorgänge, welche die Leitfähigkeitsänderung bedingen, aufzuklären. Es erschien möglich, daß die Wasserhaut, welche die Elektroden stets bedeckt, hierbei eine Rolle spielt, und daß sich bei der hohen Temperatur das Wasser mit dem $ZnCl_2$ umsetzt nach der Gleichung

$$ZnCl_2 + H_2O = ZnO + HCl.$$

Die Zunahme der Leitfähigkeit würde sich dann darauf zurückführen, daß sich allmählich größere Mengen von ZnO bildeten und die Abnahme damit, daß sich das Zinkoxyd in eine indifferente, keine Ionen aussendende Modifikation verwandelt. Als aber auf den Pt-draht ZnO, $Zn(OH)_2$, Zinkmetall und die betreffenden Cd-verbindungen gebracht wurden, war bei den in Betracht kommenden niedrigen Temperaturen keine Leitfähigkeit vorhanden. Da, wie oben bewiesen, Wasserdampf und Sauerstoff die Leitfähigkeit nicht beeinflußt, so ist auch aus diesem Grunde die Hypothese nicht haltbar. Wir haben auch noch Cadmiumsubjodid auf die Leitfähigkeit untersucht; da es aber nicht gelang, das Salz rein darzustellen, so rührte die beobachtete Leitfähigkeit wohl von dem anhaftenden CdJ_2 her. Jedenfalls ergibt sich: *Die sich möglicherweise bei den hohen Temperaturen bildenden Stoffe wie ZnO, $Zn(OH)_2$ und Zinkmetall sind nicht die Ursache der Aussendung von Ionen aus den erhitzten Salzen.* Nach § 10 kann es auch kein fremder Stoff sein, der allmählich herausdestilliert, andererseits kann aber die Zu- und Abnahme der Leitfähigkeit nur auf chemische Umlagerungen zurückgeführt werden. Es erhebt sich nun die Frage, welches sind diese chemischen Prozesse?

§ 16. Nachweis, daß das Destillat jodärmer ist.

Nach den Versuchen des § 12 sendet das erhitzte Salz nur positive Ionen aus. Trotzdem die Messung der Größe e/m und der Geschwindigkeit noch aussteht, kann man mit größter Wahrscheinlichkeit sagen, daß diese positiven Ionen die betreffenden Metallionen, also Zn-, Cd-, Fe-, Al-Ionen sind. Hieraus folgt, daß das Destillat, je öfter destilliert worden ist, um so reicher an Cd und um so jodärmer sein muß. Dies ist auch tatsächlich der Fall, wie die folgenden Analysen zeigen:

Tabelle XXI.

Präparat	Jodgehalt
Ursprüngliches Salz	72,1%
1. Destillat	70,6
2. „	69,3
3. „	68,8

Je öfter das CdJ_2 destilliert wird, um so geringer ist der Jodgehalt, desto größer also der Anteil des Cadmiums. Umgekehrt muß der Gehalt an Jod in dem zurückgebliebenen nichtdestillierten Salz zunehmen. Diesbezügliche Versuche sind im Gange.

Diese Ergebnisse stimmen gut mit den Resultaten der Destillationsversuche von Sheard[1]) überein. Auch er findet, daß der Jodgehalt nach wiederholter Destillation immer kleiner wird. Er schließt hieraus, daß die negative Ionisation zum großen Teil von dem Jod herrührt. Da aber, wie oben bewiesen, nur + Ionen ausgesandt werden, so ist dieser Schluß nicht haltbar. Auch ist Joddampf nach den Versuchen des einen von uns[2]) bei diesen niederen Temperaturen ein Nichtleiter.

§ 17. Nachweis, daß CdJ_2 Jod löst.

Da aus dem Salz das Metall als Ion entweicht und sich kein freies Jod bildet, so muß letzteres in dem erhitzten, bereits geschmolzenem Salz zurückbleiben und sich dort lösen oder mit dem Salz ein komplexes Salz bilden. Daß tatsächlich die Halogene eine große Neigung haben, komplexe Salze zu bilden,

1) Sheard, Phil. Kap. 25. 388, 1913.
2) G. C. Schmidt, Abh. I, 404.

geht daraus hervor, daß sich Jod in Wasser nicht löst, leicht aber nach Hinzufügung von KJ. Daß sich hierbei eine Verbindung beider bildet, ist von Le Blanc und Noyes[1]) bewiesen worden. Ebenso löst sich Brom in einer Lösung, welche Bromionen enthält wesentlich leichter als in Wasser, was auch auf die Bildung des komplexen Ions Br_3 zurückzuführen ist.[2])

Daß CdJ_2 sich ähnlich verhält wie KJ, geht aus folgenden Versuchen hervor. In siedendes Wasser wurden ein Paar Jodkristalle gebracht; sie lösten sich kaum, und war die Farbe der Lösung hellbraun. Sobald CdJ_2 hinzugefügt wurde, löste sich das Jod leicht auf und hatte die Lösung eine tiefbraune Farbe. Auch bei gewöhnlicher Temperatur war die Löslichkeit des Jods in einer CdJ_2-haltigen Lösung beträchtlich; so viel wie von KJ konnte natürlich nicht gelöst werden, da CdJ_2 schwer löslich in kaltem Wasser ist im Gegensatz zu KJ.

In geschmolzenes CdJ_2 ließ man einige Jodkristalle fallen; sie lösten sich leicht und färbten die Flüssigkeit intensiv braun.

Beim Erhitzen färbt sich bekanntlich das CdJ_2 und zwar um so stärker, je höher die Temperatur ist. Geschmolzenes CdJ_2 ist intensiv braun gefärbt. Es liegt nahe, anzunehmen, daß diese Farbe daher rührt, daß sich das komplexe Ion J_3 bildet. Ist dies richtig, so befinden sich in dem geschmolzenen Salz außer den farblosen Molekülen CdJ_2, und den farblosen Ionen Cd und J noch die komplexen, stark gefärbten Ionen J_3 bzw. die Salze CdJ_3 oder CdJ_6.

§ 18. Theoretische Betrachtungen über den Vorgang der Ionenbildung.

Die Versuche haben ergeben, 1. daß sich beim Erhitzen der Halogensalze nur + Ionen bilden, 2. daß die Leitfähigkeit anfangs zunimmt, ein Maximum erreicht, und darauf schnell

---

1) Le Blanc und Noyes, Ztschr. physik. Ch. 6. 401, 1890.

2) M. Wildermann, Ztschr. physik. Ch. 11. 407, 1893; F. Boesicke, Ztschr. f. Elektroch. 11. 57, 1905; vgl. Rothmund: Löslichkeit und Löslichkeitsbeeinflussung, Leipzig 1907, S. 166.

fällt. Eine Reihe von Hypothesen, welche diesen zeitlichen Verlauf der Kurve erklären könnten, sind bereits besprochen worden; sie waren alle nicht haltbar. Offenbar haben wir es mit zwei Vorgängen zu tun; der unwirksame Stoff *A* geht in einen Stoff *B* über, der die Ionen liefert, und dieser zerfällt in einen dritten *C*, der wieder unwirksam ist. Der Vorgang kann nicht so sein, daß CdJ_2 in einen ionenbildenden Stoff *B* und dieser in einen unwirksamen *C* übergeht. Denn da CdJ_2 stets in großem Überschuß vorhanden ist, so müßte die Leitfähigkeit entweder dauernd konstant sein oder bis zu einem Maximum zunehmen und dann konstant bleiben. Auf keine Weise läßt sich auf Grund dieser Umsetzung der Abfall erklären. Aus den Versuchen des § 10 geht hervor, daß das Salz auch keinen fremden Stoff enthält, der allmählich herausdestilliert, wodurch das Salz verarmt. Die Zersetzung des Salzes oder Gegenwart von O und H_2O spielen ebenfalls keine Rolle (§ 9). Ebenso ist die Bildung von CdO oder metallischem Cd ohne Einfluß (§ 15); wahrscheinlich entstehen sogar diese Stoffe bei unseren Versuchen überhaupt nicht.

Wir haben uns folgende Vorstellung gebildet, welche, soviel wir ersehen, die Erscheinungen erklärt, aber noch im Einzelnen geprüft werden muß. In dem erhitzten CdJ_2 — und dasselbe gilt von den anderen in Betracht kommenden Salzen — befinden sich außer den Molekülen CdJ_2, den Ionen Cd, J noch die komplexen Salze CdJ_3 bzw. CdJ_6. Wir haben somit

$$(1) \qquad 3\,CdJ_2 \rightleftarrows 2\,|CdJ_3 + {}_{|}Cd^{\ddagger}.$$

Es werden somit positive Cd-Ionen ausgesandt. Um CdJ_3 zu bilden, holt sich das CdJ_2 die fehlende + Elektrizität aus der Elektrode, die sich somit negativ lädt (vgl. § 14). Wir nehmen nun an, daß die Bildung des komplexen Salzes durch einen Katalysator, z. B. das Platin des erhitzten Drahtes beschleunigt wird. Tatsächlich ist ja Platin ein außerordentlich wirksamer Katalysator und ebenso ist bekannt, daß Nickel und Glas vielfach katalytisch wirken. Wenn wir das Salz erwärmen, so dauert es eine gewisse Zeit, bis dasselbe überall die gleiche Temperatur annimmt und der Katalysator in seine volle Wirksamkeit tritt; die Leitfähigkeit nimmt also mit der Zeit zu, oder, falls der Katalysator gleich voll in Tätigkeit treten

kann, hat die Leitfähigkeit gleich anfangs ein Maximum. Das gebildete CdJ_2 zerfällt aber zum Teil wieder

$$(2) \qquad 2\,CdJ_2 \rightleftarrows 2\,CdJ_2 + J_2.$$

Nun sind aber die Halogene besonders starke Gifte[1]; die Reaktion (1) wird immer mehr gehemmt, je länger die Umsetzung vor sich geht. Nach dieser Vorstellung hängt also die Geschwindigkeit der Reaktion hauptsächlich von dem Katalysator, also in unserem Falle von der Unterlage, auf der sich das erhitzte Salz befindet, ab. In der Tat weisen viele Versuche mit erhitzten Salzen auf einen Einfluß der Unterlage hin. Man erkennt auch leicht, daß die Leitfähigkeit unter bestimmten Bedingungen unabhängig von der Zeit sein kann.

Versuche, diese Theorie im Einzelnen zu prüfen, sind bereits im Gange.

§ 19. Schluß.

Bei unseren Versuchen werden nur positive Ionen ausgesandt. Wir haben es hier also mit reinen Anodenstrahlen zu tun, welche große Ähnlichkeit mit den von Gehrcke und Reichenheim[2]) entdeckten und durchforschten Anodenstrahlen haben. Auch bei deren Versuchen zeigte sich deutlich der Einfluß des Katalysators, da sie nur schön ausgebildete Anodenstrahlen erhielten, wenn sie dem Salz Graphit zumischten. Bei der hohen Spannung, welche sie anwandten, treten Leuchterscheinungen auf, die bei unseren Versuchen wegen der kleinen Spannung fehlen.

Zum Schluß möchten wir noch auf das verschiedene Verhalten der Halogensalze und der Oxyde hinweisen. Nach Wehnelt[3]) senden gewisse Oxyde bei höherer Temperatur Elektronen aus; nach Gehrcke und Reichenheims und unseren Versuchen die Halogensalze dagegen nur positive Ionen. Es hängt dies verschiedene Verhalten zweifellos mit der che-

---

1) Vgl. Freundlich, Kapillarchemie, Leipzig 1922, S. 681 ff.
2) Gehrcke und Reichenheim: Ann. d. Phys. 25. 870, 1908.
3) Wehnelt, Ann. d. Phys. 14. S. 425. 1904.

mischen Natur des Sauerstoffs bzw. der Halogene zusammen. ZnO und CdO z. B. emittieren nur — Elektronen, dagegen $ZnCl_2$, $ZnBr_2$, ZnJ_2 und die entsprechenden Cd-salze nur positive Ionen.

Ergebnisse.

1. Es werden nach einer Strömungsmethode die Dampfdrucke des CdJ_2 bestimmt und hierfür rekapitulierbare Werte erhalten. Dies Salz zersetzt sich somit nicht in nennenswerter Menge im Gegensatz zu den übrigen Halogensalzen des Cd und den Halogensalzen des Zn.

2. Unter denselben Bedingungen, unter denen man für den Dampfdruck rekapitulierbare Werte erhält, sind die Werte für die Leitfähigkeit des Dampfes stark abhängig von der Zeit. Im allgemeinen nimmt die Leitfähigkeit anfangs mit der Zeit zu, erreicht ein Maximum, um dann anfangs schnell, nachher langsam zu fallen.

3. Die Abnahme der Leitfähigkeit rührt nicht daher, daß eine fremde Substanz aus dem CdJ_2 herausdestilliert.

4. Das erhitzte Salz emittiert nur positive Ionen; wir haben es hier also mit einer Oberflächenionisation zu tun und nicht mit einer Volumionisation, wie man bisher annahm.

5. Auf Nickel oder Glas erhitzt, sendet das CdJ_2 nur positive Ionen aus in der gleichen Weise wie bei Benutzung von Pt als Unterlage.

6. Die erhitzten Oxyde des Cd und Zn und ebenso die Metalle selbst senden bei den verhältnismäßig niedrigen Temperaturen keine Ionen oder Elektronen aus.

7. Das Destillat von CdJ_2 ist stets reicher an Cd als das Ausgangsmaterial und zwar um so mehr, je öfter es destilliert worden ist.

8. CdJ_2 löst Jod und bildet damit komplexe Salze.

9. Der Einfluß der Zeit auf die Leitfähigkeit wird auf die Zersetzung von CdJ_2 in Cd-Ionen und in das komplexe Salz CdJ_3 zurückgeführt, die unter dem Einfluß eines Katalysators (Pt, Ni, Glas) vor sich geht. Indem das beim Zerfall von CdJ_3 entstehende Halogen den Katalysator vergiftet, wird die Re-

aktionsgeschwindigkeit gehemmt und damit die Leitfähigkeit verkleinert.

Die in Abschnitt A mitgeteilten Messungen der Dampfdrucke sind von Frl. Dr. Bolte ausgeführt worden.

Einen Teil der benutzten Apparate verdanken wir der Helmholtz-Gesellschaft, der wir hierfür unseren Dank aussprechen.

Münster i. W., Physikalisches Institut, 24. Juli 1923.

(Eingegangen 25. Juli 1923.)

2. *Untersuchung über das kontinuierliche Röntgenspektrum bei verschiedenen Entladungsfrequenzen;* von *A. Karolus.*

Einleitung.

Die Gesetze des kontinuierlichen Röntgenspektrums bildeten in letzter Zeit mehrmals den Gegenstand zusammenfassender Arbeiten, so von E. Wagner[1]): Bericht über das kontin. Röntgenspektrum, J. E. Lilienfeld[2]): die Hochvakuum-Röntgenröhre, H. Behnken[3]): das kontin. Röntgenspektrum, und A. March[4]): Die Röntgen-Bremsstrahlung. Während bisher für die Intensität und Intensitätsverteilung und deren Abhängigkeit vom Potential und Material der Antikathode keine befriedigende Erklärung und einfache theoretische Deutung vorliegt, besteht für die Grenzwellenlänge und deren Verschiebung das bekannte Planck-Einsteinsche Gesetz: $eV = h\nu$.

Auf röntgenspektroskopischem Gebiet ist diese Beziehung zuerst von Duane und Hunt[5]) in der Form $V\lambda_0 = k$ formuliert und durch Versuche mit stehender Gleichspannung die Größe der Konstanten ermittelt worden. Die vorzügliche Übereinstimmung von h mit dem aus dem Quantenansatz berechneten Wert ist heute eine der wichtigsten Stützen der Quantentheorie. Umgekehrt liefert die Messung der Grenzwellenlänge eine der sichersten Methoden zur Bestimmung von h (E. Wagner)[6]). Der Bereich, in dem die Gültigkeit des Einsteinschen Gesetzes bestätigt ist, erstreckt sich z. Z. auf Spannung bis 245 K.V. Auch bei den höchsten von F. Dessauer und E. Back[7]) untersuchten Spannungen stimmen beobachtete und berechnete Minimumwellenlänge auf etwa 5 Proz. überein.

1) E. Wagner, Jahrb. d. Rad. u. Elektronik **16**. S. 190. 1919.
2) J. E. Lilienfeld, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **16**. S. 105. 1919.
3) H. Behnken, Zeitschr. f. Phys. **4**. S. 241. 1921.
4) A. March, Phys. Zeitschr. **22**. S. 209. 1921.
5) W. Duane und F. L. Hunt, Phys. Rev. **6**. S. 166. 1915.
6) E. Wagner, Ann. d. Phys. **57**. S. 401. 1918.
7) F. Dessauer und E. Back, Verh. d. Phys. Ges. **21**. S. 168. 1919.

Von Rutherford, Barnes und Richardson[1]), von Hull, Behnken[2]) und anderen wurde gezeigt, daß auch mit pulsierenden Gleichspannungen und Wechselspannungen das Verschiebungsgesetz gilt, wenn für V die höchste an der Röhre liegende Spannung — Scheitelspannung — eingesetzt wird. Eine Abweichung, die Rutherford und seine Mitarbeiter in der erwähnten Arbeit für Spannungen über 140 k.V. zunächst glaubten festgestellt zu haben, in dem Sinne, daß mit höherer Spannung keine weitere Zunahme der Härte und entsprechende Verschiebung der Grenze des Spektrums verbunden sei, wurde in einer neueren Veröffentlichung von Rutherford[3]) richtiggestellt. Die Abweichung war durch die angewandte Methode der Absorptionsanalyse vorgetäuscht worden.

Im völligen Widerspruch mit den Forderungen der Theorie stehen folgende von Hrn. Lilienfeld mitgeteilte Beobachtungen:

1. Abhängigkeit der mittleren Härte von der Strombelastung bzw. Belegungsdichte des Brennflecks.[4 u. 5])
2. Beeinflussung der Spektren durch die Frequenz der Betriebsspannung.[6])

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich in der Hauptsache mit der Klärung des zweiten Problems, mit der Frage also, welchen Einfluß der zeitliche Verlauf der Röhrenspannung, beim Betrieb mit Wechselströmen die Frequenz und Kurvenform derselben, auf die Intensität und vor allem auf die Grenze des kontin. Spektrums hat.

Es seien zunächst die Versuchsbedingungen und die Ergebnisse der den Ausgang dieser Arbeit bildenden Veröffentlichungen Hrn. Lilienfelds mitgeteilt. Es wurde gefunden, daß bei konstant gehaltener primärer Klemmspannung am Transformator, aber bei zwischen 50 und 500 Perioden zunehmender Wechselzahl des benutzten Wechselstroms die

1) Rutherford, Barnes u. Richardson, Phil. Mag. 30. S. 339. 1915.

2) H. Behnken, Zeitschr. f. Phys. 8. S. 48. 1920.

3) E. Rutherford, Phil. Mag. 34. S. 153. 1917.

4) J. E. Lilienfeld, Ber. d. sächs. Akad. d. Wiss. Leipzig 69. S. 226. 1917.

5) J. E. Lilienfeld, Jahrb. d. Rad. u. Elektronik §§ 35 u. 37. 16. S. 171ff. 1919.

6) J. E. Lilienfeld, Ber. d. sächs. Akad. d. Wiss. Leipzig 71. S. 113—144. 1919.

Grenzwellenlänge des Röntgenspektrums sich kontinuierlich nach dem hochfrequenten Ende verschiebt. Gleichzeitig wurde eine außerordentliche Zunahme der Gesamtintensität der Strahlung beobachtet. Bei 120 Volt Primärspannung wurde die Grenzwellenlänge des Spektrums für

50 Perioden zu $0{,}114 \cdot 10^{-8}$ cm,
250 „ „ $0{,}100 \cdot$ „ „
500 „ „ $0{,}072 \cdot$ „ „

bestimmt. Der angegebenen Primärspannung entspricht nach dem Übersetzungsverhältnis des Transformators eine Sekundäreffektivspannung von 76,5 k.V., für sinusförmigen Wechselstrom also eine Scheitelspannung von 104 k.V. Für die Grenzwellenlänge ergibt sich aus der Quantenformel für diese Maximalspannung $\lambda_0 = \frac{12{,}3}{104} = 0{,}118$ Å.-E.

Die Frage, ob die für höhere Frequenzen beträchtlichen Abweichungen (etwa 40 Proz.) durch die Erhöhung der Wechselzahl oder durch eine nebenher stattfindende Erhöhung der Spannung verursacht werden, ist von Hrn. Lilienfeld nicht entschieden. Aus verschiedenen angeführten Gründen wird jedoch eine zur Erklärung der Grenzwellenänderung hinreichende Spannungszunahme für unwahrscheinlich betrachtet. Eine Messung der Sekundärspannung hat nicht stattgefunden. Wohl aber wurden zum Vergleich der Spannung Funkenschlagweiten und Oszillogramme herangezogen. Allen Spannungsberechnungen lag jedoch die Annahme zugrunde, daß das Übersetzungsverhältnis des Transformators beim Betrieb mit Wechselströmen verschiedener Frequenz sich nicht wesentlich ändert, daß also gleichen primären Spannungen auch gleiche sekundäre Effektivwerte entsprechen.

Bei der rein physikalischen und auch außerordentlich praktischen Bedeutung eines eventuellen Einflusses der Entladungsfrequenz auf die Strahlung war eine dahingehende Untersuchung von größtem Interesse. Da eine Entscheidung über das Vorhandensein des besprochenen Effektes nur auf Grund einwandfreier Messung der effektiven und insbesondere der maximalen Röhrenspannung möglich ist, war die Aufgabe zunächst, entsprechende Meßverfahren von hinreichender Genauigkeit auszuarbeiten. Der erste Teil der vorliegenden Untersuchung behandelt die zur Bestimmung der Effektiv- und

Scheitelspannung verwendeten Methoden. Anschließend sind unter Benutzung desselben Transformators, mit dem Hr. Lilienfeld zu den mitgeteilten Ergebnissen kam, Messungen über das Übersetzungsverhältnis dieses Transformators bei verschiedenen Frequenzen und zuletzt Aufnahmen von Röntgenspektren bei konstant gehaltener Röhrenspannung bei Veränderung der Frequenz durchgeführt.

Verfahren zur Messung von Effektivspannungen bis 100 k.V.

Eine einwandfreie Spannungsmessung bietet bei Spannungen von etwa 100 k.V. erhebliche Schwierigkeiten, besonders dann, wenn die Angaben der verwendeten Methode unabhängig von der Frequenz sein sollen. Der letzten Forderung genügen eigentlich nur elektrometrische Verfahren. Hochspannungselektrometer bis 100 k.V. und darüber sind in der Literatur wiederholt beschrieben. Meist sind es Strom-Spannungswagen nach dem wohl zuerst von Cremieux angegebenen Prinzip.[1]) Zur Erhöhung der Durchschlagsfestigkeit bringt man bei fast allen bekannten Konstruktionen das Elektrometer in Öl oder Druckluft. In der Praxis hat sich jedoch keines der bekanntgewordenen Hochspannungselektrometer bewährt. Statische Voltmeter für niedere Spannungen bis etwa 50 k.V. bieten konstruktiv bedeutend geringere Schwierigkeiten. Bei der vorliegenden Untersuchung fand ein nach Angaben von Heydweiller[2]) gebautes Elektrometer mit einem Meßbereiche bis etwa 40 kV Verwendung. Dieses Elektrometer hat den Vorteil, daß die Ausschläge sehr genau (bis auf ungefähr 1 Proz.) dem Quadrat der angelegten Spannung proportional sind. Es genügt daher bei der Eichung für eine oder weniger bekannte Spannungen die Ausschläge festzustellen, um dann mit gleicher Genauigkeit auch höhere Spannungen bis zu dem angegebenen Höchstwerte messen zu können. Für die Eichung des Elektrometers stand Gleichspannung bis 10000 Volt zur Verfügung (zwei Gleichstromhochspannungsmaschinen Firma Siemens-Schuckert), außerdem ein Meßtransformator für 50 Perioden und 20 k.V. Die Gleichspannung wurde durch ein Drehspulinstrument mit bekanntem hohen Vorschaltwiderstand bestimmt. Über die Genauigkeit der Spannungsmessung mit dem

1) V. Cremieux, Compt. rend. 138. S. 563. 1904.
2) A. Heydweiller, Wied. Ann. 48. S. 110. 1893.

Heydweiller-Elektrometer sollen später beim Vergleich mit anderen Methoden nähere Angaben gemacht werden. Effektivspannungen bis zum doppelten Bereich des vorhandenen Elektrometers, also bis 80 k.V. konnten am Röntgentransformator noch dadurch gemessen werden, daß das Instrument an die halbe Spannung gelegt wurde. Die Sekundärseite des Transformators war in der Mitte angezapft. Die Symmetrie der beiden Hälften wurde nachgeprüft.

In der Technik werden Hochspannungen fast ausschließlich mit Meßtransformatoren bestimmt. Für die geplante Untersuchung kam ein solcher nicht in Frage, weil dessen Angaben nur für eine Frequenz gültig sind, hier aber gerade von der Meßanordnung verlangt werden muß, daß sie von der Frequenz unabhängig ist.

Die in der Röntgentechnik übliche Spannungsbestimmung aus Funkenschlagweiten scheidet aus dem gleichen Grunde aus. Die Frage, ob die Funkenpotentiale, die streng genommen ein Maß für die Scheitelspannung, nicht für die Effektivspannung sind, von der Frequenz abhängen, muß vorläufig als ungeklärt bezeichnet werden. Neuere Untersuchungen hierüber von J. E. Lilienfeld[1]), J. C. Jensen[2]) und F. W. Peek[3]) sind in ihren Ergebnissen völlig widersprechend. Über eigene Versuche zu dieser Frage soll an anderer Stelle berichtet werden.

Da ein Elektrometer bis 100 k.V. nicht zur Verfügung stand, blieb als einziger Weg eine Unterteilung der Hochspannung in einen geeigneten Spannungsteiler. Auch die späterhin zu besprechende Scheitelwertsbestimmung der Wechselspannung machte eine Unterteilung der Spannung erforderlich. Wechselspannungen können durch in Serie geschaltete Kondensatoren oder durch Widerstände geteilt werden. Nach einigen Vorversuchen wurde ein Widerstands-Spannungsteiler unter den gegebenen Umständen als das geeignetere gefunden. Entscheidend dafür war, daß in dem nach Angaben von Lilienfeld und Hofmann[4]) gebauten hochohmigen Widerständen

1) J. E. Lilienfeld, Ber. d. sächs. Akad. d. Wiss. Leipzig 71. S. 145ff. 1919.

2) J. C. Jensen, Phys. Rew. 8. S. 423. 1916.

3) F. W. Peek jun., Proc. Am. Inst. El. Eng. Referat Elektrotechn. Zeitschr. 37. S. 11. 1916.

4) J. E. Lilienfeld u. W. Hofmann, Elektrotechn. Zeitschr. 41. S. 870. 1920.

ein zum Bau eines Spannungsteilers brauchbares Material vorlag. (Die Widerstände sind in der Technik unter der Bezeichnung „Multohm"-Widerstände in Verwendung.) Die zum Bau des Spannungsteilers verwendeten Widerstände unterscheiden sich von den durch Lilienfeld und Hofmann beschriebenen nur durch ihre Größe und Belastbarkeit. Die Länge der Widerstandsstäbe (Kohleschicht in Glasröhre) beträgt 43,3 cm, der Durchmesser 2,8 cm, der Widerstand 4—5 Megohm. Die Stäbe sind mit 100—150 Watt belastbar, 20—30 k.V. Spannungsabfall pro Stab sind somit zulässig. Die Stäbe waren zeitlich sehr gut konstant, auch nach starker Belastung trat keine bleibende Widerstandsänderung auf. Im ganzen wurden als Spannungsteiler 10 derartige Stäbe hintereinander geschaltet.

Bei der Unterteilung einer Wechselspannung durch eine Reihe hintereinander geschalteter Widerstände steht im allgemeinen die Gesamtspannung zu der an einem Widerstand gemessenen Teilspannung nicht mehr im Verhältnis der entsprechenden Ohmschen Widerstände. Schuld daran ist die Kapazität der Widerstandselemente untereinander und gegen Erde. Die Vorgänge müssen auch bei niederen Frequenzen als nicht mehr quasistationär betrachtet werden. Die Theorie derartiger Spannungsteiler ist von Orlich und Schultze[1]) entwickelt worden. Um die Kapazität der Widerstände definieren zu können, müssen diese von Schutzzylindern umgeben werden. Dann läßt sich die Kapazität rechnerisch oder experimentell bestimmen. Ist dann außerdem die Selbstinduktion der Widerstände bekannt, so kann für eine bestimmte Frequenz Größe und Phase der Gesamtspannung aus der gemessenen Teilspannung berechnet werden.

Die Selbstinduktion der verwendeten „Multohm"-Widerstände ist vernachlässigbar. Zur Definierung der Kapazität waren die Widerstände durch Blechzylinder von 40 cm Länge und 10 cm Durchmesser umgeben. Die Schutzzylinder können nun entweder alle geerdet werden, was nur für geringe Spannungen möglich ist, oder aber auf ganz bestimmte Potentiale gebracht werden. Dazu dient ein zweiter ganz ähnlich gebauter Hilfsspannungsteiler, der dicht hinter dem ersten angeordnet wird. Auch der Hilfsspannungsteiler besteht aus hintereinander

1) E. Orlich u. H. Schultze, Arch. f. Elektrotechnik 1. S. 1. 1913.

geschalteten Multohm-Widerständen, er unterscheidet sich von dem eigentlichen Spannungsteiler nur dadurch, daß seine Stäbe ungeschützt sind, und daß bei denselben gewöhnlich 20 Widerstände von je 2 Megohm verwendet werden. Das allgemeine Schaltbild gibt Fig. 1.

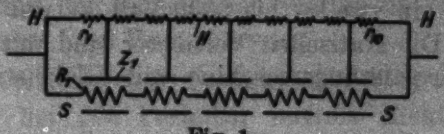


Fig. 1.

Der eigentliche Spannungsteiler ist mit S, der Hilfsspannungsteiler mit H bezeichnet. Das Ende von r_1 ist mit dem Schutzzylinder Z_1 verbunden, und hält also denselben auf einem bestimmten Potential. Ebenso sind die anderen Zylinder des Spannungsteilers mit entsprechenden Punkten des Hilfsspannungsteilers verbunden und zwar so, daß das Potential jedes Zylinders dem mittleren, an dem entsprechenden Widerstand (R) des eigentlichen Spannungsteilers auftretenden Potential gleichkommt. Der Kapazitätsstrom wird dadurch ein Minimum.

Die Stäbe des Spannungsteilers können entweder sämtlich in Reihe oder gruppenweise parallel und hintereinander geschaltet werden. Entsprechend müssen dann auch die Schutzmäntel unter sich und mit dem Hilfsspannungsteiler verbunden werden. Bei späteren Messungen sind die Widerstände durchweg in Serie. Der Gesamtwiderstand des Spannungsteilers beträgt dabei 48,60 Megohm. Die Stäbe sind einzeln in einer Wheatstonschen Brücke, außerdem bei Belastungsproben durch Strom- und Spannungsmessung bis auf etwa 3 Promille bestimmt.

Je nachdem welcher Punkt der Hochspannungsanlage geerdet ist, wird die Teilspannung an einem Stab in der Mitte oder am Ende des Spannungsteilers gemessen, und zwar so, daß die Meßanordnung möglichst nahe am Erdpotential ist. Als Abzweigwiderstand wird ein Stab von geringerem Widerstand, meist 0,1—1 Megohm, gewählt. Bei 500 Perioden liegt der kapazitive Nebenschluß, den das Teilspannungsvoltmeter zu dem Abzweigwiderstand bildet, bei der der Kapazität der gebräuchlichen Elektrometer in der Größenordnung 10^7—10^8 Ohm. Das statische Meßinstrument muß also, wenn der kapazitive

Widerstand vernachlässigt werden soll, möglichst geringe Kapazität haben, oder, da die Kapazität gegeben ist, an einen Widerstand gelegt werden, der klein gegen den durch das Instrument verursachten Nebenschluß ist. Bei den verwendeten elektrostatischen Voltmetern — ein Braunsches Elektrometer bis 1500 Volt, ein zweites bis 3000 Volt — war die Kapazität rund 10 cm. Die statischen Voltmeter sind mit der schon erwähnten Hochspannungsmaschine mit Gleichstromvoltmetern geeicht.

Mit dem angegebenen Spannungsteiler wurden nun zunächst bei 50 Perioden die sekundären Effektivspannungen des Röntgentransformators bei Veränderung der Primärspannung bestimmt.

Bis 80 k.V. konnten die Spannungen gleichzeitig mit dem Heydweiller-Elektrometer gemessen werden. Dieses lag dabei an der halben Transformatorspannung.

Tabelle 1.

Primärspannung	Sekundärteilspannung		Sekundärgesamtspannung		
	Elektromet. Heydweiller, Ausschläge	Spannungsteiler k.V. eff.	Elektrometer k.V. eff.	Spannungsteiler k.V. eff.	berechnet k.V. eff.
0	6,4	0,265	12,8	12,7	12,74
30	14,0	0,40	19,2	19,2	19,1
40	25,1	0,53	25,8	25,5	25,5
50	38	0,66	31,6	31,6	31,8
60	56	0,80	38,5	38,4	38,2
70	75	0,93	44,5	44,6	44,6
80	98	1,05	50,8	50,8	50,9
90	125	1,19	57,4	57,0	57,3
100	152	1,33	63,5	64,0	63,7
108	175	1,45	—	69,4	68,8

Spalte 1: Primärspannung des Transformators, gemessen mit Hitzdrahtvoltmeter Hartmann & Braun.

Spalte 2: Die Ausschläge des Elektrometers (Heydweiller) steigen quadratisch mit der Spannung an.

Spalte 3: Teilspannung, gemessen am Abzweigwiderstand $0{,}916 \cdot 10^6$ Ohm, Gesamtwiderstand des Spannungsteilers $43{,}6 \cdot 10^6$ Ohm. Teilverhältnis $\frac{43{,}6}{0{,}916} = 48$, Meßinstrument Elektrometer bis 1500 Volt.

Spalte 4: Gesamtspannung aus den Ausschlägen des Elektrometers nach früher vorgenommener Eichung.

Spalte 5: Gesamtspannung, erhalten durch Multiplikation der Teilspannung mit dem angegebenen Teilverhältnis ($\times$ 48).

Spalte 6: Sekundärspannung, berechnet aus primärer Spannung und dem auf dem Transformator angegebenen Übersetzungsverhältnis (140000 : 220). Das Übersetzungsverhältnis wurde mit dem Meßtransformator bei 20000 Volt nachgeprüft.

Die beiden Spannungsmessungen Spalte 4 und 5 stimmen unter sich und mit den berechneten Werten Spalte 6 innerhalb der Meßfehler von 1—2 Proz. überein.

In gleicher Weise wurde die Sekundäreffektivspannung des Transformators bei 500 Perioden mittels Elektrometer und Spannungsteiler bestimmt. Über das Ergebnis soll später im Zusammenhang mit Messungen der Scheitelspannung berichtet werden.

Verfahren zur Messung von Scheitelspannungen.

Die Kenntnis des Scheitelwertes einer Wechselspannung ist bei einer Reihe physikalischer Erscheinungen erforderlich. Außer bei der hier untersuchten Frage nach der Grenzwellenlänge ist auch bei Funkenschlagkeiten, Prüfung der Durchschlagsfestigkeit von Isolationsstoffen usw. nicht die Effektiv-, sondern die Scheitelspannung für den Vorgang bestimmend. Meist begnügt man sich aber mit der Messung der Effektivspannung und rechnet diese durch Multiplikation mit dem Scheitelfaktor (für sinusförmige Wechselströme $\sqrt{2}$) in Maximalspannung um. Bei nicht sinusförmigen Spannungskurven, wie sie beispielsweise bei der einseitigen Belastung eines Transformators mit einer Röntgenröhre immer vorliegen, kann der Scheitelfaktor zwischen 1,3—1,8 schwanken. Eine exakte Bestimmung einer Scheitelspannung setzt also bisher immer die Kenntnis der Kurvenform voraus. Dabei kann aus einer oszillographischen Aufnahme der Primärspannung nicht ohne weiteres auf den Spannungsverlauf auf der Sekundärseite des Transformators geschlossen werden. Es können, wie die folgenden Messungen gezeigt haben, die Scheitelfaktoren auf der Nieder- und Hochspannungsseite in bestimmten Fällen um 30 Proz. und mehr differieren.

Es wurden in den letzten Jahren eine Reihe Verfahren zur direkten Scheitelspannungsmessung entwickelt. Die meisten sind vereinfachte Oszillographen, vereinfacht insofern, als nur die maximale Breite eines Lichtbandes, die größte Ablenkung

eines Kathodenstrahles usw. als Maß für die Scheitelspannung dient und die sonst zur Analyse der Schwingungen notwendige Zeitbewegung wegfällt. Anordnungen dieser Art sind beschrieben durch Estorff[1]): vereinfachter Bifilar-Oszillograph, Dawes[2]): Saitenelektrometer, Samson[3]) und J. E. Lilienfeld[4]): Braunsche Röhre.

Ein prinzipiell neues Verfahren zur Scheitelspannungsmessung mittels einer Glühkathodenröhre wurde von Sharp und Doyle angegeben.[5]) Da diese Methode bei der vorliegenden Untersuchung zur Messung der Scheitelspannung vergleichsweise verwendet wurde, soll auf das Prinzip derselben kurz eingegangen werden.

Legt man einen Kondensator in Reihe mit einem Ventil an eine Wechselspannung, so lädt er sich, da eine Entladung nicht stattfinden kann, auf den Scheitelwert der Spannung auf. Die Schaltung zeigt Fig. 2.

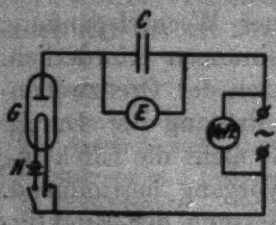


Fig. 2.

Das Ventil ist mit G, der Kondensator mit C bezeichnet. Als Ventil verwendet man eine Glühkathodenröhre, bei Benutzung einer Sende- oder Verstärkerröhre wird das Gitter zweckmäßig mit der Glühkathode verbunden. Die Heizung der Kathode erfolgt durch die mit H angedeutete Batterie (bei späteren Schaltbildern nicht eingezeichnet). Die Spannung, auf die der Kondensator C aufgeladen wird, mißt man durch ein statisches Voltmeter E. Falls das verwendete statische Instrument genügend eigene Kapazität hat, kann man auf die Zuschaltung eines weiteren Kondensators verzichten. Im übrigen kann dasselbe statische Voltmeter zur Messung der Effektiv- und Scheitelspannung benutzt werden, in dem einen Falle liegt das Instrument bei kurz geschlossenem Ventil unmittelbar an der zu messenden Spannung, nach Aufhebung des Kurzschlusses zeigt das Instrument die Scheitelspannung an. Das Verhältnis

1) Estorff, Elektrotechn. Zeitschr. 37. S. 60 u. 76. 1916.
2) Dawes, Proc. Am. Inst. El. Eng. 1916.
3) Samson, Ann. d. Phys. 55. S. 608. 1918.
4) J. E. Lilienfeld, a. a. O.
5) Sharp u. Doyle, Proc. Am. Inst. El. Eng. 1916. Ref. Elektrotechn. Zeitschr. 38. S. 588. 1917.

der beiden abgelesenen Spannungen gibt ohne weiteres den Scheitelfaktor.

In der vorliegenden Arbeit wurden mit der beschriebenen Auflademethode nach Sharp und Doyle primär und sekundärseitig am Transformator die Scheitelfaktoren bestimmt. Primär wurde die Effektivspannung durch ein Hitzdrahtvoltmeter (Hartmann & Braun), die Maximalspannung durch ein Wulffsches Saitenelektrometer gemessen. Als Ventil diente eine Telefunken-Senderöhre (Type R. S. 5). Zur Scheitelspannungsmessung auf der Sekundärseite wurde das schon erwähnte Elektrometer nach Heydweiller in Serie mit einem für Hochspannung brauchbaren Glühventil gewöhnlich an die halbe Spannung des Transformators gelegt, oder es wurde an einer am Spannungsteiler abgenommenen Teilspannung gleichzeitig Effektiv- und Scheitelspannung gemessen. Als Ventile wurden dabei Senderöhren Type R. S. 18 (Telefunken), für Spannung über 10 k.V. Glühventile der Firma Koch & Sterzel verwendet.

Zu bemerken ist, daß natürlich Ventile einschließlich Heizbatterie oder Heiztransformator und statisches Voltmeter sehr gut isoliert sein müssen. Beim Abschalten der Spannung muß das Elektrometer weiter eine Zeitlang dieselbe Spannung anzeigen. Ein rascher Abfall zeigt, daß die Isolation nicht genügt. Bei sehr guter Isolation der Meßanordnung besteht dagegen wieder die Gefahr, daß das Elektrometer sich auf zu hohe Werte einstellt, beispielsweise auf momentane Überspannung, wie sie bei Einschaltvorgängen usw. auftreten. Auch beim Einregulieren niederer Spannungen am Transformator zeigt das Scheitelspannungsvoltmeter, falls die Isolation gut ist, leicht einen zu hohen Wert. Man tut deshalb gut, das Elektrometer vor jeder Ablesung einmal zu entladen.

Im übrigen sind die Angaben der beschriebenen Scheitelspannungsmeßanordnung unabhängig von der Frequenz und Kurvenform des Wechselstroms, ebenso von der Art und der Heizung des Ventils. Die Meßgenauigkeit ist bedingt durch die Art des verwendeten Elektrometers, bleibt also gewöhnlich bei Hochspannung relativ gering (einige Proz.). Der Meßbereich ist ebenfalls durch die Art des verfügbaren Elektrometers gegeben, in Verbindung mit dem beschriebenen Spannungsteiler lassen sich jedoch Scheitelspannungen bis 100 k.V. und mehr bestimmen.

Im Bestreben, die Meßgenauigkeit weiterhin zu steigern, wurde auf Anregung von Hrn. Lilienfeld folgendes Verfahren durchgebildet. Die prinzipielle Schaltung zeigt Fig. 3.

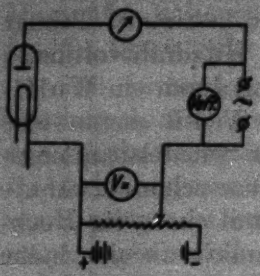


Fig. 3.

Die Wechselspannung wird dabei durch eine variable Gleichspannung über ein Glühventil kompensiert. Die Methode soll weiterhin als Kompensationsmethode bezeichnet werden. Die Gleichspannung liegt mit ihrem positiven Pole an der Glühkathode, ist also immer derjenigen Halbwelle des Wechselstromes entgegengerichtet, die vom Ventil durchgelassen wird. Ohne Gegenspannung fließt im Ventilkreis ein Strom (pulsierender Gleichstrom), dessen Größe für eine bestimmte Röhrenheizung durch die Charakteristik der Röhre und die Größe der Wechselspannung bestimmt wird (Röhrenvoltmeter). Doch ist nur für sinusförmige Spannungskurven der Röhrenstrom ohne weiteres ein Maß für die anliegende Wechselspannung. Bei unbekannter Kurvenform läßt sich im Röhrenstrom keine eindeutige Spannung zuordnen. Bei Kompensation jedoch ist unabhängig vom Spannungsverlauf, Frequenz, Ventilart und Heizung des Ventils der Meßkreis stromlos, sobald die Gleichspannung gleich der maximalen Scheitelspannung ist.

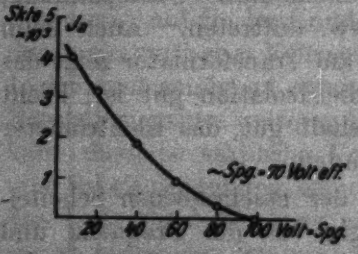


Fig. 4.

Steigert man die Gleichspannung allmählich, von Null anfangend bei konstanter Wechselspannung, so nimmt der Röhrenstrom Ja in der in Fig. 4 dargestellten typischen Form ab. Die Effektiv-Wechselspannung betrug bei dem durch die Kurve wiedergegebenen Fall 70 Volt. Als Nullinstrument kam ein Drehspulgalvanometer S. & H. ($1^0 = 1{,}57 \times 10^{-7}$ Amp.) zur Verwendung. Ohne Gegenspannung betrug der Röhrenstrom in diesem speziellen Falle 1,59 M.-Amp Das Instrument mußte deshalb bis zur fast völligen Kompensation geshuntet werden. Bei 98,0 Volt betrug der Ausschlag noch 4^0, bei 98,6 Volt wird der Strom gleich Null. Die Genauigkeit, mit der der Scheitel-

wert in diesem Fall ermittelt werden konnte, beträgt 2—3 Promille und hängt nur von der Empfindlichkeit des Nullinstruments und der Güte des Gleichspannungsvoltmeters ab.

Auf die Komplikationen, die durch die Elementwirkung des Glühventils beim Messen kleinerer Spannungen (unter 50 Volt) entstehen, soll hier nicht weiter eingegangen werden. Mit der Kompensationsmethode wurden bei der vorliegenden Untersuchung die Scheitelwerte der am Spannungsteiler abgenommenen Teilspannung bestimmt. Zur Kompensation wurde dabei die Gleichspannung der schon erwähnten Hochspannung-Gleichstrommaschinen verwendet. Es konnten damit Scheitelspannungen bis 10 k.V. direkt kompensiert werden Die Ventile waren dieselben, wie die bei der oben besprochenen Auflademethode von Sharp und Doyle.

Die Hochspannung der Maschine konnte, wie bereits erwähnt, durch ein Drehspulgalvanometer mit entsprechend hohen Vorschaltwiderstand auf 3—5 Promille genau bestimmt werden. Die Spannung wurde durch Verändern der Erregung eingestellt. Bei der Kompensation einer unbekannten Wechselspannung geht man am besten so vor, daß man die Gleichspannung zunächst zu hoch nimmt und erst allmählich verringert. Dann genügt ein minimales Unterschreiten der Scheitelspannung, um im Nullinstrument einen Ausschlag hervorzurufen.

Vergleichende Messungen mit der Kompensationsmethode und der Auflademethode ergaben bei 50 und 500 Perioden auf etwa 1 Proz. Übereinstimmung. Die Kompensationsmethode war jedoch an Genauigkeit stets überlegen, schon aus dem Grunde, weil dabei die Spannungsmessung durch ein Drehspulinstrument ausgeführt wird.

Untersuchungen am Röntgentransformator.

Im folgenden soll über einige Messungen berichtet werden, die unter Benutzung der bisher beschriebenen Effektiv- und Scheitelspannungs-Meßmethoden an demselben Röntgentransformator ausgeführt wurden, mit dem Hr. Lilienfeld zu der in der Einleitung ausgeführten Beobachtung gekommen war. Das Schaltbild zeigt Fig. 5.

G ist der Wechselstromgenerator von 50 bzw. 500 Perioden, dessen Spannung durch Verändern der Erregung eingestellt wird. Die verwendeten Generatoren hatten folgende Werte:

Frequenz	Höchstspannung	Strom	Leistung
50	110 Volt	32 Amp.	3,5 k.V. A.
500	100 „	40 „	4,0 k.V. A.

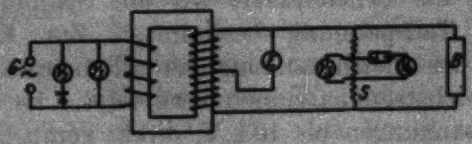


Fig. 5.

Der Transformator, ein ölgekühlter Hochspannungstransformator der Firma Koch & Sterzel, Dresden, Übersetzungsverh. 220 : 140000, liegt ohne Vorschaltwiderstand direkt an der Maschine. V_1 mißt die Effektivspannung primär, V_2 in der Anordnung nach Sharp oder durch Kompensation die Scheitelspannung primär, V_3 und V_4 die entsprechenden Teilspannungen am Spannungsteiler S. Das Hochspannungselektrometer E (Heydweiller) liegt zwischen geerdeter Mitte des Transformators und einem Hochspannungspol. B ist eine Belastung, gewöhnlich induktionsfreie hochohmige „Multohm"-Widerstände.

Die sekundären Effektivspannungen des Transformators bei 50 Perioden für 20—110 Volt primär sind bereits in Tab. 1 mitgeteilt. Der Transformator war dabei durch einen Widerstand von 30 Megohm belastet. Erhöhung der Belastung bis auf etwa 2 k.V. A. änderte bei 50 Perioden das Übersetzungsverhältnis nur unwesentlich.

Tab. 2 ergibt die sekundäre Effektivspannung desselben Transformators bei 500 Perioden.

Die Angaben des Elektrometers (Spalte 4) und des Spannungsteilers (Spalte 5) stimmen in der durch die Ablesegenauigkeit bedingten Fehlergrenze überein.

Für gleiche Primärspannungen sind die Effektivspannungen des Transformators bei derselben Belastung um durchschnittlich 43 Proz. höher, als bei 50 Perioden. Die folgende

Tabelle 2.

Primärspannung Volt	Sekundärteilspannung: Elektrometer Ausschläge	Sekundärteilspannung: Spannungsteiler k.V. eff.	Sekundärgesamtspannung aus: Elektrometer k.V. eff.	Sekundärgesamtspannung aus: Spannungsteiler k.V. eff.
20	12,1	0,38	17,8	18,0
30	28,0	0,57	27,3	27,3
40	49,5	0,76	36,2	36,3
50	76,0	0,94	44,8	45,0
60	111,2	1,15	54,2	54,8
70	—	1,33	—	63,8
80	—	1,52	—	72,9
90	—	1,70	—	81,8
100	—	1,90	—	91,0
110	—	2,19	—	100,4

Tab, 8 stellt die Sekundär-Effektivspannung bei 50 und 500 Perioden zusammen. Als Spannung sind dabei die Mittelwerte der am Elektrometer und am Spannungsteiler erhaltenen Beträge angesetzt.

Tabelle 8.

Spannung primär	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	V.
sekundär 50 Per.	12,8	19,2	25,6	31,6	38,4	44,6	50,8	57,2	63,7		k.V.
500 „	17,9	27,3	36,3	44,9	54,6	63,8	72,9	81,8	91,0	100,4	k.V.

Dasselbe zeigt in graphischer Darstellung Fig. 6.

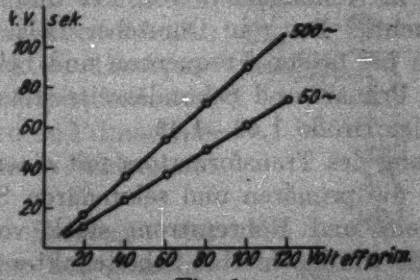


Fig. 6.

Das Übersetzungsverhältnis des Transformators ist bei gleicher Belastung bei 500 Perioden wesentlich größer als bei 50 Perioden. Durch starke Belastung nimmt bei 500 Perioden das Übersetzungsverhältnis des Transformators rasch ab. Bei

konstant gehaltener Primärspannung von 30 Volt ging bei einer Messung die Sekundärspannung von 27,3 k.V. bei vergrößernder Belastung bis auf 20,0 k.V. zurück. 30 Volt primär entspricht bei 50 Perioden 19,0 k.V. sekundär. Durch starke Belastung läßt sich somit auch bei 500 Perioden das Übersetzungsverhältnis auf annähernd denselben Wert wie für 50 Perioden herabdrücken. Bei höheren Spannungen, wie sie bei der Aufnahme von Röntgenspektren zur Anwendung kamen, war jedoch bei allen Belastungen das Übersetzungsverhältnis bei 500 Perioden um 30—40 Proz. größer als bei 50 Perioden.

Bei Betrieb des Transformators mit 500 Perioden änderte sich die Sekundärspannung je nach der Milliamperezahl, mit welcher die Röntgenröhre belastet wurde. Es genügt also bei 500 Perioden durchaus nicht die Spannung primär konstant zu halten, um bei verschiedenem Röhrenstrom dieselbe Röhrenspannung und damit die gleiche Röntgenstrahlenhärte festzulegen. Die von Hrn. Lilienfeld beobachtete Abhängigkeit der Härte von der Milliamperezahl dürfte danach einfach auf die Änderung der Spannung zurückzuführen sein.

Ob die bei höherer Frequenz auftretende höhere Sekundärspannung auf eine Resonanz des Transformators oder auf die bei höherer Frequenz geringere Eisensättigung und veränderte Streuung zurückzuführen ist, soll hier nicht weiter diskutiert werden.

Es wurden schließlich auch die Scheitelfaktoren bei 50 und 500 Perioden auf der Nieder- und Hochspannungsseite des Transformators in Abhängigkeit von Art und Größe der Belastung untersucht. Bei rein Ohmscher Belastung waren die Scheitelfaktoren bei beiden Frequenzen und bei beliebiger Belastung auf der Primär- und Sekundärseite stets nahe einander gleich und in der Größe 1,40—1,43.

Bei Belastung des Transformators mit einer Röntgenröhre weichen jedoch die primären und sekundären Scheitelfaktoren je nach Frequenz und Röhrenstrom stark voneinander und von 1,41 ab. Es wurden hierbei Scheitelfaktoren von 1,3—1,9 wiederholt beobachtet. Die Abweichungen zwischen primär und sekundär gemessenen Scheitelfaktoren betrugen bis 39 Proz.

Die Kenntnis der Sekundär-Effektivspannung allein genügt also zur Bestimmung der maximalen Röhrenspannung durchaus nicht; auch läßt sich aus dem primär-bestimmten

Scheitelfaktor nichts über die sekundäre Scheitelspannung aussagen. Es muß vielmehr bei jeder Veränderung der Betriebsbedingungen unmittelbar auf der Hochspannungsseite Effektiv- und Scheitelwert der Wechselspannung gemessen werden. Ohne eine direkte Messung können beim Betrieb eines Transformators mit Wechselströmen verschiedener Frequenz keinerlei Aussagen über Funkenschlagweiten, Röntgenspektren usw. gemacht werden.

Röntgenspektren bei 50 und 500 Perioden.

Trotzdem die im letzten Abschnitt mitgeteilten Spannungsmessungen am Transformator eine genügende Erklärung für die von Hrn. Lilienfeld beobachtete Verschiebung der Grenzwellenlänge gaben, wurden zur Kontrolle bei nunmehr direkt am Hochspannungselektrometer und am Spannungsteiler festgehaltener Effektiv- und Scheitelspannung Röntgenspektren unter Veränderung der Frequenz und anschließend bei bestimmter Frequenz bei verschiedenem Röhrenstrom aufgenommen.

Die Schaltung der Röntgenröhre stimmt im wesentlichen mit der von Hrn. Lilienfeld benutzten überein (a. a. O., S. 130—134). Die Primärspule des Transformators liegt direkt ohne Vorschaltwiderstand an dem Wechselstrom-Generator. Die Sekundärseite des Transformators liegt unmittelbar an Anode und Lochkathode der Lilienfeldröhre. Auf eine Gleichrichtung des Wechselstroms durch vorgeschaltete Ventilröhre oder durch rotierenden Schalter wird also verzichtet. Die Spannung des Zündtransformators wird durch einen im Primärkreis desselben liegenden Widerstand eingestellt.

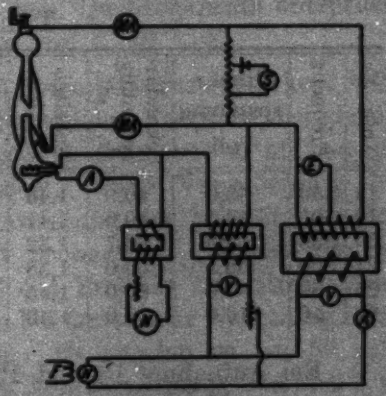


Fig. 7.

Der zur Heizung der Glühkathode der Röntgenröhre dienende Heiztransformator wird von einem getrennten Wechselstrom-Umformer von 50 Perioden betrieben. Die Heizung erfolgte bei allen späteren Aufnahmen unverändert mit 13,5 Ampere. Beim Betrieb der Röhre in der durch Fig. 7 wieder-

gegebenen Schaltung lassen sich Röhrenstrom und Röhrenspannung in bekannter Weise unabhängig voneinander einstellen.

Die Röntgenspektren sind mit dem Seemannschen Spektrographen in Schneidenanordnung[1]) aufgenommen. Der Schwenkbereich des Spektrographen war so eingestellt, daß nur der kurzwellige Teil des Spektrums von etwa 0,5 Å.-E. abwärts zur Abbildung kam. Als reflektierender Kristall wurde Steinsalz verwendet. (Gitterkonstante $d = 2{,}814 \cdot 10^{-8}$ cm). Die Belichtungszeiten der Spektren liegen je nach dem Röhrenstrom und der Röhrenspannung zwischen 20—120 Min. Bei Verwendung eines Verstärkungsschirmes (Calicium-Wolframat) verringerte sich die Aufnahmedauer auf etwa ein Drittel der angegebenen Zeit. Die Auswertung der Spektren erfolgte auf Grund von Aufnahmen der Wolfram- und Platin-K-Strahlung. Außerdem kann bei allen Spektren die Silberabsorptionsgrenze als Bezugslinie gewählt werden.

Der gestellten Aufgabe entsprechend wurden zunächst Spektren bei konstanter Röhrenspannung mit Wechselstrom von 50 und 500 Perioden aufgenommen. Die Zahl der Vergleichsaufnahmen beträgt über 30. Die folgende Tab. 4 stellt Röhrenspannung, Strom, Frequenz, ferner die berechnete und aus der Aufnahme erhaltene Grenzwellenlänge für einige Aufnahmen zusammen.

Tabelle 4.

Aufn.-Nr.	Frequenz	Primärspannung Volt	Sekundärspannung k.V. eff.	Scheitelfaktor	Scheitelspannung k.V.	Röhrenstrom M.-Amp.	λ_0 gemessen Å.-E	λ_0 berechnet Å.-E.
18	50	63,0	40,0	1,43	57,2	6,0	0,217	0,215
19	500	32,5	40,0	1,41	56,4	6,0	0,217	0,218
20	500	63,0	66,7	1,32	88,0	6,0	0,143	0,140
24	500	56,5	60,0	1,38	82,9	5,5	0,145	0,146
25	50	94,0	60,0	1,45	87,0	5,5	0,142	0,141
27	50	110,0	70,0	1,43	100,5	3,0	0,123	0,122

Bei Aufnahme 18 und 19 wurde die Röhrenspannung gemessen am Elektrometer und am Spannungsteiler auf 40 K.V. konstant gehalten. Die Frequenz war bei Aufnahme 18 50 Perioden, bei Aufnahme 19 500 Perioden. Die Scheitelfaktoren

1) A. Seemann, Ann. d. Phys. 49. S. 470. 1916.

und damit auch die Scheitelspannungen waren ebenfalls nahe einander gleich. Die erzielten Spektren sind völlig identisch, sowohl in bezug auf Grenzwellenlänge, als auch Intensität. λ_0 ist bezogen auf die Silberabsorptionsgrenze ($0{,}485 \cdot 10^{-8}$ cm) 0,217 Å.-E. Für die Scheitelspannung von 57,2 kV. erhält man aus dem Quantenansatz $\lambda_0 = \frac{12{,}3}{57{,}2} = 0{,}215 \cdot 10^{-8}$ Å.-E. Die berechnete und gemessene Grenzwellenlänge stimmen also innerhalb der Beobachtungsfehler überein. Die Frequenz ist somit ohne jeden Einfluß auf die Grenze des kontin. Spektrums. Die von Hrn. Lilienfeld beobachtete Verschiebung ist ausschließlich durch die Spannungserhöhung bei 500 Perioden vorgetäuscht. Bei den Aufnahmen 18 und 19 waren die zu 40 k.V. eff. erforderlichen Primärspannungen bei 50 Perioden 63,0 Volt, bei 500 Perioden nur 32,5 Volt.

Wurde bei 500 Perioden die Primärspannung auf 63 Volt erhöht, so trat die Verschiebung der Grenzwelle sofort ein. (Aufnahme 20.) Wie auf dem Spektrum zu sehen ist, liegt jetzt die Grenzwellenlänge um mehrere Millimeter näher am Durchstoßungspunkt. λ_0 beträgt 0,143 Å.-E., Aufnahme 18 und 20 stellen somit den von Hrn. Lilienfeld untersuchten Fall gleicher Primärspannung bei verschiedener Frequenz dar. Die Messung der Sekundärspannung zeigt aber, daß bei Aufnahme 20 die Effektivspannung auf 66,7 k.V., die Maximalspannung auf 88,0 k.V. gestiegen ist. Nach dem Quantenansatz entspricht 88,0 k.V. einer Grenzwellenlänge von 0,140 Å.-E.

Bei den Spektren 18, 19, 20 betrug die Stromstärke 6 Mill. Amp. Wurde nun, gleichgültig bei welcher Frequenz, bei gleichbleibender Spannung die Stromstärke geändert, so blieben die Spektrogramme völlig unverändert. Eine Verschiebung der Grenzwellenlänge, ebenso eine Änderung der Schwärzung (Intensitätsverteilung) wurde nicht beobachtet. Waren die Belichtungszeiten so gewählt, daß das Produkt aus Stromstärke und Zeit dasselbe war, so blieben bei konstanter Spannung auch die Gesamtschwärzungen gleich. Es wurden so bei 50 und 500 Perioden bei einer maximalen Röhrenspannung von 57,2 k.V. Spektren bei 1, 2, 4 und 6 Mill. Amp. Strom aufgenommen.

Die ersten Vergleichsaufnahmen sind absichtlich mit relativ niedriger Spannung (40 k.V. eff.) gemacht. Dabei sind die Grenzwellenlängen und damit die Reflexionswinkel so groß, daß auch

geringe Verschiebungen der Grenze meßbar werden. Für Wellenlängen, die kleiner sind als $0{,}1 \cdot 10^{-8}$ cm nimmt die Meßgenauigkeit rasch ab. Doch dürfte die Unsicherheit der Wellenlängenmessung bei den folgenden Aufnahmen mit höheren Spannungen 2 Proz. nicht übersteigen. Der Fehler der Spannungsbestimmung war jedoch, wie aus dem Vergleich zwischen Elektrometer und Spannungsteiler hervorging, stets unter diesem Betrag.

Aufnahme 24 (500 Perioden) und Aufnahme 25 (50 Perioden) sind bei 60,0 k.V. Effektivspannung gemacht. Die Scheitelfaktoren waren dabei 1,38 und 1,45, die Scheitelspannungen somit 82,8 k.V. und 87,0 k.V. Dem Unterschied der Scheitelspannung entsprechend liegt bei Aufnahme 24 λ_0 bei 0,145 Å.-E., bei Aufnahme 25 $\lambda_0 = 0{,}142$ Å.-E. In beiden Fällen stimmt die aus der zugehörigen Scheitelspannung berechnete Grenze innerhalb der Versuchsfehler mit dem theoretisch geforderten Wert überein.

Die Stromstärke war bei Aufnahme 27 3 M. Amp. Wurde nun wieder bei festgehaltener Röhrenspannung der Röhrenstrom verändert, so blieben die Spektrogramme vollkommen gleich. Die Grenzwellenlänge war stets eindeutig durch die Scheitelspannung bestimmt. Ein Einfluß der Stromstärke auf die Grenze des kont. Spektrums konnte nie festgestellt werden.

Da Hr. Lilienfeld bei Erhöhung der Frequenz außer der Verschiebung der Grenzwellenlänge auch eine Zunahme der Gesamtstrahlung beobachtet hatte, wurde schließlich unabhängig von den Röntgenspektren ein Vergleich der Strahlungsintensität bei 50 und 500 Perioden vorgenommen. Bei festgehaltener Scheitelspannung wurde die Strahlungsintensität nach der bekannten Ionisationsmethode bei gleichem Röhrenstrom bei Veränderung der Frequenz gemessen. Die Intensitäten waren bei 50 und 500 Perioden bei sonst gleichen Betriebsbedingungen völlig gleich.

Zusammenfassung.

1. Beim Betrieb einer Röntgenröhre mit Wechselstrom von 50 und 500 Perioden wurden von Hrn. Lilienfeld beträchtliche Abweichungen der Grenzwellenlänge von dem durch die bekannte Beziehung $\lambda_0 = 12{,}3 / V_{max}$ geforderten Wert beobachtet. Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich mit

der Frage, ob die Verschiebung der Grenzwellenlänge durch die Erhöhung der Entladungs-Frequenz oder durch eine dabei stattfindende Spannungsänderung verursacht wird. Eine Entscheidung der Frage ist nur auf Grund einer Bestimmung des Effektiv- und Scheitelwerts der Röhrenspannung möglich.

2. Zur Messung der Hochspannung wird ein Widerstand-Spannungsteiler beschrieben. Die Gesamtspannung liegt an 10 in Serie geschalteten Multohm-Widerständen. Aus der an einem Widerstand gemessenen Teilspannung und dem bekannten Verhältnis der Widerstände können mit einer Genauigkeit von 1—2 Proz. Spannungen bis 100 k.V. bestimmt werden. Die beim Unterteilen von Wechselspannungen durch die Kapazität der Widerstände und des Elektrometers verursachten Fehler und die Maßnahmen zu deren Vermeidung sind erörtert. Der Spannungsteiler wurde bis 80 k.V. bei 50 und 500 Perioden mit einem Hochspannungselektrometer nach Heydweiller verglichen.

3. Die Messung der Scheitelspannung erfolgte nach zwei Verfahren: einmal durch eine von Sharp und Doyle angegebene Aufladem ethode, dann nach einer durch Verwendung eines Glühventils vereinfachten Wechselstrom-Kompensationsmethode. Die Wechselspannung wird hierbei durch eine Gleichspannung über ein Glühventil kompensiert. Der Kompensationskreis wird stromlos, sobald die Gleichspannung gleich der maximalen Wechselspannung ist. Es können mit den hier vorhandenen Mitteln Scheitelspannungen bis 10 k.V. direkt und bei Verwendung des Spannungsteilers bis 100 k.V. und darüber bestimmt werden. Die Kompensationsmethode ist allen anderen Verfahren zur Messung von Scheitelspannungen an Genauigkeit überlegen, da sie die Messung einer Wechselspannung auf die Bestimmung einer Gleichspannung zurückführt.

4. Mit dem entwickelten Verfahren wurden Spannungsmessungen an demselben Röntgentransformator ausgeführt, an welchem Hr. Lilienfeld die erwähnte Verschiebung der Grenzwellenlänge bei Änderung der Frequenz beobachtet hatte. Die Messungen zeigen, daß sich das Übersetzungsverhältnis des Transformators beim Betrieb mit Wechselströmen verschiedener Frequenz außerordentlich ändert. Eine Erhöhung der Wechselzahl von 50 auf 500 Perioden ergab für gleiche Primärspannungen bei gleicher Belastung eine sekundäre Spannungszunahme um

durchschnittlich 40 Proz. Durch starke Belastung nimmt bei höherer Frequenz das Übersetzungsverhältnis des Transformators ab und nähert sich dem für 50 Perioden geltenden Wert.

Die Scheitelfaktoren sind nur unter seltenen Bedingungen auf der Nieder- und Hochspannungsseite des Röntgentransformators einander gleich. Je nach Größe und Art der Belastung wurden Unterschiede bis zu 30 Proz. beobachtet.

5. Die Röntgenspektrogramme bleiben bei konstant gehaltener maximaler Röhrenspannung völlig unverändert, wenn die Frequenz des Betriebsstromes von 50 auf 500 Perioden erhöht wird. Insbesondere kann keinerlei Einfluß der Frequenz auf die Grenze des kontinuierlichen Spektrums festgestellt werden. Ebensowenig ergibt sich eine Beeinflussung der Spektren durch die Entladungs-Stromstärke (Belegungsdichte des Brennflecks). Bei Veränderung der Stromstärke von 1—6 Mill.-Amp., der Spannung im Bereich von 40—100 kV und der Frequenz von 50—500 Perioden wurde die gemessene Grenzwellenlänge stets innerhalb der Fehlergrenze in Übereinstimmung mit dem aus dem Quantenansatz berechnetem Wert gefunden.

6. Die Gesamtstrahlung ist durch die Röhrenspannung und die Röhrenstromstärke bestimmt. Eine Zunahme der Strahlung bei Erhöhung der Frequenz des Betriebsstromes findet nicht statt.

Herrn Prof. Lilienfeld bin ich für die Anregung zu dieser Untersuchung zu Dank verpflichtet. Auch Herrn Geheimrat Wiener möchte ich an dieser Stelle für das stete Interesse am Fortgang der Arbeit und für die Gewährung der Mittel bestens danken.

Leipzig, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 16. Juni 1923.)

3. *Zur Elektrizitätsleitung in Kristallen; von Friedrich von Rautenfeld.*

I. Allgemeines.

Der Mechanismus der elektrischen Leitfähigkeit ist bei Kristallen noch weniger bekannt, als bei amorphen festen Körpern, die man meist als feste Lösungen auffassen kann. Im Gegensatz zu diesen mit ihren frei beweglichen Ionen muß man in Kristallen relativ feste Raumgitter annehmen, in deren Punkten sich nach Doelter[1]) geladene Atome — Ionen — befinden, vielleicht in Wechselstellung mit Elektronen als verbindenden Teilen nach Stark.[2])

Jede Leitung der Elektrizität besteht entweder in einseitiger Bewegung von Elektronen oder in ein- oder doppelseitiger Bewegung von ein- oder mehrfach positiv oder negativ geladenen Ionen. Elektronenleitung findet sich in Metallen und in kristallinen Metallverbindungen als „metallische" Leitung; Ionenleitung ist von flüssigen Elektrolyten bekannt als „elektrolytische". Metallische Leitung ist nach Königsberger[3]) gekennzeichnet durch fünf Merkmale:

1. Es fehlt die elektrolytische Abscheidung nach Faradays Gesetz.

2. Es fehlt die Polarisation; nur minimale Spannungen können durch Thermokräfte und Peltiereffekte auftreten.

3. Verhalten zu Nernsts Verteilungssatz: Lösungen leiten elektrolytisch, Suspensionen metallisch.

---

1) C. Doelter, Zeitschr. f. anorg. Chem. 67. S. 387. 1910; auch Wien. Ber. 117. S. 845. 1908; 119. S. 49. 1910; Monatsh. f. Chem. 31. S. 493. 1910; Zeitschr. f. Elektrochem. 14. S. 552. 1908.

2) J. Stark, Prinzipien der Atomdynamik III. S. 193 (NaCl), S. 162 (allg.) 1915.

3) J. Königsberger, Zeitschr. f. Elektrochem. 15. S. 97. 1909; 16. S. 162. 1910.

4. Bei gewisser Temperatur tritt ein Minimum des Widerstandes auf, während bei einheitlichen festen Elektrolyten der Widerstand mit steigender Temperatur nur abnimmt.

5. Kontinuierliche Absorption und Emission, bei Elektrolyten selektive.

Die Abhängigkeit sowohl der elektrolytischen wie der metallischen Leitfähigkeit von der Temperatur läßt sich meist annähernd durch die van 't Hoffsche Formel[1]) darstellen, welche nach Rasch und Hinrichsen[2]) lautet

$$(1) \qquad \frac{d\varkappa}{\varkappa} = \frac{\nu' dT}{T^2} \quad \text{oder integriert} \quad \varkappa = C \cdot e^{-\frac{\nu'}{T}},$$

wo $\varkappa$ die Leitfähigkeit, T die absolute Temperatur und ν' eine Konstante ist, vermutlich eine Wärmegröße.

Nach anderen ist die Leitfähigkeit eine einfache Exponentialfunktion der Temperatur; so findet Benrath[3]) für Salze

$$(2) \qquad \lg \varkappa = a + bt.$$

Diese Formeln sind aber nach Königsberger und Reichenheim[4]) für die meisten Fälle nicht ausreichend, indem die Konstante C in Formel (1) linear oder sogar noch quadratisch abhängig von der Temperatur angesetzt werden muß.

Eine theoretische Begründung und die Literatur über Elektrizitätsleitung bis 1907 findet sich in Königsbergers ausführlichem Bericht im Jahrbuch der Radioaktivität.[5]) Seitdem beschäftigten sich folgende Arbeiten mit der Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit in Kristallen — also nicht z. B. in gepreßten Pulvern — bei höheren Temperaturen:

Verschiedene Kristalle in Plattenform bis zur Temperatur der Verflüssigung untersuchte Doelter[6]); Sulfide, Oxyde und Silikate als Stäbe zwischen 200 und 900° Schilling[7]), Anti-

1) Vgl. F. Kohlrausch u. A. Heydweiller, Ann. d. Phys. u. Chem. 53. S. 229. 1894.

2) E. Rasch u. F. W. Hinrichsen, Zeitschr. f. Elektrochem. 14. S. 41. 1908.

3) A. Benrath, Zeitschr. f. phys. Chem. 64. S. 693. 1908; A. Benrath u. J. Wainoff, Zeitschr. f. phys. Chem. 77. S. 257. 1911.

4) J. Königsberger u. O. Reichenheim, Phys. Zeitschr. 7. S. 570. 1906; 8. S. 833. 1907.

5) J. Königsberger, Jahrb. d. Rad. u. El. 4. S. 158—194. 1907.

6) C. Doelter, a. a. O.

7) K. Schilling, Inaug.-Diss. Freiburg 1910/11.

monitkristalle bis 100° Planck[1]); Gläser, einschließlich Quarzglas, prüften bis 660° Baumeister[2]), bis 460° Ambronn[3]) und — neben Nernst-Oxyden — bis 200° Weissenberger.[4]) Kalkspat bis 150° untersuchte Szlenker[5]), Steinsalz bis über den Schmelzpunkt Benrath[6]) und Tubandt[7]) und seine Schüler, bis 130° Röntgen[8]), bis gegen 700° Noack.[9]) Mit Schwermetallverbindungen beschäftigte sich Bädeker[10]), mit organischen Salzen Schall[11]), mit Silbersalzen Tubandt und seine Schüler.[7]) Endlich wurden verschiedene Isolatoren bis zu hohen Temperaturen geprüft von Rasch und Hinrichsen[12]), bis 200° von Dietrich[13]) und teilweise bis 1700° durch v. Pirani und v. Siemens.[14])

Mit Wechselstrom haben gearbeitet: Doelter, Schilling, Planck, Ambronn, Szlenker, Benrath, Tubandt, Bädeker, Schall, Rasch und Hinrichsen, v. Pirani und v. Siemens.

Eine anschauliche Vorstellung vom Mechanismus der Leitfähigkeit in Kristallen bildet sich Stark.[15]) Nicht nur bei

---

1) W. Planck, Inaug.-Diss. Göttingen 1913.

2) F. Baumeister, Inaug.-Diss. Rostock 1911/12.

3) K. Ambronn, Inaug.-Diss. Göttingen 1913; Physik. Zeitschr. 14. S. 112. 1913; Acta nova acad. Halle 101. S. 177. 1915; Ann. d. Phys. 58. S. 189. 1919.

4) A. Weissenberger, Ann. d. Phys. 49. S. 481. 1916.

5) K. Szlenker, Inaug.-Diss. München 1913.

6) A. Benrath, a. a. O.

7) C. Tubandt u. E. Lorenz, Zeitschr. f. phys. Chem. 87. S. 513. 1914; C. Tubandt u. F. Lorenz, a. a. O. S. 543; C. Tubandt, Zeitschr. f. Elektrochem. 26. S. 358. 1920; C. Tubandt u. S. Eggert, Zeitschr. f. anorg. Chem. 110. S. 196. 1920; 117. S. 48. 1921; C. Tubandt, S. Eggert u. G. Schibbe, Zeitschr. f. anorg. Chem. 117. S. 1. 1921. C. Tubandt u. H. Reinhold, Zeitschr. f. Elektrochem. 29. S. 313. 1923.

8) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. 41. S. 449. 1913; 64. S. 1. 1921. Ferner A. Joffé, Ann. d. Phys. 72. S. 461. 1923 (Kalkspat, Quarz, Alaune, Nitrate; Theorie). Anm. bei der Korrektur.

9) F. Noack, handschriftl. Inaug.-Diss. Rostock 1919.

10) K. Bädeker, Ann. d. Phys. 22. S. 749. 1907; 29. S. 566. 1909.

11) C. Schall, Zeitschr. f. Elektrochem. 14. S. 897. 1908.

12) E. Rasch u. F. W. Hinrichsen, a. a. O. und Elektr.-Techn. Zeitschr. 1901. S. 155.

13) W. Dietrich, Inaug.-Diss. Göttingen 1909/10.

14) M. v. Pirani u. W. v. Siemens, Zeitschr. f. Elektrochem. 15. S. 969. 1909.

15) J. Stark, a. a. O.

metallischer Leitfähigkeit läßt sich annehmen, daß gewisse, im Kristallgefüge in mehreren symmetrischen Richtungen schwach gebundene Elektronen sich nach gewissen Richtungen fast widerstandslos gleichsam in ganzen Ketten bewegen können, sondern ebenso läßt es sich bei elektrolytischer Leitung denken, daß gewisse Ionen ähnlich in ganzen „Stäben" wandern können. Einwendungen gegen diese Anschauung machte kürzlich v. Hevesy.[1])

Hiernach müßte die Leitfähigkeit nach verschiedenen Richtungen des Kristalls abhängig sein von der Anzahl, also auch vom Abstand der wandernden Teilchen untereinander und von den zu passierenden Nachbarteilchen. Außerdem muß eine gewisse Abhängigkeit von der Temperatur bestehen, insofern deren Steigerung sich in stärkeren Pendelschwingungen der Ionen um ihre Ruhelage äußert, was der Elektronenbeweglichkeit hinderlich, der Ionenbeweglichkeit aber förderlich ist.

II. Steinsalz.

Wegen seines einfachen und am besten bekannten Kristallaufbaues eignet sich zur experimentellen Prüfung dieser Fragen das Steinsalz, während es jedoch in bezug auf Feuchtigkeit und Einschlüsse solche Unsicherheiten mit sich bringt, daß man die Leitung in ihm teilweise als Schmutzleitung bezeichnet hat.[2]) Trotzdem hatte Braun[3]) das Verhältnis der Leitfähigkeiten $\perp$ Würfelfläche zu derjenigen $\perp$ Granatoederfläche zu der $\perp$ Oktaederfläche wie 6:4:3 erhalten. Noack[2]) fand die Werte 7,8:7,4:5,1. Die Temperaturabhängigkeit hat Noack mit Gleichstrom geprüft und erhält Kurven, die sich dem Exponentialgesetz nähern.

Zur Vermeidung etwaiger Polarisation wurden nun solche Messungen mit Wechselstrom ausgeführt. Hierzu erwies sich, trotz der hohen zu messenden Widerstände, bei Temperaturen über 600° eine einfache Brückenanordnung mit Telephon als ausreichend, wenn der Strom einer *Wechselstromsirene* entnommen wurde, die ihn ja sinusförmig liefert. Bei einer Frequenz von etwa 1000/sec konnte die Kapazität vernachlässigt werden.

1) G. v. Hevesy, Zeitschr. f. Phys. X. 2. S. 80. 1922.
2) F. Noack, a. a. O.
3) F. Braun, Wied. Ann. 31. S. 855. 1887.

Als *Material* dienten von der Firma Dr. Steeg & Reuter bezogene, geschliffene Spaltplatten von 2 bis 3 mm Dicke und etwa 2 cm Seitenlänge, die fast gleichmäßig durchsichtig waren, aber nach den Versuchen oft einige Bläschen zeigten, die wohl mit lokaler Erwärmung durch zu starke Ströme zusammenhingen, ohne indes bei Erhitzung ohne Stromdurchgang hervorzutreten. Solche Erwärmung äußerte sich durch erhöhte Leitfähigkeit, sobald die Stromdichte bei 2 mm Plattendicke etwa 4 Milliamp./cm^2 überstieg.

Als geeignete *Kontakte* für die als Elektroden dienenden Pt-Bleche erwiesen sich — nach ungünstigen Versuchen mit Graphitierung und in Cu-Ringe gepreßtem Graphitpulver — Pt-Belegungen, die durch Zerstäubung auf der rohgeschliffenen NaCl-Fläche hergestellt und an die die Pt-Elektroden angepreßt wurden. Am günstigsten war es, nachdem eine Platte aus dem Exsikkator entnommen war, ohne jede weitere Reinigung sogleich die Bestäubung vorzunehmen.

Die *Erhitzung* fand im wagerechten elektrischen Ofen statt. Eingeführt wurde der Kristall mittels einer Zange[1]) aus zwei etwa 40 cm langen und 6 mm dicken Röhren von Marquardtmasse, auf deren Enden Porzellanschuhe gesteckt waren, die mittels einer am anderen Ende der Zange wirkenden Spiralfeder das Präparat zwischen sich festklemmten. Zwischen jedem Porzellanschuh und der zugehörigen Pt-Blechelektrode befand sich noch ein gut ebenes Cu-Scheibchen. Die Zuleitungsdrähte lagen in den Marquardtröhren.

Der Widerstand der Leitung betrug wenige Ohm, die Kapazität der Leitung mit Platte rund $5 \cdot 10^{-5}$ MF., der Leitung allein $6 \cdot 10^{-6}$ MF. Die Frequenz des Wechselstromes betrug 1000 bis 1050 pro sec, hatte aber auf die Ergebnisse keinen merklichen Einfluß. Die Stromstärke durfte 4 Milliamp. nicht übersteigen, ohne den Kristall merklich zu erhitzen, aber auch nicht geringer als 1 Milliamp. sein, da sonst der Ton im Telephon undeutlich wurde.

Die *Genauigkeit* der Temperaturablesung ist auf 2 bis 3° zu schätzen; die Meßgenauigkeit an der Brückenteilung betrug,

1) Hergestellt von Hrn. Werkmeister Wendel im hiesigen Physikalischen Institut.

die ganze Brücke — deren Widerstand etwa 54 Ohm war — = 1000 gesetzt, in der Gegend von

100	200	300	400	500
etwa 1 Proz.	$^5/_6$ Proz.	$^2/_3$ Proz.	$^1/_2$ Proz.	$^1/_3$ Proz.

Die Fixpunktkorrektur bringt für das Thermoelement noch eine Unsicherheit von 1 bis 2°; die Korrektion für die Meßbrücke keine merkliche Unsicherheit.

Aus den vielen Meßreihen — z. T. auch mit Gleichstrom — an elf Platten seien einige Mittelwerte für Platte VIII mit Wechselstrom und für Platte XI mit Gleichstrom herausgegriffen. Platte VIII war 1,9 mm dick und ihre Belegungen hatten je 1 cm² Fläche. In die Brückenverzweigung (Fig. 1)

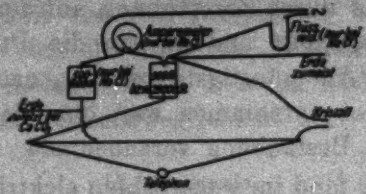


Fig. 1.

gingen rund 2 Milliamp. effektive Stromstärke, die einerseits den Vergleichswiderstand von 900 Ohm, andererseits die Platte von 700 bis 6000 Ohm durchflossen. Der *Vergleichswiderstand* war ein Wolffscher Präzisions-Stöpselrheostat mit Stufen von 0,1 bis 50 000 Ohm; ausgewählt wurde die in bezug auf Kapazität und Selbstinduktion besonders günstig liegende Gruppe 100 + 100 + 200 + 500 und auch beiderseits der Nachbarstöpsel gezogen. Die erwähnten 2 Milliamp. waren auch nur ein Teil des von der Sirene mit etwa 70 Volt gelieferten Stromes und gingen außer durch die Brückenverzweigung durch einen vorgeschalteten Widerstand von 500 oder 1000 Volt; der größere Teil des Stromes ging parallel dazu nur durch ein Hitzdrahtamperemeter von 16 bis 16$^1/_3$ Ohm. Außerdem lag vor sämtlichen Verzweigungen noch ein Flüssigkeitswiderstand von einigen hundert Ohm.

Platte XI hatte die gleichen Abmessungen und Elektroden wie Platte VIII. Ein Akkumulator lieferte den Gleichstrom, welcher nach Passieren eines kleinen Widerstandes zum größeren Teil durchs Amperemeter und zum kleineren durch die Brückenverzweigung in der oben beschriebenen Weise geleitet wurde.

Tabelle 1.

Steinsalz, Platte VIII, verglichen mit 900 Ohm.

Mittel aus ... Ablesungen		Temperatur °C	Ablesung mm	Absolute Leitfähigkeit 1/Ohm	Spezifische Leitfähigkeit 1/cm·Ohm
0,2 Amp.	2	665	154,5	0,000203	0,00107
∥ 1000 Ohm	3	709	343,5	0581	306
	2	730	465	0966	508
	2	746	559,5	1415	745
0,2 Amp.	3	682	219	0312	164
∥ 500 Ohm	2	723	414	0784	413
	2	743	537	1290	679
0,1 Amp.	2	649	108	0135	071
∥ 500 Ohm	3	670	175	0236	124
	3	693	266,5	0404	212
	2	711	361	0629	331
„	2	649	115,5	0145	076
	2	688	246	0363	191
	3	709	340	0573	302
	2	720	404	0754	396
	2	732	479,5	1020	538
	2	742	542	1320	694
	2	750	580,5	1540	810
	2	761	632,5	1925	0,01010
0,1 Amp.	2	771	691,5	2490	1310
∥ 1000 Ohm	2	781	739	3150	1660
	2	793	794	4280	2250

Tabelle 2.

Steinsalz, Platte XI, verglichen mit 900 Ohm.

Mittel aus ... Ables.		Temperatur °C	Ablesung mm	Absolute Leitfähigkeit 1/Ohm	Spezifische Leitfähigkeit 1/cm·Ohm
0,2 Amp.	2	645	082	0,000099	0,00052
∥ 1000 Ohm	3	667	130	167	88
	5	690	159	270	142
	3	710	280	432	227
	3	730	375	666	351
	3	753	485	1046	551
	3	729	362	630	332
	4	711	276	424	223
	3	692	198	274	144
	3	670	136	175	092
	2	648	085	103	054
	2	630	060	071	037

Die Messungen an Steinsalz (Kurven auf Logarithmenpapier, Fig. 2) ergeben eine gute Übereinstimmung mit dem einfachen Exponentialgesetz Formel (2), S. 618, von 630 bis über 790°, also nahe an den Schmelzpunkt (800°) heran, vgl. Platte VIII, für die sich z. B. die Gleichung ergibt $\varkappa = 0{,}0_9152 \cdot e^{0{,}0287\,t}$.

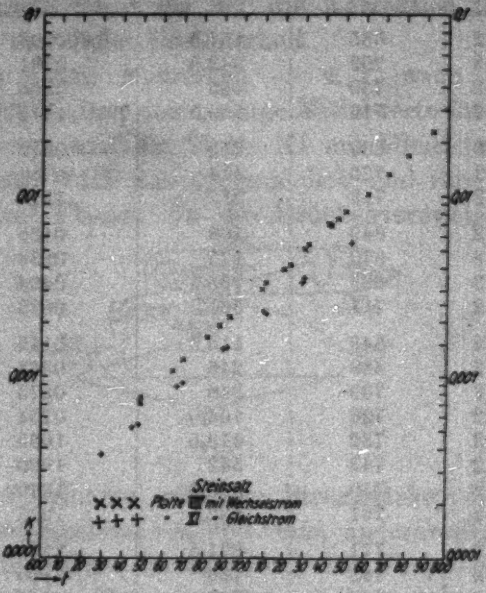


Fig. 2.

III. Kalkspat.

Als Vertreter eines anderen Kristallsystems mit übersichtlichem Bau diente zu weiteren Messungen Kalkspat, an dem bis 150° die Wechselstrommessungen von Szlenker vorliegen.[1]) Mit einfacheren Mitteln und daher geringerer Genauigkeit wurde nun hier das Intervall von etwa 230 bis 550° geprüft, gleichzeitg mit Berücksichtigung verschiedener Richtungen im Kristall. Die Platten — Nr. 1 $\perp$ zur Hauptachse, Nr. 2 in der Spaltrichtung, Nr. 3 und 4 $\parallel$ zur Hauptachse geschnitten — waren wieder von Dr. Steeg und Reuter geliefert und stammten vom selben Fundort in Island, freilich nicht vom gleichen Kristall. Platte Nr. 3 ergab sehr wechselnde Werte, da sie scheinbar die Erhitzung schlechter vertrug; des-

1) K. Szlenker, a. a. O.

halb mußte eine Platte Nr. 4 nachbezogen werden, die aber auch in bezug auf Konstanz an Nr. 1 und 2 nicht heranreichte — sollte die Leitfähigkeit $\perp$ zur Hauptachse überhaupt schlechter definierbar sein?

Die Pt-Belegungen wurden ebenso erzeugt wie beim Steinsalz. Die Abmessungen der Platten waren (in Klammern die nach Abänderung der Elektroden):

Platte	Dicke	Elektrode	mm × mm	Wirksame Fläche
1	2,06 mm	a	8 × 12	etwa 100 mm²
		b	9 × 15	
2	2,05 „	a und b	9 × 13	115 „
3	2,06 „	a	etwa 7 × 11	
		b	7,5 × 11,5	80 „
			(7 × 11	(75) „
4	1,7 „		8,5 × 12,5	110 „

Über die Erhitzung und die Meßbrücke vgl. Teil II. Bei letzterer mußte wegen des hohen zu messenden Widerstandes mit 29000 Ohm (10000 + 10000 + 5000 + 2000 + 1000 + 1000; teilweise 28000 oder 29900 Ohm) verglichen werden, was die Genauigkeit stark verminderte. Dafür blieb aber der Zweig mit dem Amperemeter und der vor die Sirene gelegte Widerstand ganz fort, da die Stromstärke jetzt nicht über 3 Milliamp. steigen konnte.

Die Genauigkeit der Brückenablesung sank bei Platte 1 und 2 wohl niemals unter 2 Proz. bei 050 mm oder 5 Proz. bei 020 mm oder 10 Proz. bei 010 mm, während sie bei Platte 3 und 4 (||) kaum 6, 15 und 30 Proz. erreichte; so bleiben die Angaben für diese Platten doch recht zweifelhaft. Nachstehende Tab. 3 zeigt die Ergebnisse, wobei einige sehr unsichere Werte weggelassen, im übrigen aber fast nirgends Mittelwerte (*) gebildet sind.

Trotz der Unsicherheit für die Platten $\parallel$ zur Hauptachse bilden die Kurven (Fig. 3) deutlich drei Gruppen, indem die Leitfähigkeit am größten bei der Platte $\perp$ zur Hauptachse ist und am kleinsten bei den Platten $\parallel$ zur Hauptachse, während sie bei der Platte in der Spaltrichtung annähernd das geometrische Mittel (auf logarithmischem Papier das arithmetische!) zwischen jenen beiden bildet. Die drei Kurven sind

Tabelle 3.

Vergleichswiderstand 28000—29900 Ohm.

a) Kalkspat ⊥ Hauptachse (Platte 1)

Temp. °C	Ables. mm	Absolute Leitfähigkeit 1/Ohm	Spezif. Leitfähigkeit 1/cm·Ohm
232	003,5	$0{,}0_6 11$	$0{,}0_6 22$
253	4,5	15	30
264	6	20	40
277	9	31	62
288	11	385	77
301	13	45	90
309	14	485	97
311	15	525	$0{,}0_6 105$
*320		63	126
345	25	86	172
356	32	$0{,}0_6 106$	212
368	37	127	254
379	43	150	300
*389		174	348
398	57	202	404
409	66	236	472
421	76	275	550
434	88	322	644
447	98	363	726
453	106	397	794
461	113	426	852
468	116	438	876
475	120	456	912
489	139	540	$0{,}0_4 1080$
499	155	617	1234
503	154	607	1214
528	186	761	1522
552	217	928	1856

b) Kalkspat in Spaltrichtung (Pl. 2)

Temp. °C	Ables. mm	Absolute Leitfähigkeit 1/Ohm	Spezif. Leitfähigkeit 1/cm·Ohm
232	002	$0{,}0_7 75$	$0{,}0_6 125$
241	003	$0{,}0_6 105$	175
252	004	14	235
262	005	175	29
272	006	21	35
288	008	27	45
303	011	36	60
318	024	49	815
331	017	59	98
339	020	69	$0{,}0_6 115$
346	021	77	128
351	023	80	133
371	031	$0{,}0_6 106$	177
386	039	135	225
390	039,5	141	235
408	050,5	174	290
418	056	193	321
430	063	219	365
439	069	240	400
457	077	268	447
459	082	283	472
464	086	297	495
471	083	312	520
*478	(2 gleiche)	328	547
*499		379	632
510	107	413	689
519	126	435	725
521	128	442	746
*540		489	815
553	131	518	864

sich ziemlich ähnlich und lassen sich durch die Formel (1), S. 618, wiedergeben, welche für die oberste Kurve lautet (vgl. die Gerade in Fig. 3[1]):

$$\varkappa = 0{,}01995 \cdot e^{-\frac{5756{,}5}{T}}.$$

1) Bei der Geraden hat ein Punkt versehentlich eine falsche Abszisse: statt bei 0,00128 soll er bei 0,00129 liegen.

Tabelle 3 (Fortsetzung).

Vergleichswiderstand 28000—29900 Ohm.

c) Kalkspat ∥ Hauptachse (Platte 3)

Temp. °C	Ables. mm	Absolute Leitfähigkeit 1/Ohm	Spezif. Leitfähigkeit 1/cm·Ohm
243	002,5	$0{,}0_7 85$	$0{,}0_8 11$
262	003	$0{,}0_8 11$	143
286	006,5	225	29
305	009	31	40
314	011,5	40	52
323	012,5	44	58
372	021	74	96
399	032	$0{,}0_8 114$	$0{,}0_8 137$
417	041	147	162
421	043	155	202
444	023	170	227
(Vergleichswiderst. 20000 Ohm)			
467	061	224	269
467	065	240	264
527	092	350	385

d) Kalkspat ∥ Hauptachse (Platte 4)

Temp. °C	Ables. mm	Absolute Leitfähigkeit 1/Ohm	Spezif. Leitfähigkeit 1/cm·Ohm
249	002,5	$0{,}0_7 87$	$0{,}0_8 16$
293	004,5	$0{,}0_8 16$	29
318	006	20	37
333	007,5	26	47
362	012	42	755
367	012	42	755
369	013	455	82
386	018	64	$0{,}0_8 115$
419	026	92	166
421	026	92	166
428	029	$0{,}0_8 100$	180
447u.448	032	114	205
448	031,5	112	etwa 200
469	043	155	279
484	046,5	168	302
498	049,5	180	323
504	059	215	387
510	059	215	387
531	066	244	439
534	065	240	432
538	068	250	450

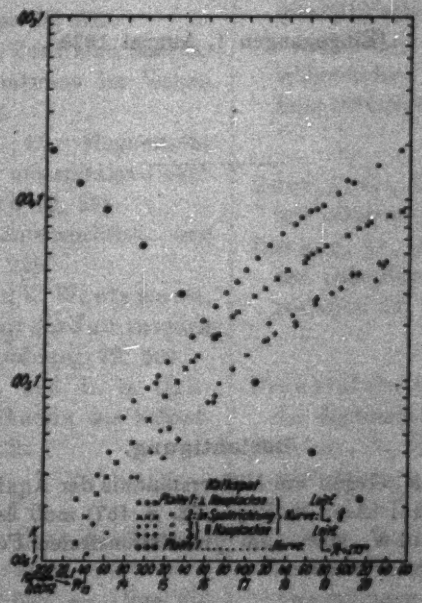


Fig. 3.

Also Kalkspat, dessen Leitfähigkeit nach Szlenker[1]) elektrolytisch ist, zeigt eine Temperaturabhängigkeit wie die meisten Isolatoren, während Steinsalz, dessen Leitfähigkeit nach Noack[2]) mindestens zum großen Teil elektrolytisch ist, die andere Temperaturabhängigkeit einfacher Salze besitzt. Hinsichtlich der Richtung im Kristall scheint es nicht in erster Linie auf das Hintereinanderliegen gleicher oder verschiedener Atome anzukommen, sondern vielleicht auf ihre Beweglichkeit in mehr seitlichen Richtungen — vgl. auch die Bemerkungen von v. Hevesy.[3]) Der Mechanismus der Leitfähigkeit ist auch durch die Richtungsversuche noch nicht geklärt.

Vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Würzburger Universität ausgeführt. Zu besonderem Danke verpflichtet bin ich Hrn. Professor J. Stark für die Anregung und Unterstützung, sowie Hrn. Professor F. Harms für weitere Unterstützung dieser Arbeit.

Würzburg, Juli 1923.

---

1) K. Szlenker, a. a. O.
2) F. Noack, a. a. O.
3) G. v. Hevesy, a. a. O.

(Eingegangen 1. August 1923.)

Berichtigung.

In der Notiz „Gegen ein Mißverständnis der Äquivalenzhypothese" von Aloys Wenzl (Ann. d. Phys. 72. S. 457) muß es statt n_0 (S. 458, Zeile 6 von unten) n, statt „im gravitationsfreien Feld" (Zeile 2 von unten) „im Punkte P" heißen.

Namenregister zum Jahrgang 1923.

A.

Alexandrow, W., Über den kugelsymmetrischen Vakuumvorgang in der Einsteinschen Gravitationstheorie 72, 141.

Auer von Welsbach, C., Über die Öffnungsfunkenspektren und ihre Anwendung in der chemischen Analyse 71, 7.

B.

Back, E., Zur Kenntnis des Zeemaneffektes 70, 333.

Baerwald, H., Zur Frage des Umladungsmechanismus im Kanalstrahl 70, 255.

Benedicks, C., Magnetische Schutzpanzer aus spiralgewickeltem Eisenblech 72, 286.

Bohr, N., Linienspektren und Atombau 71, 228.

Bratke, E. und E. Waetzmann, Über eine Abart der Jaminschen Interferenzanordnung 72, 501.

Burger, C. H. und L. S. Ornstein, Zur Theorie des Schroteffektes 70, 622.

D.

Dieterici, C., Über das Refraktionsvolumen sehr verdünnter Lösungen 70, 558. — Über die Dampfdruckverminderung einiger Metallsalze in wäßriger Lösung bei 0 Grad C. 70, 617. — Eine mechanische Theorie der Lösungen 72, 241.

Dik, H. W. J. und P. Zeeman, Weitere Beobachtungen über eine Beziehung zwischen den Spektren des ionisierten Kaliums und des Argons 71, 199.

Dinkelacker, O., C. Füchtbauer und G. Joos, Über Intensität, Verbreiterung und Druckverschiebung von Spektrallinien, insbesondere der Absorptionslinie 2537 des Quecksilbers 71, 204.

E.

Eder, J. M., Die Spektralanalyse der seltenen Erden 71, 12.

Enskog, D., Zur Quantentheorie des Dampfdruckes und der Dissoziation 72, 321.

F.

Finkelstein-Cukier, J., Über die Spitzenentladung 71, 509.

Fischer, J., Über die Beugungserscheinungen bei sphärischer Aberration 72, 353.

Fischer, V., Differentialformen der Zustandsgleichung und ihre Anwendungen 71, 591.

Försterling, K., Über die Fortpflanzung elektrischer Wellen an einem geraden Metalldraht, der mit einem leitenden Mantel versehen ist 72, 80.

Füchtbauer, C., G. Joos und O. Dinkelacker, Über Intensität, Verbreiterung und Druckverschiebung von Spektrallinien, insbesondere der Absorptionslinie 2537 des Quecksilbers 71, 204.

Fürth, R., Dielektrizitätskonstanten einiger wäßriger Lösungen und ihre Deutung nach der Dipoltheorie von Debye. Mit einem Anhang: Dielektrizitätskonstanten einiger biologisch und technologisch interessanter Stoffe 70, 63.

G.

Gans, R., Bemerkung zu meiner Arbeit über Hochvakuumentladung 70, 625.

Gleich, G. von, Die allgemeine Relativitätstheorie und das Merkurperihel 72, 221.

Gordon, W. und H. Kalmann, Zur Theorie der Dispersion in einem System asymmetrischer Dipole 70, 121. — Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie 72, 421.

Goens, E. und E. Grüneisen, Schallgeschwindigkeit in Stickstofftetroxyd. Eine untere Grenze seiner Dissoziationsgeschwindigkeit 72, 193.

Graffunder, W., Über die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von Benzol, Aceton, Glyzerin von der Temperatur 70, 225.

Grüneisen, E. und E. Goens, Schallgeschwindigkeit in Stickstofftetroxyd. Eine untere Grenze seiner Dissoziationsgeschwindigkeit 72, 193.

H.

Hagenbach, A. und H. Schuhmacher, Symmetrische Linienserien im Eisenspektrum 71, 19.

Hahnemann, W. und H. Hecht, Zur experimentellen Untersuchung von Telephonen 70, 283.

Halpern, O., Über die Verwendung von selektiv durchlässigen Spiegeln in der Strahlungstheorie 72, 516.

Hecht, H. und W. Hahnemann, Zur experimentellen Untersuchung von Telephonen 70, 283.

Herzfeld, K. F., Nachtrag zu der Arbeit: Zur Theorie des Kerr- und Faradayeffektes 70, 332.

Hulthén, E., Über das Bandenspektrum des Kohlenoxyds 71, 41.

J.

Jacoby, G., Über die elektrische Polarisation des Dielektrikums 72, 153.

Jaffé, G., Grundriß einer Theorie des anisotropen Strahlungsfeldes II. 70, 457.

Janicki, L. und E. Lau, Über den Einfluß metallischer Oberflächen auf die Spektren von Hg, Cd, He und O 71, 562.

Joffé, A., Elektrizitätsdurchgang durch Kristalle 72, 461.

Joos, G., C. Füchtbauer und O. Dinkelacker, Über Intensität, Verbreiterung und Druckverschiebung von Spektrallinien,

insbesondere der Absorptionslinien 2537 des Quecksilbers 71, 204.

Julius, W. H. und M. Minnaert, Kritisches zu Deutungen des Sonnenspektrums 71, 50.

K.

Kallmann, H. und W. Gordon, Zur Theorie der Dispersion in einem System asymmetrischer Dipole 70, 121.

Karolus, A., Untersuchung über das kontinuierliche Röntgenspektrum bei verschiedenen Entladungsfrequenzen 72, 595.

Kirschbaum, H., Über die Intensitätsverteilung und den Ursprung des Bandenspektrums von Stickstoff 71, 289.

Klose, A., Über ausgezeichnete Energiewerte in mechanischen Systemen 72, 67.

Kneser, H., Untersuchungen an einem Glimmlichtgleichrichter für Wechselstrom 72, 519.

Kopp, W., Untersuchung stehender elektromagnetischer Wellen mit ungedämpfter Erregung 72, 525.

Kottler, F., Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen 70, 405. — Elektromagnetische Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen 71, 457. — Berichtigung zu der Abhandlung „Elektromagnetische Theorie der Beugung" 72, 320.

König, W., Einige Bemerkungen zur Metallreflektion 71, 65.

Kratzer, A., Die Feinstruktur einer Klasse von Bandenspektren 71, 72.

Krüger, K., Mechanische Schwingungssysteme mit Stoßanregung 70, 291.

Kuppenheim, H., Über die Beständigkeit der Phosphoreszenzzentren I 70, 81; II 70, 113. — Nachtrag zu der Arbeit: Über die Beständigkeit der Phosphoreszenzzentren I 72, 564.

L.

Laporte, O., Zur Theorie der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen auf der Erdkugel 70, 595.

Lau, E. und L. Janicki, Über den Einfluß metallischer Oberflächen auf die Spektren von Hg, Cd, He und O 70, 562.

Lindman, K. F., Bemerkung zu der Arbeit von N. Kapzow: „Über die Diffraktion Hertzscher Wellen in einem Raumgitter" 71, 424.

M.

Magnus, A., Die spezifischen Wärmen des Kohlenstoffs, Siliziums und Siliziumkarbids bei hohen Temperaturen 70, 303.

March, A., Zur Arbeit H. Kulenkampffs: „Über das kontinuierliche Röntgenspektrum" 71, 680.

Marx, E., Experimentaluntersuchung über die Glimmlichtverstärkerröhre 70, 257.

Mecke, R., Das Bandenspektrum des Jod 71, 104.

Meißner, K. W., Über einige Gesetzmäßigkeiten im Bogenspektrum des Bleis 71, 135.

Meyer, E., Ponderomotorische Wirkungen von Tonwellen auf resonierende Membranen 71, 567.

Michels, A., Einfluß der Rotation auf die Empfindlichkeit einer absoluten Druckwage 72, 285.

Mie, G., Das elektrische Feld eines schweren elektrisch geladenen Kügelchens, das um ein Gravitationszentrum kreist 70, 489.

Minnaert, M. und W. H. Julius, Kritisches zur Deutung des Sonnenspektrums 71, 50.

N.

Neuburger, M. C., Über die Dimensionen der Atomkerne und die α-, H^+-, β- und γ-Strahlung 70, 139.

Niessen, K. F., Zur Quantentheorie des Wasserstoffmolekülions 70, 129.

O.

Ornstein, L. S. und H. C. Burger, Zur Theorie des Schroteffektes 70, 622.

P.

Paschen, F., Die Funkenspektren des Aluminiums. I. Teil 71, 142; II. Teil 71, 537.

Panconcelli-Calzia, G., Ein Verfahren, um graphisch gewonnene Schallaufnahmen auf dem üblichen glyphischen Wege (Sprechmaschine) wieder hörbar zu machen (Paka-Verfahren) 70, 250.

Pedersen, P. O., Über den elektrischen Funken, I. Teil: Funkenverzögerung 71, 317.

du Prel, G., Über Verstärkung von photoelektrischen und Ionisationsströmen mittels der Elektronenröhre 70, 199.

R.

Radt, W. P., Über die Bremsung bewegter Ladungen beim Überfliegen leitender Körper 72, 400.

Ramsauer, C., Die Massenbewegung des Wassers bei Unterwasserexplosionen 72, 265. — Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen. II. Fortsetzung und Schluß 72, 345.

Rautenfeld, F. v., Zur Elektrizitätsleitung in Kristallen 72, 617.

Reeb, O, Über eine Methode zur Messung der Dispersion der künstlichen Doppelbrechung 71, 427.

Reinheimer, H., Über das Funkenspektrum des Rubidiums 71, 162.

Runge, C., Über die sogenannten Geister der Spektralgitter 71, 178.

Rupp, E., Über Leitfähigkeitserregung bei Hitzeaustreiben der Phosphore 70, 391. — Über erregende Absorption und Tilgung der Phosphore 72, 81.

Rusch, M., Über Lichtbrechung an Gasen im Sichtbaren und Ultrarot (6,76 μ) und Bestimmung der Kalkspateigenschwingung bei 6,76 μ 70, 378.

Rüchardt, E., Über die Umladungen von Wasserstoffkanalstrahlen 71, 377.

S.

Selety, F., Erwiderung auf die Bemerkungen Einsteins über meine Arbeit: „Beiträge zum kosmologischen Problem“ 72, 58.

Siegbahn, M. und Žáček, A., Über die relative Intensität der K-Linien in Röntgenspektren 71, 187.

Sommerfeld, A., Über die Deutung verwickelter Spektren (Mangan, Chrom usw.) nach der Methode der inneren Quantenzahlen 70, 32.

Schmidt, F., Über das Leuchten der Phosphore in hohen elektrischen Feldern 70, 161.

Schmidt, G. und R. Walter, Über die Elektrizitätsleitung von Salzdämpfen. Abhandlung IV 72, 565.

Schumacher†, H. und A. Hagenbach, Symmetrische Linienserien im Eisenspektrum 71, 19.

T.

Thiele, J., Über die zeitliche Änderung der Thermokräfte bei Eisen, Nickel und Kobalt nach dem Ziehen oder Magnetisieren 72, 549.

Trautmann, F., Über den Hochfrequenzwiderstand von geraden Drähten, die mit leitenden Mänteln versehen sind 72, 1.

W.

Waetzmann, E. und E. Bratke, Über eine Abart der Jaminschen Interferenzanordnung 72, 501.

Waibel, F., Über die Druckabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von Schwefelkohlenstoff, Benzol, Hexan und Luft 72, 161.

Walter, R. und G. C. Schmidt, Über die Elektrizitätsleitung von Salzdämpfen. IV. Abhandlung 72, 565.

Wedenejewa, N., Über Absorption und anomale Rotationsdispersion des Kampferchinons 72, 122.

Wentzel, G., Zur Theorie der Rückdiffusion von β-Strahlen 70, 561.

Wenzl, A., Gegen ein Mißverständnis der Äquivalenzhypothese 72, 457.

Werner, O., Über die Schwächung der sichtbaren Strahlung durch künstlichen homogenen Nebel 70, 480.

Wien, W., Über das Leuchten der Kanalstrahlen 70, 1.

Wommelsdorf, H., Ein neuer Elektrophor 70, 135.

Z.

Žáček, A. und M. Siegbahn, Über die relative Intensität der K-Linien in Röntgenspektren 71, 187.

Zanstra, H., Die Relativierung der Bewegung mit Hilfe der Hypothese von A. Föppl 70, 153.

Zeeman, P. und H. W. I. Dik, Weitere Beobachtungen über eine Beziehung zwischen den Spektren des ionisierten Kaliums und des Argons 71, 199.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.